теоремы 65 гл. II), а пространство голоморфных ограниченных функций, согласно теореме 15, замкнуто в $(\vec{F}^{\Omega})_{cb}$.

Следствие 4. *Пусть Ω — открытое множество в E и $\vec{F}$ — пространство Банаха. Тогда пространство ограниченных непрерывных функций на $\overline{\Omega}$, голоморфных в Ω, со значениями в $\vec{F}$, снабженное нормой $|||\vec{f}|||_{\overline{\Omega},0}$, полно.*

В самом деле, это пространство также замкнуто в $(\vec{F}^{\Omega})_{cb}$. Аналогично, имеет место

Следствие 5. *Пространство функций, голоморфных в Ω, со значениями в $\vec{F}$, ограниченных вместе с их производными порядков $\leqslant m$, снабженное нормой $|||\vec{f}|||_{\Omega,m}$, полно. Пространство функций, непрерывных на $\overline{\Omega}$, голоморфных на Ω, со значениями в $\vec{F}$, ограниченных на $\overline{\Omega}$ и ограниченных вместе со своими производными порядков $\leqslant m$ на Ω, снабженное нормой $|||\vec{f}|||_{\Omega,m}$, полно.*

§ 4. МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ. ПОЛЮСЫ И СУЩЕСТВЕННО ОСОБЫЕ ТОЧКИ. ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ВЫЧЕТОВ

В § 3 можно было доказать *равенство Коши* для голоморфных функций на открытых множествах из $\mathbb{C}$, исходя из имеющихся там *неравенств*, а эти неравенства можно распространить на функции классов C^1 или C^∞, ограниченные на открытых множествах произвольного аффинного нормированного пространства E (над полем $\mathbb{C}$). В настоящем § 4 такие обобщения невозможны. В самом деле, здесь будут изучаться функции, имеющие *изолированную* особую точку $a \in \mathbb{C}$, т. е. голоморфные в $\complement a$, например $1/(z-a)$. Позже мы увидим, что в $\mathbb{C}^n$ при $n \geqslant 2$ каждая голоморфная функция в $\complement a$ продолжается до некоторой голоморфной функции во всем пространстве. Следовательно, *функций с изолированными особенностями в таких пространствах не существует*. Поэтому во всем этом параграфе в качестве E мы будем брать поле комплексных чисел.

Теорема 16. *Пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная в кольце $\Omega \subset \mathbb{C}$, определенном неравенствами $R_1 < |z-a| < R_2$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда она может быть* *разложена в ряд, называемый рядом Лорана:*

$$\vec{f}(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\vec{c}_n(z-a)^n. \qquad \text{(VII, 4; 1)}$$

Это разложение абсолютно сходится в кольце Ω и нормально сходится во всяком кольце $R_1 < R_1' \leqslant |z-a| \leqslant R_2' < R_2$.

Коэффициенты ряда Лорана определяются единственным образом и могут быть вычислены по формуле

$$\vec{c}_n=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{\vec{f}(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta, \qquad \text{(VII, 4; 2)}$$

где Γ — произвольный C^0-цикл конечной длины в Ω, обходящий один раз точку a в положительном направлении[1]*).*

Отметим то интересное, что имеется в этой формуле. Разложение Лорана служит обобщением разложения Тейлора. Однако оно пригодно не в окрестности точки a, а только в кольце на некотором расстоянии от точки a. В частности, выразить коэффициенты $\vec{c}_n$ через производные функции $\vec{f}$ в точке a невозможно, так как функция $\vec{f}$ не определена в окрестности точки a.

Доказательство. Обозначим через γ_1 (соответственно γ_2) окружность с центром в точке a радиуса R_1'' (соответственно R_2''), где $R_1 < R_1'' < R_1' < R_2' < R_2'' < R_2$, ориентированную в положительном направлении.

Тогда в открытом множестве Ω цикл $\gamma_2-\gamma_1$ является ориентированной границей кольца $R_1'' \leqslant |z-a| \leqslant R_2''$, имеющей ориентацию пространства $\mathbb{C}$, и к нему можно применить интегральную формулу Коши

$$\vec{f}(z)=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1-\gamma_2}\frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_2}-\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_1} \qquad \text{(VII, 4; 3)}$$

для $R_1' \leqslant |z-a| \leqslant R_2'$.

Рассмотрим сначала первый интеграл. Его можно вычислить точно так же, как и в теореме 11, разлагая $1/(\zeta-z)$ по сте-

---

[1]) В дальнейшем $\sum\limits_{-\infty}^{-1}\vec{c}_n(\zeta-a)^n$ называется *главной частью* ряда Лорана, а $\sum\limits_{0}^{\infty}\vec{c}_n(\zeta-a)^n$ — *правильной частью. — Прим. ред.*

пеням $z-a$. Так получается разложение

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \qquad \text{(VII, 4; 4)}$$

где коэффициенты $\vec{c}_n$, $n\geqslant 0$, вычисляются по формуле (VII, 4; 2), в которой интеграл берется по γ_2. Как мы уже говорили, единственное различие состоит здесь в том, что коэффициент $\vec{c}_n$ теперь нельзя выразить через производные функции $\vec{f}$ в точке a. Радиус сходимости написанного ряда $\geqslant R_2''$. (Это следует из того, что $\|\vec{c}_m\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2}\frac{\|\vec{f}(\zeta)\|}{R_2''^{n+1}}\,ds\leqslant\frac{M(a,R_2'')}{R_2''}$, где $M(a,\rho)$ равняется максимуму нормы $\|\vec{f}\|$ на окружности $|z-a|=\rho$. Заметим, что здесь в противоположность § 3 величина $M(a,\rho)$ не равна более $\max\|\vec{f}\|$ в круге $|z-a|\leqslant\rho$, в котором функция $\vec{f}$ даже не определена.) В частности, ряд нормально сходится для $|z-a|\leqslant R_2'$.

Рассмотрим теперь второй интеграл. На этот раз мы произведем разложение по отрицательным степеням $z-a$. Имеем:

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=-\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=$$

$$=-\frac{1}{z-a}-\frac{\zeta-a}{(z-a)^2}-\frac{(\zeta-a)^2}{(z-a)^3}-\ldots=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}, \qquad \text{(VII, 4; 5)}$$

где ряд нормально сходится для $|\zeta-a|=R_1''$, $|z-a|\geqslant R_1'$.

Если теперь переставить знаки $\sum$ и $\int$, то получится

$$-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\vec{f}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\sum_{n=-1}^{-\infty}\vec{c}_n(z-a)^n, \qquad \text{(VII, 4; 6)}$$

где $\vec{c}_n$ (при $n\leqslant-1$) снова определяются по формуле (VII, 4; 2), в которой интеграл берется по γ_1.

Произведенная перестановка возможна, если в тех же условиях, что и в доказательстве теоремы 11, при замене величин $\frac{f(\zeta)(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}$ их нормами одна из двух частей формулы (VII, 4; 6) принимает конечное значение. Поскольку $R_1'/R_1''>1$ и суммирование ведется от $n=-1$ до $-\infty$, то имеет место оценка

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_1}\frac{\|\vec{f}(\zeta)\|\,|z-a|^n}{|\zeta-a|^{n+1}}ds\leqslant M(a, R_1'')\left(\frac{R_1'}{R_1''}\right)^n. \quad \text{(VII, 4; 7)}$$

Отсюда следует законность перестановки. Получаемый ряд нормально сходится для $|z-a|\geqslant R_1'$.

Объединяя (VII, 4; 4) и (VII, 4; 6), мы получаем соотношение (VII, 4; 1) со значениями коэффициентов (VII, 4; 2), вычисляемыми с помощью интегралов, взятых по γ_1 или γ_2 в зависимости от знака n.

Один из полученных рядов нормально сходится для $|z-a|\leqslant R_2'$, а другой — для $|z-a|\geqslant R_1'$. Поэтому рассматриваемый ряд (VII, 4; 1) нормально сходится в кольце $R_1'\leqslant\leqslant|z-a|\leqslant R_2'$.

Для значений коэффициентов мы нашли интегралы, вычисляемые по некоторым окружностям γ_2 при $n\geqslant 0$ и γ_1 при $n\leqslant -1$ с центром в точке a, ориентированным в положительном направлении. Так как здесь речь идет об интегралах от голоморфных функций в кольце Ω, т. е. об интегралах от замкнутых дифференциальных форм степени 1, то любую из окружностей γ_1 или γ_2 можно заменить на произвольный C^0-цикл конечной длины, C^0-гомологичный этим окружностям в Ω (следствие 6 теоремы 54 гл. IV). Далее, если некоторый C^0-цикл конечной длины Γ в Ω делает один оборот вокруг точки a в положительном направлении, т. е. если точка a имеет относительно этого цикла индекс $+1$, то это означает (см. гл. VI, стр. 302), что этот цикл C^0-гомологичен некоторой окружности с центром в точке a, расположенной в Ω и пробегаемой в положительном направлении.

В случае ряда Тейлора ясно, что разложение единственно и его коэффициенты определяются по формуле $\vec{c}_n=\dfrac{\vec{f}^{(n)}(a)}{n!}$. В самом деле, степенной ряд с показателями $\geqslant 0$ всегда почленно дифференцируем внутри его круга сходимости. Поэтому можно вычислить $\vec{f}^{(n)}(z)$ с помощью ряда, затем положить $z=a$ и получить $\vec{f}^{(n)}(a)=n!\vec{c}_n$.

Здесь же для доказательства единственности $\vec{c}_n$ можно поступить следующим образом. Поскольку ряд в кольце сходится равномерно, то можно почленно интегрировать $\dfrac{\vec{f}(z)}{(z-a)^{m+1}}dz$ на окружности γ с центром в a, лежащей в кольце и пробегаемой в положительном направлении. Однако интеграл

$\int\limits_{\gamma} (z-a)^{n-m-1}\,dz$ при $n-m \neq 0$ равен 0, поскольку его можно записать как интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{d\,(z-a)^{n-m}}{n-m}$, т. е. как интеграл от некоторой кограницы на цикле. При $n-m=0$ этот интеграл записывается в виде $\int \frac{dz}{z-a}$ и равен $2i\pi$. Окончательно получается, что $\int\limits_{\gamma} \frac{\vec{f}(z)\,dz}{(z-a)^{m+1}} = 2i\pi\vec{c}_m$, что и дает искомую формулу.

Вычисляя $\vec{c}_n$ с помощью интегралов по окружности радиуса ρ, получаем

Следствие 1. *Коэффициенты ряда Лорана допускают оценку*

$$\|\vec{c}_n\|\rho^n \leqslant M(a, \rho), \quad R_1 < \rho < R_2. \qquad \text{(VII, 4; 8)}$$

Другими словами, каждый член $\vec{c}_n(z-a)^n$ *ряда Лорана на любой окружности с центром в точке* a *радиуса* ρ, *лежащей в кольце* Ω, *мажорируем по норме максимумом* $M(a, \rho)$ *нормы функции* $\vec{f}$ *на этой окружности.*

Случай $R_1 = 0$. Ряд Тейлора есть частный случай ряда Лорана, в котором кольцо определяется неравенствами $0 < |z-a| < R_2$, а коэффициенты, соответствующие $n < 0$, равны нулю. Если функция голоморфна в $0 < |z-a| < R_2$, то заведомо известно, что она имеет разложение Лорана, нормально сходящееся в каждом кольце $0 < R_1' \leqslant |z-a| \leqslant R_2' < R_2$.

Если окажется, что все коэффициенты $\vec{c}_n$ при $n < 0$ равны нулю, то, давая функции значение $\vec{c}_0$ в точке a, ее можно продолжить до функции, голоморфной в круге $|z-a| < R_2$, ибо она тогда представима в виде локально равномерно сходящегося ряда функций, голоморфных в $|z-a| < R_2$. В этом случае точку a называют *регулярной точкой.*

Точку a называют *полюсом порядка* m, если коэффициент $\vec{c}_{-m}$ не равен нулю, а все коэффициенты $\vec{c}_n$ для $n < -m$ нули. Если имеется бесконечное множество значений $n < 0$, для которых $\vec{c}_n$ не равны нулю, то говорят, что функция $\vec{f}$ имеет в точке a *существенную особенность.* Коэффициент $\vec{c}_{-1}$ называется *вычетом* функции $\vec{f}$ в точке a и обозначается через $\operatorname{Res}_a \vec{f}$.

Функция $\vec{f}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ называется *мероморфной* в открытом множестве Ω пространства $\mathbb{C}$, если существует такое конечное или бесконечное множество изолированных точек $\{a_i\}_{i \in I}$ в Ω, каждая из которых является полюсом для $\vec{f}$, что функция $\vec{f}$ голоморфна в $\Omega - \{a_i\}_{i \in I}$.

Следствие 2. *Если функция $\vec{f}$ голоморфна в кольце $0 < |z-a| < R_2$ и при z, стремящемся к a, норма $\|\vec{f}(z)\|$ имеет порядок меньший, чем $\left|\frac{1}{z-a}\right|$, то a является регулярной точкой функции $\vec{f}$.*

В самом деле, из оценок (VII,4; 8) при ρ, стремящемся к 0, следует, что все коэффициенты $\vec{c}_n$ равны нулю для $n < 0$.

Следствие 3. *Если функция $\vec{f}$ голоморфна для $0 <$ $< |z-a| < R_2$ и при z, стремящемся к a, норма $\|\vec{f}(z)\|$ имеет порядок меньший, чем $\left|\frac{1}{z-a}\right|^{m+1}$, где m — целое число $\geqslant 1$, то точка a является или регулярной точкой, или полюсом порядка $\leqslant m$ функции $\vec{f}$.*

Доказательство то же, что и в предыдущем случае.

Следствие 4. *Для того чтобы голоморфная в $0 < |z-a| < R_2$ функция $\vec{f}$ имела в точке a при целом $m \geqslant 1$ полюс порядка m, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $\vec{c} \neq 0$ (равная коэффициенту $\vec{c}_{-m}$), для которой функция $\vec{f}$ была бы эквивалентной $\vec{c}/(z-a)^m$ при z, стремящемся к a.*

Это следствие означает, что если функция $\vec{f}$ в точке a имеет полюс, то ее разложение Лорана является асимптотическим, подобно разложению Тейлора в регулярной точке a.

Доказательство. Условие достаточно. В самом деле, если оно выполнено, то норма $\left\|\vec{f}(z) - \frac{\vec{c}}{(z-a)^m}\right\|$ при z, стремящемся к a, имеет порядок меньший, чем $\left|\frac{1}{z-a}\right|^m$, и потому, согласно следствию 3, справедливо разложение Лорана с показателями $\geqslant -m+1$, и $\vec{f}$ имеет полюс порядка m с $\vec{c}_{-m} = \vec{c}$.

Обратно, если $\vec{f}$ имеет в точке $\vec{a}$ полюс порядка m, то разность $\vec{f}(z) - \frac{\vec{c}_{-m}}{(z-a)^m}$ представляет собой сумму некоторого полинома относительно $1/(z-a)$ степени $\leqslant m-1$, а, значит, при $z \to a$, имеющего порядок меньший, чем $\left|\frac{1}{z-a}\right|^m$, и некоторой голоморфной функции, остающейся ограниченной при $z \longrightarrow a$. Тем самым указанное условие полностью выполнено.

Случай $R_2 = +\infty$. Предположим теперь, что функция $\vec{f}$ голоморфна для $R_1 < |z-a|$. Эта функция допускает разложение Лорана, справедливое вне окружности и нормально сходящееся во всяком кольце $R_1 < R_1' \leqslant |z-a| \leqslant R_2' < +\infty$.

При этих условиях естественно говорить, что бесконечно удаленная точка является *регулярной точкой* функции $\vec{f}$, если все коэффициенты $\vec{c}_n$ равны нулю для $n > 0$; что бесконечно удаленная точка является *полюсом порядка* m функции $\vec{f}$, если коэффициент $\vec{c}_m$ отличен от нуля, а все коэффициенты $\vec{c}_n$ при $n > m$ равны нулю, и что бесконечно удаленная точка является для $\vec{f}$ *существенно особой точкой*, если существует бесконечное множество коэффициентов $\vec{c}_n$ при $n \geqslant 0$, не равных нулю.

Например, целая, т. е. голоморфная во всей комплексной плоскости функция, если она не есть полином, имеет бесконечно удаленную точку в качестве существенно особой точки.

По причинам, которые будут выяснены позже, коэффициент $-\vec{c}_{-1}$ называется *вычетом функции* $\vec{f}$ *на бесконечности* и обозначается через $\operatorname{Res}_\infty \vec{f}$.

Следствие 5. *Если функция $\vec{f}$ голоморфна для $R_1 < |z-a|$ и если норма $\|\vec{f}(z)\|$ имеет при $|z|$, стремящемся к ∞, порядок меньший, чем $|z|$, то бесконечно удаленная точка является регулярной точкой. Если норма $\|\vec{f}(z)\|$ имеет порядок меньший, чем $|z|^{m+1}$, при целом $m \geqslant 1$, то бесконечно удаленная точка регулярна или является полюсом порядка $\leqslant m$, а если это полюс точно порядка m, то $\vec{f}(z)$ эквивалентна $\vec{c}_m z^m$ при $|z|$, стремящемся к бесконечности.*

Следствие 6. *Для того чтобы точка a была существенно особой для функции $\vec{f}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $M(a, \rho)$ возрастала быстрее любой степени $\frac{1}{\rho}$ при ρ, стремящемся к 0. Для того чтобы бесконечно удаленная точка была существенно особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы функция $M(a, \rho)$ возрастала быстрее любой степени ρ при ρ, стремящемся к бесконечности.*

Поведение функции в окрестности существенно особой точки

Из следствия 6 вытекает, что в окрестности существенно особой точки a функция $\vec{f}$ может возрастать весьма быстро.

Если проэкстраполировать то, что мы знаем о полюсах, то казалось бы естественным ожидать, что при z, стремящемся к существенно особой точке a, норма функции $\vec{f}$ будет равномерно стремиться к бесконечности быстрее любой степени $\left|\frac{1}{z-a}\right|$. Однако *это совсем не так.*

Хотя максимум нормы $M(a, \rho)$ при ρ, стремящемся к 0, очень быстро стремится к бесконечности, норма $\|\vec{f}\|$ в случае $\vec{F} = \mathbb{C}$, как мы сейчас в этом убедимся, при z, стремящемся к a, к бесконечности не стремится.

Теорема 17 (Вейерштрасс). *Пусть f — голоморфная в $0 < |z-a| < R$ комплекснозначная функция, для которой a является существенно особой точкой. Тогда при z, стремящемся к a, значение $f(z)$ можно сделать сколь угодно близким к любому комплексному числу; иначе говоря, образ при отображении f любого круга $0 < |z-a| \leqslant \rho < R_2$ с (выброшенным) центром в точке a плотен в комплексной плоскости.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что это не так. Пусть существует такая точка c, которая не может быть приближена значениями функции f при $0 < |z-a| \leqslant \rho$. Тогда функция $z \to \frac{1}{f(z)-c}$ голоморфна для $0 < |z-a| < \rho$ и, кроме того, ограничена. Согласно следствию 2 теоремы 16, она может быть продолжена до некоторой голоморфной функции в круге $|z-a| < \rho$. Эта функция может обращаться в нуль в точке $z=a$, но она не равна нулю тождественно и, следовательно, имеет точку a в качестве нуля конечного порядка m. Поэтому можно написать:

$$\frac{1}{f(z)-c} = (z-a)^m h(z), \qquad \text{(VII, 4; 9)}$$

где h — голоморфная в $|z-a| < \rho$ функция, не равная нулю в точке a. Функция $|h|$ ограничена снизу некоторым числом $\alpha > 0$ в некоторой окрестности точки a. В этой окрестности

$$|f(z) - c| \leqslant \frac{1}{\alpha |z-a|^m}, \qquad \text{(VII, 4; 10)}$$

а это говорит о том, что точка a для функции f будет или регулярной, или полюсом порядка $\leqslant m$, что противоречит сделанному предположению.

Замечание 1. Мы видим, что поведение функции в окрестности существенно особой точки в корне отличается от поведения ее в окрестности полюса и что существенно особой точке не подходит название полюс бесконечного порядка. (Разложение Лорана не имеет здесь больше ничего общего с асимптотическим разложением, в котором первый член выделяется как главная часть.) Естественно, тот же самый результат имеет место для бесконечно удаленной существенно особой точки. Он применим к каждой целой функции, не сводящейся к полиному.

Рассмотрим, например, целую функцию e^z и убедимся, что в открытом множестве $|z| > \rho$ она произвольно близко подходит к любому комплексному числу. Мы докажем даже большее: она принимает бесконечное множество раз любое значение, кроме 0. В самом деле, уравнение $e^z = b$ имеет бесчисленное множество решений $z = z_0 + 2ki\pi$, где z_0 — одно из значений $\ln b$. Вне рассматриваемого круга имеется бесчисленное множество таких решений.

Если рассмотреть такие целые функции, как $\sin z$ или $\cos z$, то можно увидеть, что вне любого круга они бесконечное число раз принимают все значения без исключения. В самом деле, уравнение $\sin z = b$ имеет при любом b бесконечное множество корней $z = z_0 + 2k\pi$ или $\pi - z_0 + 2k\pi$, где z_0 — одно из значений $\arcsin b$.

Теорема Вейерштрасса говорит лишь о том, что функция произвольно близко подходит к любому значению, но не о том, что она принимает все значения.

Значительно более сильная, но и более трудная *теорема Пикара* утверждает, что *в окрестности существенно особой точки функция f принимает бесконечное множество раз все значения (разумеется, конечные), за исключением, быть может, одного.* Такое исключительное значение существует, например, для экспоненциальной функции.

Замечание 2. Если пространство $\vec{F}$ не есть $\mathbb{C}$, то функция $\vec{f}$ со значениями в $\vec{F}$, имеющая в точке $a \in \mathbb{C}$ существенную особенность, может по норме стремиться к бесконечности при z, стремящемся к a. Рассмотрим, например, $\vec{F} = \mathbb{C}^2$ и функцию $z \to \left(\frac{1}{z-a};\ e^{\frac{1}{z-a}}\right)$. Точка a для нее является существенно особой, поскольку это имеет место для второй составляющей. Однако $\|\vec{f}\|$ при z, стремящемся к a, стремится к бесконечности, поскольку первая составляющая функции стремится к бесконечности.

Теорема 18. *Пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная в Ω: $0 < |z - a| < R_2$. Класс вычетов замкнутой дифференциальной формы $\vec{f}(z)\,dz$ относительно точки a равен произведению $2i\pi$*

на «вычет» функции $\vec{f}$ в точке a, т. е. на коэффициент Лорана $\vec{c}_{-1}$.

Доказательство. Пусть γ — окружность с центром в точке a радиуса $\rho < R_2$, обходимая в положительном направлении. По самому определению (VII, 4; 2) коэффициентов Лорана $\int\limits_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi\vec{c}_{-1}$. Этот интеграл по определению является классом вычетов (теорема 64 гл. VI) для дифференциальной формы класса C^1 в $\complement_\Omega a$.

Теорема 19 (о вычетах). *Пусть $\{a_i\}_{i\in I}$ — замкнутое*[1]) *множество изолированных*[2]) *точек открытого множества Ω пространства $\mathbb{C}$, и пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная в $\Omega - \{a_i\}_{i\in I}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.*

Пусть, далее, $V \subset \Omega$ — подмногообразие с краем класса C^1, снабженное канонической ориентацией $\mathbb{C}$, и его граница Γ не содержит ни одной из точек a_i. Тогда справедлива формула вычетов

$$\int\limits_\Gamma \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a_i \in \mathring{V}} (\operatorname{Res}_{a_i}\vec{f})^{3)}, \qquad \text{(VII, 4; 11)}$$

в которой Γ имеет ориентацию границы многообразия V, а сумма $\sum$ распространена на все точки a_i, содержащиеся в $\mathring{V}$[4]).

---

[1]) Мы выбираем множество точек a_i замкнутым, желая исключить случай последовательности, стремящейся к точке $a \in \Omega$. Можно заметить, что если a_i — особые точки, то точка a также будет особой, но не изолированной особой точкой. Предположение «изолированности» представляется поэтому достаточным для того, чтобы не иметь дела с этим случаем. Однако мы не хотим обязывать точки a_i быть особыми. Предполагая функцию f голоморфной в $\complement_\Omega \{a_i\}_{i\in I}$, мы считаем точки a_i лишь возможными особенностями. Не следует отбрасывать тот случай, когда некоторые из a_i окажутся регулярными. Мы всегда рассматриваем векторные пространства функций. В этих пространствах сумма двух функций, имеющих особенность в точке a, может оказаться регулярной в этой точке (например, $\vec{f} - \vec{f} = \vec{0}$). Вот почему налагается условие «замкнутости».

[2]) Это означает, что каждая точка a_i является центром круга, не содержащего ни одной точки a_j, $j \neq i$.

[3]) Символ i в этой формуле имеет два различных смысла: это индекс $i \in I$, но это и $\sqrt{-1}$ в выражении $2i\pi$.

[4]) Так как точки a_i изолированы в Ω, то их в компакте V конечное число. В противном случае можно было бы из множества этих точек выделить последовательность, сходящуюся к некоторому пределу a, принадлежащему множеству особых точек, но не являющемуся изолированной особой точкой.

Мы докажем даже более общее свойство.

А именно, заметим, что граница Γ имеет индекс $+1$ относительно точек $a_i \in \overset{c}{V}$ и индекс 0 относительно точек $a_i \in \complement V$ (теорема 60 гл. VI). Поэтому

Если Γ является особой C^0-границей Ω конечной длины и если ее образ не содержит ни одной из точек a_i, то имеет место формула

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi \sum_{i \in I} I(a_i, \Gamma)\,\mathrm{Res}_{a_i}\vec{f}, \qquad \text{(VII. 4; 12)}$$

где $I(a_i, \Gamma)$ — индекс Γ относительно a_i.

Эта общая теорема непосредственно следует из теоремы 64 гл. VI и теоремы 18 о классе вычетов $\vec{f}(z)\,dz$ в точке a_i.

Однако, учитывая важность *частного* утверждения, сформулированного в теореме 19, мы дадим доказательство, *совпадающее с доказательством теоремы* 64 *гл.* VI, но приспособленное к нашим частным условиям.

Обозначим через γ_i для $a_i \in \overset{\circ}{V}$ границу круга Δ_i с центром в a_i, целиком лежащего в $\overset{\circ}{V}$. Поскольку точек a_i конечное число, то можно эти круги выбрать так, чтобы Δ_i попарно не пересекались. Тогда цикл $\Gamma - \sum_i \gamma_i$ является границей в $\complement_\Omega \{a_i\}_{i \in I}$, а именно границей множества $\complement_V \left(\bigcup_i \overset{c}{\Delta}_i\right)$. Из теоремы 6 Коши (первая интегральная формула) вытекает, что

$$\int_{\Gamma - \sum_i \gamma_i} \vec{f}(z)\,dz = \vec{0}, \qquad \text{(VII, 4; 13)}$$

или

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz = \sum_i \int_{\gamma_i} \vec{f}(z)\,dz = \sum_{a_i \in \overset{\circ}{V}} 2i\pi\,\mathrm{Res}_{a_i}\vec{f}. \qquad \text{(VII, 4; 14)}$$

Замечание. Вторая основная интегральная формула Коши служит для обоснования всей теории, в частности для получения разложения Лорана, а следовательно, и для вычисления вычетов. Однако она a posteriori является следствием теоремы о вычетах. В самом деле, для голоморфной в Ω функции $\vec{f}$ функция $z \to \vec{f}(z)/(z-a)$ имеет точку a как возможную особенность. Ее вычет в ней равен $\vec{f}(a)$. Действительно, точка a является либо регулярной точкой, либо простым полюсом, и если искать разложение функции $\vec{f}(z)/(z-a)$, используя разложение Тейлора функции $\vec{f}(z)$ по степеням $z-a$: $\vec{f}(z)=\vec{f}(a)+(z-a)\vec{f}'(a)+\ldots$, то коэффициентом при $1/(z-a)$ будет $\vec{f}(a)$. При этом соотношение (VII, 4; 11), примененное к $\vec{f}(z)/(z-a)$, дает (VII, 2; 8) и (VII, 2; 9). Точно так же получаются формулы (VII, 3; 1).

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы и множество Ω, кроме того, односвязно. Для того чтобы функция $\vec{f}$ имела голоморфные первообразные в $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$, необходимо и достаточно, чтобы все ее вычеты были равны нулю*[1]).

Доказательство. Если функция $\vec{f}$ имеет голоморфную первообразную, то она является первообразной замкнутой 1-формы $\vec{f}(z)\,dz$ (см. рассуждение, примененное при доказательстве теоремы 7). Следовательно, она является кограницей, а ее интеграл на каждом цикле из $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$ равен нулю. Выбирая в качестве цикла окружность, содержащую внутри себя единственную точку a_i, мы видим, что все вычеты функции $\vec{f}$ равны нулю. Обратно, покажем, что если последнее верно, то выполнено условие теоремы 45 гл. VI. Пусть $\Gamma=H\,|\,\gamma$ — отображение класса C^1 (в вещественном смысле) тригонометрической окружности γ из $\mathbb{R}^2$ в $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$. Поскольку множество Ω односвязно, отображение H продолжимо до некоторого непрерывного отображения единичного круга Δ из $\mathbb{R}^2$ в Ω (но, конечно, не в множество $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$, не являющееся односвязным: окружность, содержащая точку a_i, не гомотопна нулю!). Так как все вычеты равны нулю, то из общей формулы о вычетах (VII, 4; 12) следует, что интеграл от $\vec{f}(z)\,dz$ по Γ равен нулю, что совпадает с рассматриваемым критерием. Таким образом, $\vec{f}(z)\,dz$ имеет первообразные в $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$, а из рассуждения, проведенного в теореме 7, следует, что это голоморфные первообразные функции $\vec{f}$. Кроме того, если множество Ω связно, а значит, связно и множество $\complement_\Omega\{a_i\}_{i\in I}$, то эти первообразные отличаются только на некоторую постоянную.

Теорема 19 называется также *внутренней теоремой о вычетах*. Справедлива, кроме того, *внешняя теорема о вычетах*, имеющая практические приложения.

---

[1]) Отсюда не следует отсутствие особенностей: вычет равен $\vec{c}_{-1}$, но коэффициенты $\vec{c}_n$, $n\leqslant-2$, могут быть $\neq\vec{0}$.

Если функция $\vec{f}$ голоморфна для $|z-a|>R_1$, то она допускает разложение Лорана. Коэффициент при $1/(z-a)$ с измененным знаком, т. е. $-\vec{c}_{-1}$, мы будем называть *вычетом функции $\vec{f}$ в бесконечности*.

Очевидно, имеет место следующее свойство, аналогичное теореме 18:

Если γ — окружность, расположенная в кольце $|z-a|>R_1$ и обходимая в отрицательном направлении, то справедлива формула

$$\int_\gamma \vec{f}(z)\,dz = -2i\pi\vec{c}_{-1} = 2i\pi \operatorname{Res}_\infty \vec{f}. \qquad \text{(VII, 4; 15)}$$

Отметим еще раз, что обход γ производится в отрицательном направлении. Позже мы увидим причину, вынуждающую нас совершать такое трюкачество.

Замечание. Функция может иметь вычет $\neq 0$ в точке a, находящейся на конечном расстоянии, только в том случае, *когда a — действительно особая точка*, в то время как она может иметь ненулевой вычет в бесконечности даже в том случае, когда бесконечно удаленная точка регулярна. В самом деле, регулярность бесконечно удаленной точки означает, что разложение Лорана содержит только показатели $\leqslant 0$, что не исключает наличия показателя -1. Объяснение этому будет дано на странице 396. Если Γ — произвольный C^0-цикл конечной длины, содержащийся в $|z-a|>R_1$ и обходящий точку a один раз в отрицательном направлении, то интеграл $\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz$ равен вычету $\vec{f}(z)$ в бесконечности.

В самом деле, как мы видели при доказательстве теоремы 19, цикл Γ C^0-гомологичен в $|z-a|>R_1$ любой окружности с центром в точке a, пробегаемой в отрицательном направлении. Это означает, что вычет в бесконечности не зависит от выбора точки a для разложения Лорана, а зависит исключительно от поведения функции $\vec{f}$ в бесконечности. Другими словами, если $b\neq a$, то функция $\vec{f}$ также голоморфна и для $|z-b|>R_1+{}$ $+|a-b|$. Коэффициент при $1/(z-b)$ в разложении Лорана относительно точки b тот же, что и коэффициент при $1/(z-a)$ в разложении относительно a. *Внешняя теорема о вычетах* теперь может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 19_2. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}$, дополнительное к некоторому компакту. Пусть $\{a_i\}_{i\in I}$ — замкнутое* *ограниченное множество изолированных точек в Ω, и пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная в $\Omega - \{a_i\}_{i \in I}$, со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$.*

Пусть W — многообразие класса C^1 с краем, содержащееся в $\mathbb{C}$, снабженное ориентацией $\mathbb{C}$ и такое, что $V = \complement \mathring{W}$ лежит в Ω и граница Γ многообразия W не содержит ни одной из точек a_i. Придадим Γ ориентацию границы множества $V = \complement \mathring{W}$, т. е. ориентацию, противоположную ориентации границы W, иначе говоря, отрицательную ориентацию.

Тогда имеет место формула

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi \left(\sum_{a_i \in \mathring{V}} \operatorname{Res}_{a_i} \vec{f} + \operatorname{Res}_\infty \vec{f} \right)^{1)}. \qquad \text{(VII, 4; 16)}$$

Следует подчеркнуть, что в этой формулировке фигурирует множество V, а компактность требуется от множества W. Само же множество V некомпактно, а значит, цикл Γ не является границей в Ω в рассматривавшемся ранее смысле! Во всей плоскости $\mathbb{C}$ кривая Γ есть граница W, поскольку в $\mathbb{C}$ любой цикл является некоторой границей (следствие 3 теоремы 54 гл. VI).

Доказательство. В самом деле, обозначим через $\mathring{\Delta}$ произвольный открытый круг, достаточно большой для того, чтобы содержать $\complement\Omega$, все точки a_i (образующие по предположению ограниченное множество) и множество Γ. Тогда можно применить внутреннюю теорему 19 о вычетах относительно цикла $b\Delta + \Gamma$ (круг Δ ориентирован как $\mathbb{C}$, $b\Delta$ — как граница, т. е. в положительном направлении, Γ — как граница множества $\complement \mathring{V}$, т. е. в отрицательном направлении), который является границей $\Delta \cap \complement \mathring{V}$. Получится формула

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz + \int_{b\Delta} \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a_i \in \complement V} \operatorname{Res}_{a_i} \vec{f}. \qquad \text{(VII, 4; 17)}$$

Эту формулу можно также записать в виде

$$\int_\Gamma \vec{f}(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a_i \in \complement V} \operatorname{Res}_{a_i} \vec{f} - \int_{b\Delta} \vec{f}(z)\,dz, \qquad \text{(VII, 4; 18)}$$

---

[1]) В этой формуле Res_{a_i} вычисляются, как всегда, с помощью интегралов по окружностям, пробегаемым в положительном направлении, в то время как $\operatorname{Res}_\infty$ вычисляется с помощью интеграла по окружности, пробегаемой в отрицательном направлении.

и тогда теорема будет доказана, если учесть тот факт, что последний интеграл равен вычету в бесконечности, умноженному на $2i\pi$.

Следствие. *Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — конечное множество точек $\mathbb{C}$. Пусть $\vec{f}$ — голоморфная на $\mathbb{C} \complement \{a_i\}_{i \in I}$ функция со значениями в $\vec{F}$. Тогда сумма всех вычетов функции $\vec{f}$ в точках a_i и в бесконечно удаленной точке равна нулю.*

Доказательство. Пусть V — подмногообразие с краем из $\mathbb{C}$, граница которого не содержит ни одной из точек a_i. Интеграл от $\vec{f}(z)\,dz$ по этой границе, ориентированной как граница V, равен сумме вычетов точек $a_i \in \overset{\circ}{V}$, умноженной на $2i\pi$. Интеграл по этой же границе, ориентированной как граница множества $\complement\overset{\circ}{V}$, т. е. в обратном направлении, равен сумме вычетов в точках $a_i \in \complement V$ и в точке ∞, умноженной на $2i\pi$. Отсюда и вытекает требуемое утверждение. Выбор V произволен. Можно было бы взять V пустым, и тогда мы получили бы, что левая часть формулы (VII, 4; 16) равна $\vec{0}$, поскольку интеграл от 1-формы на 1-цикле равен нулю. Можно было бы, напротив, взять множество V настолько большим, чтобы оно содержало все a_i. Интеграл по его границе, пробегаемой в положительном направлении, дает сумму вычетов в a_i, умноженную на $2i\pi$, в то время как интеграл, вычисляемый в противоположном направлении, дает вычет в бесконечности, поскольку функция $\vec{f}$ при этом голоморфна в $\complement V$.

Пример. Пусть $\vec{f}$ — рациональная функция, т. е. функция вида $\frac{\vec{P}}{Q}$, где $\vec{P}$ — полином с коэффициентами в $\vec{F}$, а Q — полином с комплексными коэффициентами. Вычеты относительно различных полюсов a_i получаются при разложении на простые дроби. Из такого разложения непосредственно видно, что сумма вычетов равна коэффициенту при $1/z$ в разложении (Лорана) по степеням z в бесконечности. По самому определению этот коэффициент противоположен вычету в бесконечности (см. стр. 384). Это прямое рассуждение (не использующее теории функций комплексных переменных) будет обобщено позже (стр. 392) и даст другое доказательство предыдущего следствия.

Сохранение вычетов дифференциальных форм при C^1-диффеоморфизме

Пусть $\vec{f}_1$ — голоморфная функция в $\complement_{\Omega_1}\{a_1\}$, где Ω_1 — открытое множество, содержащее a_1.

Пусть H есть C^1-диффеоморфизм (относительно комплексного поля) множества Ω_1 на открытое множество Ω_2 комплексной плоскости: $z_1 \to z_2 = H(z_1)$. Пусть $H(a_1) = a_2$. Тогда образ $H(\vec{f}_1)$ или $(H^{-1})^* \vec{f}_1$ является функцией $\vec{f}_2 = \vec{f}_1 \circ H^{-1}$: $z_2 \to \vec{f}_1(H^{-1}(z_2))$, в то время как образ $H[\vec{f}_1(z_1)\,dz_1]$ представляет собой дифференциальную форму

$$\vec{g}_2(z_2)\,dz_2 = \vec{f}_2(z_2)\frac{dz_1}{dz_2}\,dz_2, \text{ где } \frac{dz_1}{dz_2} = (H^{-1})'(z_2).$$

Функции $\vec{f}_2$ и $\vec{g}_2$ совершенно различны. Обе они голоморфны в $\complement_{\Omega_2}\{a_2\}$, но имеют различные вычеты в точке a_2.

Теорема 20. *Вычет функции $\vec{f}_1$ в точке a_1 равен вычету функции $\vec{g}_2$ в точке a_2.*

Естественно сказать, что *вычет дифференциальной формы $\vec{f}_1(z_1)\,dz_1$ в точке a_1 равен вычету дифференциальной формы-образа $\vec{g}_2(z_2)\,dz_2$ в точке a_2.*

Доказательство. Пусть V_1 — подмногообразие с границей в Ω_1 класса C^1, снабженное канонической ориентацией плоскости $\mathbb{C}$ и такое, что $a_1 \in \mathring{V}$.

Кривая $\Gamma_1 = bV_1$ обходит один раз точку a_1 в положительном направлении и, согласно определению вычета функции $\vec{f}_1$, имеем

$$\int_{\Gamma} \vec{f}_1(z_1)\,dz_1 = 2i\pi \operatorname{Res}_{a_1}\vec{f}_1. \qquad \text{(VII, 4; 19)}$$

Множество $H(V_1) = V_2$ есть некоторое подмногообразие с краем класса C^1 в множестве Ω_2.

С другой стороны, в силу формулы (VI, 2; 7) якобиан отображения H необходимо > 0, т. е. отображение H сохраняет ориентацию. Ориентация множества $H(V_1)$, индуцированная ориентацией V_1 с помощью отображения H, является ориентацией V_2, определенной ориентацией плоскости $\mathbb{C}$. Отсюда следует, что кривая $H(\Gamma_1) = \Gamma_2$ обходит один раз точку a_2 в положительном направлении. Отсюда следует также, что

$$\int_{\Gamma_2} \vec{g}_2(z_2)\,dz_2 = 2i\pi \operatorname{Res}_{a_2}\vec{g}_2. \qquad \text{(VII, 4; 20)}$$

Левые части соотношений (VII, 4; 19) и (VII; 4; 20), согласно теореме 34 гл. VI, выражающей инвариантность интеграла от дифференциальной формы при диффеоморфизме, равны, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Эта теорема остается верной, если рассматривать вычет в бесконечности. Рассмотрим, например, отображение H: $z_1 \to z_2 = \frac{1}{z_1}$ круга $|z_1| < 1$ в область $|z_2| > 1$. Это отображение преобразует множество V_1, определенное неравенством $|z_1| < \rho$, в множество $V_2 = H(V_1)$, определенное неравенством $|z_2| > \frac{1}{\rho}$. Как мы видели ранее, оно также сохраняет ориентацию. Далее, это отображение преобразует границу множества V_1, т. е. окружность γ_1 с центром в 0 радиуса ρ, пробегаемую в прямом направлении, в границу множества V_2, т. е. *в окружность γ_2 с центром в 0 радиуса $\frac{1}{\rho}$, пробегаемую в противоположном направлении.* Впрочем, это видно и непосредственно!

Пользуясь только что упоминавшейся теоремой об инвариантности из гл. VI, получаем равенство

$$\int_{\gamma_1} \vec{f}_1(z_1)\,dz_1 = \int_{\gamma_2} \vec{g}_2(z_2)\,dz_2. \qquad \text{(VII, 4; 21)}$$

Этим доказано, что *вычет функции $\vec{f}_1$ в начале координат равен вычету функции $\vec{g}_2$ в бесконечности — именно потому, что вычет в бесконечности определялся с использованием окружностей, пробегаемых в отрицательном направлении.*

Замечание. Коэффициент $\vec{c}_{-1}$ разложения функции $\vec{f}$ в окрестности точки a мы назвали сначала вычетом функции $\vec{f}$, а затем, позже, вычетом дифференциальной формы $\vec{f}(z)\,dz$. *Настоящая теорема показывает, что здесь допускается вольность речи, опасная при замене переменной, поскольку в действительности при замене переменной сохраняется только вычет дифференциальной формы.* Только он имеет реальный смысл, как это уже было видно в теоремах о вычетах 18 и 19.

Это не должно нас удивлять. На стр. 313 мы определили класс вычетов в точке для некоторой дифференциальной формы *степени* $N-1$ в N-мерном аффинном пространстве над вещественным полем. Поскольку $\mathbb{C}$ — двумерное пространство над вещественным полем, то можно говорить только о вычетах дифференциальной формы 1-й степени, а не о вычетах функции. Биективное соответствие $\vec{f} \to \vec{f}\,dz$ между голоморфными функциями и голоморфными 1-формами может натолкнуть на ошибочные идеи.

Поверхности Римана, сфера Римана, вычеты дифференциальных форм с изолированной особенностью

Предыдущие результаты еще лучше интерпретируются в терминах голоморфных многообразий. Голоморфное многообразие W комплексной размерности 1 называется *поверхностью Римана* (поверхностью, поскольку ее вещественная размерность равна 2). Голоморфные функции на такой поверхности были нами определены как функции класса C^1 (а следовательно, C^∞) относительно $\mathbb{C}$. Функция $\vec{f}$ на W со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ голоморфна тогда и только тогда, когда для каждой локальной карты Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O}) \subset V$, где $\mathcal{O}$ — открытое множество в $\mathbb{C}$, сложная функция $\Phi^*\vec{f} = \vec{f} \circ \Phi$ голоморфна на $\mathcal{O}$.

Если открытое множество $\mathscr{V}$ из V является областью некоторой карты Φ_1: $\mathcal{O}_1 \to \Phi_1(\mathcal{O}_1) = \mathscr{V}$ и если функция $\vec{f}$ на $\mathscr{V}$ такова, что $\vec{f} \circ \Phi_1$ голоморфна на $\mathcal{O}_1$, то это же будет справедливо для любой другой локальной карты Φ_2: $\mathcal{O}_2 \to \Phi_2(\mathcal{O}_2) = \mathscr{V}$ области $\mathscr{V}$ (теорема 33_3 гл. III), и потому $\vec{f}$ голоморфна на $\mathscr{V}$.

Пусть теперь $\vec{\omega}$ — дифференциальная форма 1-й степени на W со значениями в $\vec{F}$. Пусть Φ: $\mathcal{O} \to \Phi(\mathcal{O})$ — локальная карта и $\Phi^*\vec{\omega}$ — прообраз $\vec{\omega}$ при отображении Φ. Это некоторая 1-форма на $\mathcal{O}$, т. е. форма, имеющая вид $\vec{A}\,dx + \vec{B}\,dy$, где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ — функции на $\mathcal{O}$. Но тогда ее можно записать в виде $\vec{C}\,dz + \vec{D}\,d\bar{z}$, где $\vec{C} = \dfrac{\vec{A} - i\vec{B}}{2}$ и $\vec{D} = \dfrac{\vec{A} + i\vec{B}}{2}$, и обратно. Говорят, что форма $\vec{\omega}$ *голоморфна на* W, если для любой карты Φ прообраз $\Phi^*\vec{\omega}$ имеет вид $\vec{C}(z)\,dz$, где функция $\vec{C}$ голоморфна на $\mathcal{O}$ (это означает, что функция $\vec{C}$ голоморфна, а функция $\vec{D}$ равна нулю). Если $\vec{\omega}$ является 1-формой на $\mathscr{V}$ — области определения карты Φ_1 — и если $\Phi_1^*\vec{\omega}$ имеет вид $\vec{C}_1\,dz_1$ с голоморфной функцией $\vec{C}_1$, то для любой другой карты Φ_2 того же открытого множества $\mathscr{V}$ $\Phi_2^*\vec{\omega}$ имеет вид $\vec{C}_2\,dz_2$, где функция $\vec{C}_2$ голоморфна в $\mathcal{O}_2$ и, следовательно, $\vec{\omega}$ есть 1-форма, голоморфная на $\mathscr{V}$. В самом деле, $\Phi_2^{-1}\Phi_1$ является диффеоморфизмом (относительно поля $\mathbb{C}$) множества $\mathcal{O}_1$ на множество $\mathcal{O}_2$ и $\Phi_2^*\vec{\omega}$

является преобразованием формы $\Phi_1^*\vec{\omega}$ при отображении $\Phi_2^{-1}\Phi_1$. Остается применить вычисления, проводившиеся на стр. 152.

Если $\vec{f}$ — голоморфная функция, то ее кограница $d\vec{f}$ является голоморфной 1-формой. Действительно, если на каждой локальной карте положить $\vec{g} = \Phi^*\vec{f}$, то мы получим $d\vec{g} = \vec{g}'(z)\,dz$. Поскольку рассматриваются локальные карты, то каждая голоморфная 1-форма замкнута. Следовательно, имеет место следующая модификация первой основной интегральной формулы Коши (это непосредственное применение теоремы Стокса из гл. VI):

Теорема 22a. *Интеграл от голоморфной 1-формы на каждой C^1-границе равен нулю.*

Ничего аналогичного для голоморфных функций нет. Пользуясь теоремой 19 гл. VI, можно обобщить теорему 7:

Теорема 22b. *Если многообразие W односвязно, то каждая голоморфная 1-форма $\vec{\omega}$ на W со значениями в $\vec{F}$ имеет первообразные, т. е. такие голоморфные функции $\vec{f}$, что $d\vec{f} = \vec{\omega}$. Если многообразие W связно, то любые две из этих первообразных отличаются друг от друга на постоянную.*

Непосредственного обобщения второй интегральной формулы Коши и теоремы о среднем не существует. Напротив, эти формулы можно рассматривать как частные случаи теоремы 19 о вычетах (см. следующее за ней замечание), которая сама обобщается следующим образом.

Пусть сначала $\vec{f}$ — функция, голоморфная в $\mathbf{C}_{\mathscr{V}}\{a\}$, где $\mathscr{V}$ — некоторая открытая окрестность точки a на W, т. е. $\vec{f}$ — функция, имеющая точку a в качестве возможной изолированной особой точки. Если $\Phi(\alpha) = a$, то на карте образ $\vec{g} = \Phi^*\vec{f}$ функции $\vec{f}$ имеет разложение Лорана в точке α. Коэффициенты Лорана полностью зависят от выбранной карты и не имеют никакого самостоятельного смысла. Однако непосредственно видно, что если точка a является регулярной точкой для $\vec{g}$ на некоторой карте, то то же самое будет и для всякой другой карты, и поэтому номер первого отличного от нуля коэффициента Тейлора, т. е. порядок нуля функции $\vec{g}$ в точке α, не зависит от карты. Его называют *порядком нуля* функции $\vec{f}$ в точке a. Если α является полюсом порядка m функции $\vec{g}$, то это верно и для любой другой карты и в этом случае говорят, что функция $\vec{f}$ имеет в точке a *полюс порядка* m. То же самое будет и для существенно особой точки. Можно, наконец, точно так же действовать с 1-формой $\vec{\omega}$ на $\mathscr{V}$, голоморфной на $\complement_{\mathscr{V}}\{a\}$. На некоторой карте она запишется в виде $\vec{C}(z)\,dz$, и если функция $\vec{C}$ регулярна и имеет нуль порядка k или если функция $\vec{C}$ имеет полюс порядка m или существенно особую точку, то это же будет выполняться для каждой карты и в этом случае говорят, что форма $\vec{\omega}$ обладает рассматриваемым свойством в точке a на W.

Не существует понятия вычета функции на W, имеющей изолированную особую точку. Пусть, однако, $\vec{\omega}$ — 1-форма, голоморфная в $\complement_{\mathscr{V}}a$, где $\mathscr{V}$ — окрестность точки a, т. е. область некоторой локальной карты. Точка a является (возможной) изолированной особой точкой для формы $\vec{\omega}$. В произвольной карте $\mathscr{V}$, Φ: $\mathscr{O}\to\mathscr{V}$, $\Phi(\alpha)=a$, форма $\vec{\omega}$ записывается в виде $\vec{C}\,dz$, и, как показывает теорема 20, коэффициент $\vec{c}_{-1}$ разложения Лорана функции $\vec{C}$ в изолированной особой точке α не зависит от выбранной локальной карты. Его называют *вычетом* формы $\vec{\omega}$ в особой точке a. Имеется и интегральная интерпретация: если V — подмногообразие размерности 2 с границей класса C^1 множества $\mathscr{V}$ (рассматриваемого как многообразие размерности 2 над $\mathbb{R}$), такое, что $a\in\mathring{V}$, и если V имеет ориентацию, определенную множеством $\mathscr{V}$, а его граница Γ имеет ориентацию границы, то $\int\limits_{\Gamma}\vec{\omega}$ равен вычету $\vec{\omega}$ в точке a, умноженному на $2i\pi$.

Таким образом, справедлива

Теорема 22с. *Пусть W — поверхность Римана; $\{a_i\}_{i\in I}$ — замкнутое множество изолированных точек W; $\vec{\omega}$ — голоморфная 1-форма в $\complement_W\{a_i\}_{i\in I}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$; V — подмногообразие с краем класса C^1 в W вещественной размерности 2*[1]*, снабженное ориентацией, определяемой поверхностью W; Γ — его граница, снабженная ориентацией границы и не содержащая ни одной из точек a_i. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma}\vec{\omega}=2i\pi\sum_{a_i\in\mathring{V}}\operatorname{Res}_{a_i}\vec{\omega}. \qquad \text{(VII, 4; 22)}$$

[1]) Как всегда, подмногообразие V компактно.

Можно было бы попытаться обобщить формулу (VII, 4; 12). Однако *понятие индекса в гл.* VI *определялось, и оно может быть определено только для открытых множеств конечномерных векторных пространств, а не для общих многообразий.* Это понятие существенно опирается на тот факт, что в векторных пространствах конечной вещественной размерности N группа гомологий области, дополнительной к точке, в случае размерности $N-1$ изоморфна множеству $\mathbb{Z}$ — факт, никоим образом не сохраняющийся для общих многообразий. Однако существует обобщение, использующее понятие *топологической степени*, которое мы здесь рассматривать не будем. Доказательство этой теоремы о вычетах на поверхности Римана совершенно аналогично доказательству теоремы 19. Из теоремы 22c и критерия, приведенного в теореме 45 гл. VI, теми же самыми рассуждениями, что и в следствии теоремы 19, получается

Теорема 22d. *Если в условиях теоремы* 22c *поверхность W односвязна, то* 1-*форма* $\vec{\omega}$ *тогда и только тогда имеет в* $\mathsf{C}_W\{a_i\}_{i\in I}$ *голоморфные первообразные, т. е. такие голоморфные функции* $\vec{f}$, *что* $d\vec{f}=\vec{\omega}$, *когда ее вычеты во всех точках* a_i *равны нулю.*

Здесь уже нет внутренней и внешней теорем о вычетах, имеется лишь теорема, указанная выше. Если предполагать поверхность W компактной, а следовательно, абстрактным многообразием (см. замечание после следствия 7 теоремы 12), то не только множество V, но также и множество $\mathsf{C}\mathring{V}$ будет подмногообразием с краем, и к нему можно будет применить ту же теорему. Однако Γ как граница $\mathsf{C}\mathring{V}$ имеет ориентацию, противоположную ориентации границы V. В этой новой ориентации интеграл от $\vec{\omega}$ дает $\sum\limits_{a_i\in \mathsf{C}V} \mathrm{Res}_{a_i}\vec{\omega}$. Здесь мы имеем не две различные теоремы, именовавшиеся ранее внутренней и внешней, а два применения одной и той же теоремы к V и $\mathsf{C}\mathring{V}$ соответственно! Их комбинация, естественно, дает обобщение следствия теоремы 19_2.

Теорема 22e. *Если множество W компактно, а* $\vec{\omega}$ *является голоморфной* 1-*формой всюду, кроме конечного числа особых точек, то сумма ее вычетов равна нулю.*

Эта теорема получается непосредственным применением теоремы о вычетах к множеству $V=W$ с пустой границей. Можно было бы попытаться обобщить теорему 19_2, но для многообразий нет хорошего понятия вычета в бесконечности.

Напротив, сама *теорема* 19_2 *является* (*в завуалированном виде*) *простым и прямым следствием единой общей теоремы о вычетах*. Для того чтобы это увидеть, следует ввести понятие сферы Римана.

Сферой Римана называется множество, образованное из поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ и «бесконечно удаленной» точки, обозначаемой через ∞. Сферу Римана обозначают через $\hat{\mathbb{C}}$. Это уже не поле; лишь его подмножество $\mathbb{C}$ является полем. Однако для каждой точки $a \in \mathbb{C}$ отображение $z \to \frac{1}{z-a}$, определенное обычным образом в $\complement_{\mathbb{C}}\{a\}$, может быть продолжено до некоторой биекции множества $\hat{\mathbb{C}}$ на себя, если положить $\frac{1}{0} = \infty$ и $\frac{1}{\infty} = 0$. Эта биекция отображает точку a в ∞ и ∞ в точку 0. Снабдим теперь сферу $\hat{\mathbb{C}}$ топологией (точно так же, как это делалось для пополненной прямой на стр. 60 гл. I). Множество $\mathcal{O}$, не содержащее точки ∞, назовем *открытым в* $\hat{\mathbb{C}}$, если оно открыто в $\mathbb{C}$. Если же множество $\mathcal{O}$ содержит точку ∞, то оно считается открытым в $\hat{\mathbb{C}}$, если его дополнение есть компакт в $\mathbb{C}$.

Непосредственно видно, что так определенные открытые множества удовлетворяют аксиомам открытых множеств некоторой топологии. Это утверждение останется верным, если заменить $\mathbb{C}$ на произвольное топологическое пространство X.

Справедлива также аксиома отделимости Хаусдорфа: если a и b — две различные точки, лежащие в $\mathbb{C}$, то существуют непересекающиеся окрестности каждой из них. Если одна из них, например a, лежит в $\mathbb{C}$, а другая есть ∞, то в качестве непересекающихся окрестностей можно взять компактную окрестность точки a в $\mathbb{C}$ и дополнение a в $\hat{\mathbb{C}}$, являющееся (открытой) окрестностью точки ∞. Это справедливо не только для $\mathbb{C}$, но и *для любого локально компактного пространства* X.

В пространстве $\hat{X}$, полученном добавлением бесконечной точки к X, фундаментальную систему окрестностей точки ∞ образуют дополнения к компактам пространства X. Пространство $\hat{X}$ всегда *компактно* и называется *компактификацией по Александрову* пространства X. В самом деле, если $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ представляет собой покрытие $\hat{X}$ открытыми множествами, то одно из множеств $\mathcal{O}_i$ содержит точку ∞, а его дополнение является некоторым компактом K в X, и достаточно конечного числа множеств $\mathcal{O}_i$, чтобы покрыть K, а тем самым существует конечное подпокрытие всего $\hat{X}$.

Последовательности из $\hat{\mathbb{C}}$, сходящиеся к точкам из $\mathbb{C}$, — это просто обычные последовательности (лишь конечное число их элементов может равняться ∞). Последовательность $z_n \in \hat{\mathbb{C}}$ сходится к ∞, если $|z_n|$ (мы считаем $|\infty| = +\infty$) стремится к $+\infty$ на $\overline{\mathbb{R}}$. Наконец, биекция $z \to \frac{1}{z-a}$, очевидно, является гомеоморфизмом пространства $\hat{\mathbb{C}}$ на себя.

Введем теперь на сфере $\hat{\mathbb{C}}$ структуру поверхности Римана, или голоморфного многообразия комплексной размерности 1. Первой картой будет тождественное отображение Φ: $z \to z$, отображающее $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ на $\mathbb{C} \subset \hat{\mathbb{C}}$. Другой картой будет отображение Ψ_a: $z \to \frac{1}{z-a}$ из $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ на $\complement_{\mathbb{C}}\{0\} \subset \hat{\mathbb{C}}$. Для того чтобы убедиться, что мы определили голоморфную структуру на $\hat{\mathbb{C}}$, нам следует, согласно сказанному на стр. 335 гл. III, проверить, что гомеоморфизмы $\Phi^{-1} \circ \Psi_a$, $\Psi_a^{-1} \circ \Phi$, $\Psi_b^{-1} \circ \Psi_a$ голоморфны. Здесь $\Phi^{-1} \circ \Psi_a$ является отображением $z \to \frac{1}{z-a}$ множества $\complement_{\mathbb{C}}\{a\}$ на $\complement_{\mathbb{C}}\{0\}$, $\Psi_a^{-1} \circ \Phi$ — отображение $z \to a + \frac{1}{z}$ множества $\complement_{\mathbb{C}}\{0\}$ на $\complement_{\mathbb{C}}\{a\}$, $\Psi_b^{-1} \circ \Psi_a$ — отображение $z \to z + b - a$ множества $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$. Все отображения голоморфны.

Теорема 23. *Сфера Римана $\hat{\mathbb{C}}$ является поверхностью Римана, или голоморфным компактным многообразием комплексной размерности* 1. *Стереографическая проекция H устанавливает C^∞-диффеоморфизм относительно поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ между $\hat{\mathbb{C}}$ и единичной сферой в $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. О том, что такое стереографическая проекция, мы уже говорили. Рассмотрим единичную сферу Σ в $\mathbb{R}^3$, определяемую уравнением $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, и обозначим два ее полюса через $N(0, 0, 1)$ и $S(0, 0, -1)$. Стереографической проекцией P_N из полюса N является отображение H сферы Σ на $\hat{\mathbb{C}}$, определяемое следующими формулами (u, v, w — координаты в $\mathbb{R}^3$; x, y — в $\mathbb{R}^2$):

$$x = \frac{u}{1-w}, \qquad u = \frac{2x}{x^2+y^2+1},$$
$$y = \frac{v}{1-w}, \qquad v = \frac{2y}{x^2+y^2+1}, \qquad \text{(VII, 4; 23)}$$
$$w = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}.$$

Легко проверяется, что это гомеоморфизм Σ на $\hat{\mathbb{C}}$ [1]). Нам нужно показать, что это отображение есть C^∞-диффеоморфизм (относительно поля $\mathbb{R}$). Для этого нам следует воспользоваться критерием, указанным на стр. 336 гл. III. Возьмем две карты Φ и $\Psi = \Psi_0$: $z \to 1/z$ для множества $\hat{\mathbb{C}}$ и две $\Phi_N = P_N^{-1}$ и $\Phi_S = P_S^{-1}$ для множества Σ. Этих карт достаточно, поскольку в каждом случае эти две карты покрывают все многообразие и карты одного многообразия содержат области, в точности соответствующие областям карт другого многообразия; это соответствие дается отображением H. Остается показать, что отображения $\Phi_N \circ H \circ \Phi^{-1}$ и $\Phi_S \circ H \circ \Psi^{-1}$ являются отображениями $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$ класса C^∞. Первое из них — это тождество $P_N^{-1} \circ P_N \circ I = I$, второе же есть отображение $P_S^{-1} \circ P_N \circ \Psi$. Однако отображение $P_S^{-1} \circ P_N$ представляет собой инверсию относительно тригонометрической окружности, а Ψ является симметрией относительно оси $0x$ с последующей инверсией, так что окончательно отображение $P_S^{-1} \circ P_N \circ \Psi$ есть симметрия. Оба эти преобразования, очевидно, являются отображениями $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$ класса C^∞.

Замечание. Напротив, стереографическая проекция не есть диффеоморфизм относительно поля $\mathbb{C}$, поскольку $\mathbb{R}^3$ не является комплексным векторным пространством, а следовательно, Σ не имеет комплексной структуры. Впрочем, пространство $\hat{\mathbb{C}}$, будучи компактным, «абстрактно» и потому не может быть погружено в векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ (замечание к следствию 7 теоремы 12). Однако с помощью стереографической проекции можно перенести комплексную структуру $\hat{\mathbb{C}}$ на Σ и превратить таким образом Σ в голоморфное многообразие (но не в качестве подмногообразия $\mathbb{R}^3$, не являющегося комплексным).

---

[1]) То, что точка (u, v, w) непрерывно зависит от (x, y) и стремится к $(0, 0, 1)$ при (x, y), стремящемся к бесконечности в $\hat{\mathbb{C}}$, очевидным образом следует из этих формул. Ясно также и обратное: отображение $(u, v, w) \to (x, y)$ непрерывно всюду, кроме, быть может, точек, где $w = 1$. С первого взгляда не видно, будет ли точка (x, y) стремиться к бесконечности в $\hat{\mathbb{C}}$, когда точка (u, v, w) стремится к $(0, 0, 1)$ [не следует забывать, что u, v, w не независимы $(u^2 + v^2 + w^2 = 1)$, а следовательно, возможны другие формулы для того же отображения $\Sigma \to \hat{\mathbb{C}}$]. Однако касательная плоскость к Σ в точке N горизонтальна. Следовательно, $1 - w$ является бесконечно малой 2-го порядка относительно (u, v) (формула Тейлора), что и делает нужный результат геометрически очевидным. Во всяком случае, поскольку $\hat{\mathbb{C}}$ — компакт и отображение $\hat{\mathbb{C}} \to \Sigma$ непрерывно и биективно, то это гомеоморфизм!

Теперь мы можем интерпретировать понятие вычета в бесконечности, рассмотренное на стр. 378, в терминах вычетов на поверхности Римана $\hat{\mathbb{C}}$ в точке ∞. Пусть $\hat{\mathscr{V}}$ — открытая окрестность точки ∞ в $\hat{\mathbb{C}}$, т. е. дополнение некоторого компакта в $\mathbb{C}$. Положим $\mathscr{V} = \mathrm{C}_{\hat{\mathscr{V}}}\{\infty\} = \hat{\mathscr{V}} \cap \mathbb{C}$. Пусть $\vec{f}$ — функция, голоморфная на $\mathscr{V}$, а следовательно, имеющая на $\hat{\mathscr{V}}$ точку ∞ в качестве возможной изолированной точки.

Согласно сказанному выше, выяснить, будет ли точка ∞ регулярной для $\vec{f}$, или же полюсом порядка m, или же существенно особой точкой, можно с помощью некоторой карты окрестности бесконечно удаленной точки, например $z \to 1/z$. Затем следует рассмотреть поведение преобразованной функции $\vec{g}\colon z \to \vec{f}(1/z)$ в точке 0.

Коэффициенты Лорана функции $\vec{g}$ в точке 0 связаны с коэффициентами Лорана функции $\vec{f}$ в бесконечности соотношениями $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{c}_{-n}(\vec{g})$. Следовательно, точка ∞ будет регулярной точкой функции $\vec{f}$ тогда и только тогда, когда $\vec{c}_k(\vec{g}) = \vec{0}$ для $k \leqslant -1$, т. е. $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ для $n \geqslant 1$, и регулярной точкой или полюсом порядка $\leqslant m$, если $\vec{c}_k(\vec{g}) = \vec{0}$ для $k \leqslant -m-1$, т. е. при $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ для $n \geqslant m+1$. Это как раз то, о чем мы говорили на стр. 384.

Совсем иначе обстоит дело для 1-формы $\vec{\omega}$, голоморфной в $\mathscr{V}$. Здесь $\vec{\omega} = \vec{f}(z)\,dz$ под действием карты $z \to \frac{1}{z}$ переходит в форму $\vec{C}(z)\,dz = -\vec{f}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z^2}$, которую следует изучать в окрестности точки 0. Коэффициенты Лорана функции $\vec{f}$ в бесконечности и функции $\vec{C}$ в начале координат связаны на этот раз соотношениями $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{c}_{-(n+2)}(\vec{C})$. Следовательно, по определению форма $\vec{\omega}$ будет регулярной в точке ∞ сферы Римана $\hat{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда функция $\vec{C}$ будет регулярной в точке 0, т. е. при $\vec{c}_k(\vec{C}) = \vec{0}$ для $k \leqslant -1$, или $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ для $n \geqslant -1$. Точно так же точка ∞ из $\hat{\mathbb{C}}$ будет регулярной или полюсом порядка $\leqslant m$ для формы $\vec{\omega}$, если $\vec{c}_k(\vec{C}) = \vec{0}$ для $k \leqslant -m-1$, т. е. $\vec{c}_n(\vec{f}) = \vec{0}$ для $n \geqslant m-1$.

Таким образом, *в точке ∞ форма dz имеет полюс 2-го порядка, форма dz/z имеет там полюс 1-го порядка, а форма $z^k\,dz$*

при $k \geqslant -1$ — *полюс порядка* $k+2$. Как это видно из карты, если функция $\vec{f}$ имеет в точке a поверхности Римана W полюс порядка m, то ее дифференциал имеет там полюс порядка $m+1$ $\left[\vec{g} = \frac{\vec{c}_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots \text{ дает } d\vec{g} = \vec{g}'(z)\,dz = dz\left(-\frac{m\vec{c}_{-m}}{(z-a)^{m+1}} + \ldots\right)\right]$. *Функция* $z \to z$ *имеет в бесконечности полюс 1-го порядка, а следовательно, ее дифференциал — полюс 2-го порядка.*

Отождествление $\vec{f}$ и $\vec{f}\,dz$ в $\mathbb{C}$ приводит в $\widehat{\mathbb{C}}$ к грубым ошибкам, *поскольку* dz *имеет в бесконечности полюс.* Тщательное различение функций и 1-форм помогает избежать многих ошибок. Однако на самой плоскости $\mathbb{C}$ в этом нет необходимости, и в теории функций комплексных переменных предпочитают проводить рассуждения в $\mathbb{C}$, например пользуясь второй основной интегральной формулой, не обобщающейся на многообразия.

Если теперь мы будем искать вычет формы $\vec{\omega}$ в точке ∞, то, согласно определению (стр. 391), получим коэффициент $\vec{c}_{-1}(\vec{C})$, т. е. $-\vec{c}_{-1}(\vec{f})$, а это совпадает с определением, данным на стр. 378. Форма dz/z имеет полюс 1-го порядка, поэтому не удивительно, что ее вычет равен -1. Вычет имеет следующую интегральную интерпретацию. По определению $\mathrm{Res}_\infty \vec{\omega}$ равен $\mathrm{Res}_0(\vec{C}(z)\,dz) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'} \vec{C}(z)\,dz$ (где γ' — малая окружность с центром 0, пробегаемая в положительном направлении) $= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \vec{\omega} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \vec{f}(z)\,dz$ (где γ — большая окружность, полученная из γ' преобразованием $z \to 1/z$ и пробегаемая в противоположном направлении). Мы снова возвращаемся к определению, принятому для $\mathrm{Res}_\infty \vec{f}$ на стр. 384 (строго говоря, надо было бы писать $\mathrm{Res}_\infty(\vec{f}\,dz)$, а не $\mathrm{Res}_\infty \vec{f}$, так как последнее выражение не имеет смысла).

Дадим, наконец, интерпретацию внешней теоремы о вычетах — теоремы 19_2. Согласуем сначала наши обозначения с обозначениями, принятыми в этой теореме. Положим $\widehat{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$, а значит, $\Omega = \complement_{\widehat{\Omega}} \infty = \widehat{\Omega} \cap \mathbb{C}$. Множество Ω является дополнением в $\mathbb{C}$ к некоторому компакту, а следовательно, является открытым множеством в $\widehat{\mathbb{C}}$, содержащим ∞. Поскольку функция $\vec{f}$ голоморфна в $\complement_\Omega \{a_i\}_{i \in I}$, форма $\vec{\omega} = \vec{f}\,dz$ голоморфна в $\complement_\Omega \left\{\{a_i\}_{i \in I} \cup \{\infty\}\right\}$. Следовательно, к ней можно применить теорему 22с о вычетах относительно множества $\hat{V} = \complement_{\hat{\mathbb{C}}} \mathring{W}$ (для возможности применения теоремы 22с надо, чтобы оно было компактным) и его границы Г. Кривая Г как граница $\hat{V}$ должна обходиться в отрицательном направлении. Возможными особыми точками формы $\vec{\omega}$ в $\hat{\Omega}$ будут только a_i и ∞. Для каждой из них надо будет вычислить вычет формы $\vec{\omega} = \vec{f}(z)\,dz$, который мы называем (нестрого) вычетом $\vec{f}$ соответственно в точке a_i (по определению, данному на стр. 376), и в точке ∞ (по определению на стр. 378). Применение теоремы 22с дает тот же результат, что и теорема 19_2. Если рассмотрение вести на сфере Римана, то справедлива лишь одна теорема о вычетах — теорема 22с, а точка ∞ сферы $\hat{\mathbb{C}}$ ничем не отличается от остальных ее точек.

Итак, все удается объяснить, если как следует пошевелить мозгами. Если мы действительно хотим никогда не ошибаться, то — подчеркнем это еще раз — разрешать себе смешивать функцию $\vec{f}$ с формой $\vec{f}\,dz$ можно только в $\mathbb{C}$ и только тогда, когда нет речи о бесконечно удаленных точках и диффеоморфизмах. Во всех остальных случаях их надо тщательно отличать друг от друга и говорить о вычете (а именно о вычете в бесконечности) только для формы $\vec{f}\,dz$. Вычет 1-формы имеет смысл, в то время как вычет функции — нет. В дальнейшем мы будем допускать вольность речи, но с этим надо быть настороже.

Уместно заметить, что Риман ввел свою сферу именно для того, чтобы избежать затруднений, возникающих из-за появления бесконечно удаленной точки. Это и другие обстоятельства, аналогичные рассмотренным прежде, приводят к необходимости различать функции и голоморфные 1-формы, а затем к необходимости вообще вводить и изучать поверхности Римана. Впервые по-настоящему корректное определение поверхностей Римана было дано Германом Вейлем (Die Idee der Riemannschen Fläche, 1923) с помощью систематического применения введенного им понятия локальных карт. Отсюда и берет начало *современное определение* общих дифференцируемых многообразий. Из затруднений, связанных с точкой ∞, после ряда исследований родились некоторые наиболее важные понятия современной математики.

Теорема 24. *Для того чтобы функция (или 1-форма) была мероморфной на всей комплексной плоскости, включая бесконечность, т. е. на сфере Римана $\hat{\mathbb{C}}$, необходимо и достаточно, чтобы она была рациональной.*

Доказательство. Если $\vec{f}$ — рациональная функция, т. е. $\vec{f}=\vec{P}/Q$, где $\vec{P}$ — полином с коэффициентами в $\vec{F}$, а Q — комплексный полином, то, очевидно, такая функция мероморфна на $\hat{\mathbb{C}}$. Нам надо доказать обратное утверждение. Пусть $\vec{f}$ — мероморфная функция на $\hat{\mathbb{C}}$. Особенности $\vec{f}$ на $\hat{\mathbb{C}}$ образуют замкнутое множество изолированных точек. Так как $\hat{\mathbb{C}}$ компактно, то таких точек имеется лишь конечное число. Пусть a_i — особые точки в конечной части плоскости. Для каждой из точек a_i отделим «полярную часть» $\vec{f}$, т. е. сумму $\vec{f}_i$ членов разложения Лорана в окрестности a_i с показателями <0. Разность $\vec{g}=\vec{f}-\left(\sum\limits_i \vec{f}_i\right)$ есть целая функция на $\mathbb{C}$, поскольку ее единственные возможные особые точки a_i являются регулярными точками. На бесконечности функция $\vec{f}$ имеет полюс, но полярные части $\vec{f}_i$ там регулярны и даже равны нулю, а значит, функция $\vec{g}$ также имеет полюс. Согласно теореме 13 Лиувилля, функция $\vec{g}$ является полиномом, а значит, функция $\vec{f}$ — рациональной дробью, полученной, кстати, в форме разложения на простые дроби.

Если же речь идет об 1-форме, то ее следует записать в виде $\vec{f}(z)\,dz$ и провести рассуждения с функцией $\vec{f}$.

Формула для нулей и полюсов мероморфной функции

Теорема 25. *Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{C}$ и f — мероморфная комплекснозначная функция в Ω. Пусть $V\subset\Omega$ — компактное многообразие с краем класса C^1 вещественной размерности 2, снабженное канонической ориентацией $\mathbb{C}$. Пусть c — комплексное число, и пусть граница Γ многообразия V не проходит ни через один из корней уравнения $f(z)=c$ и ни через один из полюсов f. Тогда, если Γ обходится в направлении границы V, справедлива формула*

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz=N(f;V;c)-N(f;V;\infty),\quad \text{(VII, 4; 24)}$$

в которой $N(f;V;c)$ — число корней уравнения $f(z)=c$, содержащихся в $\mathring{V}$, каждый из которых считается столько раз, какова его кратность, а $N(f;V;\infty)$ — число полюсов f в $\mathring{V}$, каждый из которых считается столько раз, каков его порядок. Если, в частности, функция f голоморфна в Ω, то правая часть равна $N(f;V;c)$.

Доказательство. Функция $\frac{f'}{f-c}: z \to \frac{f'(z)}{f(z)-c}$ голоморфна в открытом множестве, полученном удалением из Ω корней уравнения $f=c$ и полюсов функции f.

Пусть a — корень уравнения $f(z)=c$ кратности k. Тогда в окрестности точки a имеет место разложение вида

$$f(z)-c=(z-a)^k g(z), \tag{VII, 4; 25}$$

где g — голоморфная функция, отличная от нуля в окрестности точки a. Отсюда следует, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)-c}=\frac{k}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)} \tag{VII, 4; 26}$$

(логарифмическая производная функции $f-c$) и что, следовательно, функция $f'/(f-c)$ имеет в точке a простой полюс с вычетом k, где k — кратность корня a уравнения $f(z)=c$. Если теперь функция f имеет полюс в точке a порядка m, то справедлива формула

$$f(z)-c=\left(\frac{1}{z-a}\right)^m h(z), \tag{VII, 4; 27}$$

где $h(z)$ — голоморфная функция, не имеющая нулей в окрестности точки a.

Таким образом,

$$\frac{f'(z)}{f(z)-c}=-\frac{m}{z-a}+\frac{h'(z)}{h(z)}, \tag{VII, 4; 28}$$

а это означает, что вычет функции $f'/(f-c)$ в точке a равен $-m$, где m — порядок полюса a функции f. Нужный результат теперь непосредственно вытекает из теоремы 19.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы. Пусть, кроме того, функция f голоморфна в Ω. Тогда отображение f компактного ориентированного многообразия $V \subset \mathbb{C}$ с краем имеет в точке $c \in \mathbb{C}$, не принадлежащей образу $f(\Gamma)$ границы, топологическую степень, равную числу корней уравнения $f(z)=c$, каждый из которых считается столько раз, какова его кратность, и*

$$d(f\,|V;\, c)=\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz=N(f;\,V;\,c). \tag{VII, 4; 29}$$

Доказательство. Согласно определению, приведенному на стр. 314 гл. VI, топологическая степень равна индексу цикла $f\,|\,\Gamma$ относительно точки c. Этот индекс вычисляется (стр. 303 гл. VI) с помощью интеграла

$$I(f\,|\,\Gamma;\, c)=\frac{1}{2i\pi}\int_{f|\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta-c}. \tag{VII, 4; 30}$$

По определению интеграла по особому циклу (формула (VI, 6; 60)) этот интеграл совпадает с интегралом (VII, 4; 29), и следствие доказано.

Замечание. Из следствия 1 вытекает, что топологическая степень функции f относительно компактного ориентированного многообразия V с краем в предположении голоморфности функции f вычисляется очень просто даже при наличии кратных корней.

Вернемся к вычислению топологической степени, проводившемуся на стр. 315 гл. VI. Там дело сводилось к рассмотрению прообразов точки c, т. е. в данной ситуации корней уравнения $f(z)=c$. Если эти корни изолированы и если в каждом из них якобиан $\neq 0$, то топологическая степень равна разности числа корней с якобианом >0 и числа корней с якобианом <0 (якобиан *вычислялся относительно поля* $\mathbb{R}$). Мы знаем, что якобиан голоморфного отображения (относительно $\mathbb{R}$) всегда $\geqslant 0$ [по формуле (VI, 2; 7) якобиан функции f равен $|f'(z)|^2$], откуда видно, почему теперь вычисление топологической степени свелось просто к подсчету числа корней. Однако метод гл. VI неприменим к точкам, в которых якобиан равен нулю. Мы видим, что для голоморфного отображения f, если в некоторых точках его производная f' обращается в нуль, т. е. если корни кратны, при вычислении топологической степени надо учитывать кратность таких корней. Для $\mathbb{R}$-дифференцируемых отображений столь же простых результатов нет. Полученные выводы позволяют дать новую интерпретацию доказательства теоремы Даламбера, приведенного в следствии 1 теоремы гл. VI. Там мы установили, что топологическая степень полинома P в точке 0 равна m. Тот факт, что $m \neq 0$, обеспечивал существование *не менее* одного корня. Теперь этому факту можно дать более точное истолкование, а именно: полином имеет в точности m корней, если считать каждый его корень столько раз, какова его кратность.

Следствие 2. *Пусть $f_0, f_1, f_2, \ldots$ — последовательность комплексных голоморфных функций, определенных на открытом множестве Ω плоскости $\mathbb{C}$, локально равномерно сходящаяся при n, стремящемся к бесконечности, к голоморфной функции f.*

Если $V \subset \Omega$ есть многообразие с краем вещественной размерности 2 класса C^1 и если уравнение $f(z)=0$ не имеет корней на $\dot{V}$, то для достаточно больших n уравнение $f_n(z)=c$ тем более не имеет корней на $\dot{V}$ и число корней уравнений $f_n(z)=c$ в $\mathring{V}$ равно числу корней уравнения $f(z)=c$ в $\mathring{V}$, если считать каждый корень с его порядком кратности.

Доказательство. Утверждение, относящееся к контуру, получается сразу. В самом деле, если уравнение $f(z)=c$ не имеет корней на $\dot{V}$, то величина $|f(z)-c|$ имеет минимум $\delta>0$ на компактном множестве $\dot{V}$. Если взять n настолько большим, чтобы разность $|f-f_n|$ была $\leqslant\delta/2$ на $\dot{V}$, то уравнение $f_n(z)=c$ не будет иметь корней на $\dot{V}$. Для завершения доказательства достаточно вычислить интегральное выражение $N(f_n; V; c)$, определяемое по формуле (VII, 4; 29), и выполнить в этом интеграле переход к пределу (простейший случай равномерной сходимости на компакте).

Замечание. С учетом предыдущего следствия полученный результат совпадает с теоремой 66 гл. VI.

Пусть f — комплекснозначная голоморфная функция, заданная на открытом множестве $\Omega\subset\mathbb{C}$. Говорят, что функция f *p-листна*, если для каждой точки $c\in\mathbb{C}$ уравнение $f(z)=c$ имеет не более p корней в Ω (считая каждый корень с его кратностью) и ровно p корней хотя бы для одной точки c. Отсюда следует, что f отлична от постоянной.

Следствие 3. *Если голоморфные комплекснозначные функции f_n, заданные в связном множестве Ω, сходятся локально равномерно в Ω к некоторому пределу f и если все функции f_n p-листны, то либо этот предел f есть постоянная функция, либо функция f сама p-листна.*

Доказательство. Заметим сначала, что постоянная функция, очевидно, не p-листна, поскольку существует значение, которое она принимает бесконечное число раз.

Предположим поэтому, что предельная функция f не постоянна. Тогда корни уравнения $f(z)=c$ будут изолированными точками множества Ω. Если бы там имелось $q>p$ $(q\leqslant+\infty)$ корней этого уравнения, то можно было бы найти такое компактное многообразие V с краем, содержащееся в Ω, что его граница не содержала бы этих корней, а $\overset{\circ}{V}$ содержала бы $q_1>p$ корней (причем $q_1=q$, если q конечно). Тогда из следствия 2 вытекало бы, что для достаточно больших n уравнение $f_n(z)=c$ имело бы не менее q_1 корней, лежащих в $\overset{\circ}{V}$, что противоречит предположению о том, что функции f_n p-листны. Этим и доказано следствие.

Замечание. Естественно, что случай, когда предельная функция f постоянна, вполне возможен. Достаточно рассмотреть последовательность функций $f_n(z)=z/n$. Функции эти однолистны и равномерно сходятся к 0 на каждом компакте из $\mathbb{C}$. Их предел 0 не является однолистной функцией.

Следствие 4. *Пусть f — комплексная голоморфная функция, определенная в некоторой окрестности точки $a \in \mathbb{C}$. Предположим, что для функции f в точке a производные порядка $1, 2, \ldots, m-1$ равны нулю, а производная порядка m не равна нулю. Тогда существуют такие окрестности $\mathscr{A}$ точки a и $\mathscr{B}$ точки $b = f(a)$, что f отображает $\mathscr{A}$ на $\mathscr{B}$, причем $f(\mathscr{A})$ покрывает $\mathscr{B}$ точно m раз.*

Когда мы говорим, что $f(\mathscr{A})$ покрывает $\mathscr{B}$ (точно) m раз, то это означает, что для каждой точки $c \in \mathscr{B}$ уравнение $f(z) = c$ имеет точно m корней в $\mathscr{A}$ (считая каждый с его кратностью).

Доказательство. Обозначим через Δ круг с центром в точке a, в котором уравнение $f(z) = b$ не имеет других корней, кроме a, являющегося корнем кратности m. Тогда топологическая степень отображения f круга Δ в $\mathbb{C}$ в точке b равна m. Однако топологическая степень в точке c, непрерывно движущейся так, чтобы не пересекать образа границы γ области Δ при отображении f, постоянна (теорема 66 гл. VI или предыдущее следствие 2). Значит, существует такое открытое множество $\mathscr{B}$, содержащее точку b, что для $c \in \mathscr{B}$ топологическая степень $f|\Delta$ в точке c везде равна m. Если теперь через $\mathscr{A}$ обозначить пересечение $\mathring{\Delta} \cap f^{-1}(\mathscr{B})$, то мы получим, что $f(\mathscr{A}) = \mathscr{B}$ и что для каждой точки $c \in \mathscr{B}$ уравнение $f(z) = c$ имеет m корней в $\mathscr{A}$, чем и доказано следствие 4.

Следствие 5. *Пусть f — комплексная голоморфная функция, заданная на открытом множестве Ω плоскости $\mathbb{C}$ и не постоянная ни в какой связной компоненте Ω. Тогда отображение f множества Ω в $\mathbb{C}$ открыто и, в частности, образ $f(\Omega)$ открыт. Если функция f инъективна, то она является $\mathbb{C}$-диффеоморфизмом Ω на $f(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \Omega$. Поскольку функция f не постоянна в связной компоненте множества Ω, содержащей точку a, то из следствия 3 теоремы 11 вытекает, что хотя бы одна из ее производных не обращается в нуль в точке a. Применяя предыдущее следствие к сужению f на произвольную открытую окрестность точки a, можно убедиться, что образ при отображении f этой окрестности является некоторой окрестностью точки $b = f(a)$. Следовательно (см. таблицу на стр. 312 гл. III), отображение f открыто. Далее, если функция f инъективна, то она должна быть гомеоморфизмом Ω на $f(\Omega)$. Кроме того, ее производная в каждой точке $\neq 0$. Значит, в силу теоремы об обратных функциях (в самой простой форме, поскольку речь идет о комплексной функции от комплексной переменной) это отображение является диффеоморфизмом.

Замечание 0. Следствие, очевидно, несправедливо, если функция постоянна.

Замечание 1. Из сказанного, вообще говоря, вовсе не следует, как мы это уже видели в гл. III, что f есть локальный гомеоморфизм. Впрочем, это совершенно ясно, поскольку если мы находимся в условиях предыдущего следствия с $m \geqslant 2$, то f заведомо не будет локальным гомеоморфизмом.

Замечание 2. Можно уточнить следствие и обобщить теорему 29 гл. III об обратных функциях. Пусть f — комплексная голоморфная функция в окрестности точки $a \in \mathbb{C}$ и $f(a) = b$. Применим теорему 29 гл. III к полю $\mathbb{C}$. Легко видеть, что если $f'(a) \neq 0$, то существуют такая окрестность $\mathscr{A}$ точки a и такая окрестность $\mathscr{B}$ точки b, что f есть $\mathbb{C}$-диффеоморфизм (класса C^{∞}) окрестности $\mathscr{A}$ на окрестность $\mathscr{B}$[1]). Если же $f'(a) = 0$, то с помощью результатов гл. III ничего заключить нельзя (если исключить такие специальные методы, как метод, изложенный на стр. 341). Здесь же, поскольку скалярным полем является $\mathbb{C}$ и размерность равна 1, всегда можно сделать определенный вывод. Предположим, что в точке a производные функции f порядков $1, 2, \ldots, m-1$ равны нулю, а производная порядка m отлична от нуля. Тогда можно записать

$$f(z) - b = (z-a)^m h(z), \qquad \text{(VII, 4; 31)}$$

где функция h в точке a в нуль не обращается. Поэтому существует такая открытая окрестность $\mathscr{A}_1$ точки a, в которой можно выбрать голоморфное значение функции $\ln h$, а значит, $h^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}\ln h}$. Можно даже получить почленно разложение Тейлора функции $h^{\frac{1}{m}}$ в точке a, пользуясь разложением h и разложением бинома: если $h(z) = h(a)(1 + \ldots)$, то $(h(z))^{\frac{1}{m}} = k(1+\ldots)^{\frac{1}{m}}$, где k — какое-либо значение $(h(a))^{\frac{1}{m}}$, а $(1+\ldots)^{\frac{1}{m}}$ разлагается по формуле бинома. Функция $(f-b)^{\frac{1}{m}}$ имеет в $\mathscr{A}_1$ некоторое голоморфное значение $g(z) = (z-a)(h(z))^{\frac{1}{m}}$. Кроме того, так как производная этой функции в точке a не равна нулю (она равна k), то функция g, принимающая значение 0 в точке a, удовлетворяет условиям применимости теоремы об обратной функции. Следовательно, существуют открытая окрестность $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}_1$ точки a и открытая окрестность $\mathscr{K}$ точки 0, такие, что g является $\mathbb{C}$-диффеоморфизмом $\mathscr{A}$ на $\mathscr{K}$. Уменьшая

[1]) Это было еще раз установлено в следствии 5.

эти открытые множества, можно всегда считать, что $\mathcal{K}$ является кругом с центром в точке 0.

Пусть g^{-1} — обратный диффеоморфизм $\mathcal{K}$ на $\mathcal{A}$, и пусть мы хотим решить уравнение $f(z)=c$. Будем предполагать, что $c \in b+\mathcal{K}^m$ (где $\mathcal{K}^m$ — множество значений ζ^m при $\zeta \in \mathcal{K}$; это снова круг с центром в 0). Мы приходим к необходимости искать решение уравнения $(f(z)-b)^{1/m}=(c-b)^{1/m}$, содержащего выражения, имеющие m различных значений в $\mathcal{K}$. Решениями в $\mathcal{A}$ будут $z=g^{-1}\left((c-b)^{1/m}\right)$. Все m решений различны всюду, кроме точки $c=b$, в которой они совпадают с a. Можно сказать, что обращение функции $u=f(z)$ в окрестности точки a дается «многозначной функцией» с m значениями $z=g^{-1}\left((u-b)^{1/m}\right)$. Если $u=f(z)$ — голоморфная функция от z и если $f-b$ в точке a имеет нуль кратности m, то локально z является голоморфной функцией от $(u-b)^{1/m}$. Положив для простоты $a=b=0$, получим, что если $u=f(z)$ голоморфна в окрестности точки 0 и в точке 0 имеет нуль кратности m, то z в окрестности 0 является голоморфной функцией от $u^{1/m}$ (а следовательно, «многозначной» функцией аргумента u).

Теорема 26. *Если в условиях теоремы 25 функция Φ голоморфна в Ω, то имеет место формула*

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\Gamma}\Phi(z)\frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz=\sum\Phi(\alpha_i)-\sum\Phi(\beta_j), \qquad (\mathrm{VII}, 4; 32)$$

где α_i — корни уравнения $f(z)=c$ в $\mathring{V}$ и β_j — полюсы f в $\mathring{V}$, каждый из которых считается столько раз, какова его кратность.

Доказательство. При доказательстве теоремы 25 мы видели, что функция $f'/(f-c)$ имеет в каждой точке α_i простой полюс с вычетом k, равным порядку нуля α_i функции $f-c$. Функция $\Phi\frac{f'}{f-c}$ имеет простой полюс с вычетом $k\Phi(\alpha_i)$. Точно так же если β_j — полюс функции f порядка m, то $\frac{f'}{f-c}$ имеет простой полюс с вычетом $-m$. Следовательно, $\Phi\frac{f'}{f-c}$ имеет простой полюс с вычетом $-m\Phi(\beta_j)$, что и дает нужный результат в силу теоремы о вычетах.

Обобщение на поверхности Римана

Некоторые из предыдущих утверждений обобщаются на поверхности Римана.

Теорема 27. *Пусть W — поверхность Римана, f — комплексная мероморфная функция на W и V — компактное подмногообра-*

зие класса C^1 вещественной размерности 2 с границей Γ. Пусть Γ снабжена ориентацией границы компакта V, имеющего в свою очередь ориентацию, определяемую ориентацией поверхности W. Будем предполагать, что функция $f-c$ не имеет ни нулей, ни полюсов на Γ и не постоянна ни в одной связной компоненте поверхности W. Пусть, кроме того, на W задана комплексная голоморфная функция Φ. Тогда справедливы равенства

$$\begin{gathered} \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{df}{f-c} = N(f;\ V;\ c) - N(f;\ V;\ \infty), \\ \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \Phi\frac{df}{f-c} = \sum \Phi(\alpha_i) - \sum \Phi(\beta_j), \end{gathered} \tag{VII, 4; 33}$$

где $N(f;\ V;\ c)$ — число корней α_i уравнения $f(z)=c$ в $\overset{\circ}{V}$, а $N(f;\ V;\ \infty)$ — число полюсов β_j функции f в $\overset{\circ}{V}$, каждый из которых считается со своим порядком кратности.

Доказательство. Написанные формулы являются результатом применения формулы вычетов (теорема 22с) к мероморфным 1-формам $df/(f-c)$ и $\Phi\,df/(f-c)$. Вычисление вычетов — локальная операция и может производиться с помощью карт, а на карте $df=f'(z)\,dz$, так что вычеты совпадают с вычетами, получаемыми по теоремам 25 и 26.

Следствия. Следствия будут такие же, как и у предыдущих теорем. Наиболее интересным будет тот случай, когда W является связным компактом и когда можно брать $V=W$, т. е. когда граница Γ — пустое множество [1]). Тогда получается, что $N(f;\ W;\ c)=N(f;\ W;\ \infty)$, а следовательно, число $N(f;\ W;\ c)$ не зависит от выбора c.

Следствие 1. *Мероморфная непостоянная комплексная функция, определенная на связном компакте W, принимает все свои значения одно и то же конечное число раз.*

Этому факту легко дать истолкование.

Мероморфная функция f на W определяет отображение W в $\hat{\mathbb{C}}$, принимающее значение ∞ в каждом полюсе a функции f. Поэтому она *голоморфно* отображает W в $\hat{\mathbb{C}}$. В самом деле, если точка a является полюсом, то $1/f$ в окрестности точки a есть голоморфная функция со значениями в $\mathbb{C}$ (например, согласно следствию 2 теоремы 16), равная нулю в точке a, и для проверки сказанного остается лишь рассмотреть карту $\zeta\to 1/\zeta$, отображающую множество $\mathcal{O}=\mathbb{C}$ на множество

[1]) В этом случае вторая формула не представляет никакого интереса, поскольку функция Φ, голоморфная на W, постоянна (следствие 7 теоремы 12).

$C_{\hat{\mathbb{C}}}\{0\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ (теорема 33_3 гл. III). В частности, в качестве непрерывного отображения W в $\hat{\mathbb{C}}$ отображение $1/f$ имеет одну и ту же топологическую степень для всех точек множества $\hat{\mathbb{C}}$ (см. последнюю фразу гл. VI). Из следствия 1 теоремы 25 вытекает, что эта топологическая степень есть в точности число раз, которое функция f принимает каждое свое значение: $d(f;\ W;\ c) = N(f;\ W;\ c)$. Это число будем записывать проще в виде $d(f)$ или $N(f)$ и называть *степенью функции* f. Впрочем, особой необходимости рассматривать именно $\hat{\mathbb{C}}$ нет:

Следствие 2. *Непостоянное голоморфное отображение связной компактной поверхности Римана W на другую такую же поверхность W' открыто и имеет во всех точках W' одну и ту же топологическую степень $d(f) > 0$, равную числу $N(f)$ принимаемых ею в W' значений.*

Предположим, в частности, что f — непостоянная рациональная дробь — мероморфная функция на $\mathbb{C}$ или голоморфное отображение $\hat{\mathbb{C}}$ в $\hat{\mathbb{C}}$. Пусть сначала $f = P$ — полином степени $m > 0$. Полином P принимает значение ∞ только в точке ∞. Пользуясь для независимой переменной и функции одной и той же картой $\zeta \to 1/\zeta$, отображающей $\mathcal{O} = \mathbb{C}$ на $C_{\hat{\mathbb{C}}}\{0\}$, и учитывая, что $1/P(z) \sim 1/(a_0 z^m)$, получаем, что уравнение $P(z) = \infty$ имеет корень кратности m в точке ∞. Следовательно, степень функции $f = P$ равна m и P принимает каждое значение m раз. Мы снова получаем теорему Даламбера. Если теперь взять $f = P/Q$, где P и Q — полиномы степени p и q, не имеющие общих нулей, то функция f значение ∞ принимает q раз в нулях полинома Q и, кроме того, при $p > q$ в точке ∞ с кратностью $p - q$. Ее степень равна, следовательно, $q + (p - q) = p$ при $p > q$ и q при $p \leqslant q$; во всех случаях $d = \max(p, q)$. Поэтому если нужно решить уравнение $f = c \in \mathbb{C}$, то следует решить уравнение $P - cQ = 0$, имеющее $d = \max(p, q)$ корней в $\hat{\mathbb{C}}$ (если $p = q$ и если число c таково, что $P - cQ$ имеет меньшую степень, то функция f принимает значение c в точке ∞).

Первая проблема Кузена в комплексной плоскости

Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — замкнутое множество изолированных точек $\mathbb{C}$. Для каждой из точек a_i определим функцию P_i — полином относительно $1/(z - a_i)$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$:

$$\vec{P}_i(z) = \sum_{k=1}^{m_i} \vec{c}_{-k,\, i} \left(\frac{1}{z - a_i}\right)^k. \qquad \text{(VII, 4; 34)}$$

Первая проблема Кузена в комплексной плоскости заключается в определении мероморфной функции $\vec{f}$ в $\mathbb{C}$ со значениями в $\vec{F}$, имеющей точки a_i в качестве полюсов, и с главными частями P_i в этих полюсах: функция $\vec{f} - \vec{P}_i$ должна быть регулярной в точке a_i.

Если ряд $\sum \vec{P}_i$ равномерно сходится на каждом компакте, не содержащем полюсов, то задача, очевидно, разрешима, так как искомая функция есть сумма этого ряда. В самом деле, она представляет собой некоторую голоморфную функцию в открытом множестве, дополнительном к множеству точек a_i (следствие 1 теоремы 15 Вейерштрасса). С другой стороны, если рассмотреть произвольную точку a_k, то ряд $\sum\limits_{i \neq k} P_i$ равномерно сходится на окружности с центром в a_k и, следовательно, по теореме Вейерштрасса во всем круге, ограниченном этой окружностью, а значит, на любом компакте, не содержащем ни одной из точек $a_i \neq a_k$.

Полученная сумма представляет собой голоморфную функцию в $\complement \{a_i\}_{i \neq k}$, а это значит, что $\vec{P}_k$ есть главная часть функции $\vec{f}$ в точке a_k. Однако, вообще говоря, ряд $\sum \vec{P}_i$ не сходится и заранее не ясно, имеет ли поставленная задача решение.

Теорема 28 (Миттаг-Леффлер). *Какова бы ни была последовательность точек a_i и главных частей $\vec{P}_i$, существует мероморфная функция $\vec{f}$ в $\mathbb{C}$ со значениями в $\vec{F}$, имеющая полюсы a_i и заданные главные части $\vec{P}_i$. Общее решение этой задачи получается прибавлением к частному решению произвольной целой функции со значениями в $\vec{F}$.*

Доказательство. Пусть b — произвольная[1]) точка, не принадлежащая множеству точек a_i. Пусть задана такая последовательность чисел $\varepsilon_i > 0$, что ряд $\sum \varepsilon_i$ сходится. Функция $\vec{P}_i$ голоморфна в круге $|z - b| < |a_i - b|$, а следовательно, имеет разложение Тейлора, нормально сходящееся в любом круге строго меньшего радиуса с центром в точке b. Значит, существует полином $\vec{Q}_i$, являющийся конечной суммой сте-

[1]) Вообще говоря, берут $b = 0$. Однако может случиться, что 0 совпадает с одной из точек a_i! Даже в этом случае задачу Миттаг-Леффлера решают сначала относительно системы точек $a_i \neq 0$ при $b = 0$, а затем к полученному результату добавляют главную часть, заданную для точки 0.

пеней $z-b$, такой, что $|\vec{P}_i(z)-\vec{Q}_i(z)|\leqslant\varepsilon_i$ для $|z-b|\leqslant\leqslant\frac{|a_i-b|}{2}$.

Рассмотрим ряд

$$\vec{f}(z)=\sum_i(\vec{P}_i(z)-\vec{Q}_i(z)). \qquad \text{(VII, 4; 35)}$$

Этот ряд нормально сходится на каждом компакте K, не содержащем ни одного из полюсов a_i. В самом деле, такое множество K содержится в некотором круге $|z-b|\leqslant R$. Если выбрать целое число p так, чтобы $|a_n-b|\geqslant 2R$ для $n\geqslant p$, то при $n\geqslant p$ будет иметь место неравенство $|\vec{P}_n(z)-\vec{Q}_n(z)|\leqslant\varepsilon_n$ для $z\in K$. Сумма этого ряда $\vec{f}$, согласно теореме Вейерштрасса, является голоморфной функцией в открытом дополнении к точкам a_i. Функция $\vec{f}-(\vec{P}_k-\vec{Q}_k)$ есть сумма некоторого ряда, который в силу рассуждений, аналогичных предыдущим, сходится равномерно в дополнении к множеству точек $a_i\neq a_k$, а следовательно, является голоморфной функцией в окрестности точки a_k. Так как $\vec{Q}_k$ — полином, то это означает, что $\vec{f}$ имеет полюс в точке a_k с главной частью $\vec{P}_k$, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Замечание 1. Теорема сохраняет силу, если заменить $\mathbb{C}$ на произвольное открытое множество $\Omega\subset\mathbb{C}$. Однако доказательство, хотя и основано на тех же идеях, требует гораздо более тонких рассуждений.

Замечание 2. Предыдущую задачу можно значительно обобщить.

Зададимся точками a_i и для каждой из них разложением Лорана с ограниченными в обоих направлениях показателями:

$$\vec{P}_i(z)=\sum_{n=p_i}^{q_i}\vec{c}_{n,i}(z-a_i)^n,\ p_i\in\mathbb{Z},\ q_i\in\mathbb{Z},\ q_i\geqslant p_i. \qquad \text{(VII, 4; 35}_2\text{)}$$

Будем теперь искать такую мероморфную функцию $\vec{f}$ на $\mathbb{C}$, чтобы ее разложение Лорана в окрестности точки a_i для каждого i имело вид $\sum\limits_{n=p_i}^{+\infty}\vec{c}_{n,i}(z-a_i)^n$, где $\vec{c}_{n,i}$ — коэффициенты $\vec{P}$ для каждого $n\leqslant q_i$. Тогда функция $\dfrac{\vec{P}_i}{(z-a_i)^{q_i+1}}$ голоморфна в круге $|z|<|a_i|$ и, следовательно, можно найти такой полином $\vec{Q}_i$, что

$$\left\| \frac{\vec{P}_i(z)}{(z-a_i)^{q_i+1}} - \vec{Q}_i(z) \right\| < \varepsilon_i \left(\frac{2}{3|a_i|} \right)^{q_i+1} \quad \text{для } |z| \leqslant \frac{|a_i|}{2}, \qquad (\text{VII}, 4; 35_3)$$

а потому

$$\|\vec{P}_i(z) - (z-a_i)^{q_i+1}\vec{Q}_i(z)\| \leqslant \varepsilon_i \quad \text{для} \quad |z| \leqslant \frac{|a_i|}{2}.$$

Сходящийся ряд $\vec{f}(z) = \sum\limits_i \left(\vec{P}_i(z) - (z-a_i)^{q_i+1}\vec{Q}_i(z)\right)$ является решением поставленной задачи.

В частности, если каждое разложение $\vec{P}_i$ сводится к постоянной $\vec{c}_i \in \vec{F}$, то получается целая голоморфная функция на $\mathbb{C}$ со значениями в $\vec{F}$, принимающая значения $\vec{c}_i$ в точках a_i.

Важные частные случаи

Если все точки a_i заданы как *простые полюсы* и для каждой из них заданы главные части $\vec{P}_i(z) = \vec{c}_i/(z-a_i)$, причем ряд $\sum \|\vec{c}_i\|/|a_i|$ сходится, то в качестве решения задачи Миттаг-Леффлера можно взять $\sum \vec{P}_i$. В самом деле, для $|z| \leqslant |a_i|/2$ имеет место оценка

$$\frac{\|\vec{c}_i\|}{|z-a_i|} \leqslant 2\frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|}, \qquad (\text{VII}, 4; 36)$$

из которой следует, что рассматриваемый ряд нормально сходится на каждом компакте из открытого дополнения к множеству точек a_i (см. рассуждение, проведенное выше).

Если в случае простых полюсов ряд $\sum \|\vec{c}_i\|/|a_i|$ не сходится, а ряд $\sum \|\vec{c}_i\|/|a_i|^{r+1}$ при некотором r сходится, то в качестве решения можно взять функцию

$$\vec{f}(z) = \sum_i \vec{c}_i \left(\frac{1}{z-a_i} + \frac{1}{a_i} + \frac{z}{a_i^2} + \ldots + \frac{z^{r-1}}{a_i^r} \right). \qquad (\text{VII}, 4; 37)$$

(Здесь мы положили $b=0$. Затем рассматривается полином $-\vec{c}_i\left(\frac{1}{a_i} + \frac{z}{a_i^2} + \ldots + \frac{z^{r-1}}{a_i^r}\right) = \vec{Q}_i(z)$, являющийся началом разложения функции $\vec{c}_i/(z-a_i)$ по степеням z в круге $|z|<|a_i|$, и составляется разность $\vec{P}_i - \vec{Q}_i$.)

В самом деле, при $|z| \leqslant |a_i|/2$ справедливо неравенство

$$\left\| \vec{c}_i \left(\frac{1}{z-a_i} + \frac{1}{a_i} + \ldots + \frac{z^{r-1}}{a_i^r} \right) \right\| =$$

$$= \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|} \sum_{n=r}^{\infty} \left| \frac{z}{a_i} \right|^n \leqslant \frac{\|\vec{c}_i\|}{|a_i|} \frac{\left| \frac{z}{a_i} \right|^r}{1 - \left| \frac{z}{a_i} \right|} \leqslant 2 \frac{\|\vec{c}_i\| |z|^r}{|a_i|^{r+1}}, \qquad \text{(VII, 4; 38)}$$

так что рассматриваемый ряд нормально сходится в каждом компакте из дополнения к множеству точек a_i. Если такого целого r, при котором имело бы место неравенство $\sum \|\vec{c}_i\| / |a_i|^{r+1} < +\infty$, не существует, то надо брать переменное r_i, изменяющееся вместе с i и стремящееся к $+\infty$ при $|a_i|$, стремящемся к $+\infty$.

Результат легко обобщается на кратные полюсы.

Пример. Выберем в качестве полюсов целые числа ($n \in \mathbb{Z}$) и в качестве главной части в окрестности точки $z = n$ — функцию $\left(\frac{1}{z-n}\right)^2$. Тогда в силу неравенства

$$\left| \frac{1}{z-n} \right|^2 \leqslant \frac{4}{n^2} \quad \text{для} \quad |z| \leqslant \frac{n}{2} \qquad \text{(VII, 4; 39)}$$

ряд $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n}\right)^2$ нормально сходится в каждом компакте из дополнения к полюсам. Более того, ряд будет нормально сходиться в каждой полосе $|x| \leqslant A$ ($z = x + iy$), если выбросить члены, соответствующие полюсам, содержащимся в этой полосе; действительно, неравенство (VII, 4; 39) сохранится для $|x| \leqslant \frac{n}{2}$ ($|z-n| = |x+iy-n| \geqslant |x-n|$).

Отметим, что функция f периодична с периодом 1.

Но функция $z \to \pi^2/\sin^2 \pi z$ имеет те же полюсы и те же главные части. (Так как она периодична, то достаточно это проверить для $n=0$. Поскольку при z, стремящемся к 0, эта функция эквивалентна $1/z^2$ и четна, то ее главной частью будет функция $1/z^2$.) Поэтому разность

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n}\right)^2 - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = g(z) \qquad \text{(VII, 4; 40)}$$

является целой голоморфной функцией.

Если мы, сохраняя координату x ограниченной по абсолютной величине, устремим y к $\pm\infty$, то получим, что функция f будет стремиться к 0. В самом деле, мы видели, что ряд для f равномерно сходится в полосе $|x| \leqslant A$, а каждый из его членов в отдельности стремится к 0, так что наше утверждение относительно f вытекает из теоремы 66 гл. II.

С другой стороны, функция sin удовлетворяет условию

$$|\sin \pi z| = \left| \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} \right| \sim \frac{e^{\pi |y|}}{2}, \qquad \text{(VII, 4; 41)}$$

так что $\pi^2/\sin^2 \pi z$ при тех же условиях также стремится к 0.

Следовательно, при заданном A можно найти такое B, чтобы из соотношений $|x| \leqslant A$, $|y| \geqslant B$ следовало неравенство $|g(z)| \leqslant 1$. Поскольку функция g в компакте $|x| \leqslant A$, $|y| \leqslant B$ ограничена, она ограничена в полосе $|x| \leqslant A$, а так как она периодична (с периодом 1), то она ограничена во всей комплексной плоскости.

Из теоремы Лиувилля следует, что эта функция постоянна, а так как она при фиксированных x и y, стремящихся к бесконечности, стремится к нулю, то она должна быть тождественно равной нулю.

Если теперь заменить z на $z - \frac{1}{2}$, то мы получим следующее утверждение:

Теорема 29. *Имеют место тождества*

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n}\right)^2, \\ \frac{\pi^2}{\cos^2 \pi z} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n-\frac{1}{2}}\right)^2. \end{aligned} \qquad \text{(VII, 4; 42)}$$

Вычисляя теперь первообразные, получаем

Следствие 1. *Имеют место тождества*

$$\begin{aligned} \pi \operatorname{ctg} \pi z &= \frac{1}{z} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right), \\ \pi \operatorname{tg} \pi z &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right). \end{aligned} \qquad \text{(VII, 4; 43)}$$

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty}$ в правой части первой из формул (VII, 4; 43) очевидным образом сходится при $z = 0$ (его сумма равна 0), а ряд, составленный из производных, $-\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-n}\right)^2$ сходится локально равномерно в открытом *связном* множестве $\Omega = \complement_{\mathbb{C}}\{n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0\}$. Из теоремы 111 гл. IV следует, что этот ряд сходится локально равномерно в Ω и что его сумма равна первообразной для функции $-\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}+\frac{1}{z^2}$, а следовательно, с точностью до аддитивной постоянной равна $\pi \operatorname{ctg} \pi z - 1/z$. Так как обе эти функции равны нулю в начале координат (мы это видели выше для ряда, функция же $\pi \operatorname{ctg} \pi z - 1/z$ нечетна), то они тождественно совпадают. Заметим, что мы взяли не первую попавшуюся первообразную для функции $-\left(\frac{1}{z-n}\right)^2$. Например, если бы мы взяли в качестве первообразной $\frac{1}{z-n}$, то получили бы расходящийся ряд. Мы выбрали первообразные $\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}$, равные нулю в начале координат, с тем, чтобы получить сходимость хотя бы в одной точке (начале координат) и иметь возможность применить теорему 111 гл. IV. Вот почему пришлось выделить из первого ряда (VII, 4; 42) член $1/z^2$, имеющий особенность в начале координат. Окончательно полученный результат вполне согласуется с формулой (VII, 4; 37) при $r = 1$ и со сказанным в примечании на стр. 408.

Тот же самый метод доказательства применим ко второй формуле (VII, 4; 43). Так как 0 больше не является полюсом, то все члены рассматриваются равноправно. Обе части равенства снова совпадают в начале координат, где они, очевидно, равны нулю.

Замечание. Группируя члены с номерами n и $-n$, часто пишут

$$\begin{aligned} \pi \operatorname{ctg} \pi z &= \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2z}{z^2-n^2}\right), \\ \pi \operatorname{tg} \pi z &= 2z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}. \end{aligned} \qquad \text{(VII, 4; 44)}$$

Ни для одной из формул (VII, 4; 43) или (VII, 4; 44) непосредственно не видно, что правые части периодичны с периодом 1. Проверку этого факта мы предоставим читателю в качестве легкого упражнения.

Функция $\pi \operatorname{ctg} \pi z - 1/z$ голоморфна для $|z| < 1$ и задается в виде локально равномерно сходящегося ряда из голоморфных функций. Следовательно, имеет место локально равномерная сходимость ряда из производных (следствие 1 теоремы 15 Вейерштрасса); в частности, допустим переход к пределу в коэффициентах Тейлора в начале координат.

Таким образом, k-й коэффициент Тейлора функции $\pi \operatorname{ctg} \pi z - 1/z$ совпадает с суммой k-х коэффициентов Тейлора функций $2z/(z^2 - n^2)$. Из разложения

$$\frac{2z}{z^2 - n^2} = -\frac{2z}{n^2} - \frac{2z^3}{n^4} - \ldots - \frac{2z^{2p-1}}{n^{2p}} - \ldots \qquad \text{(VII, 4; 45)}$$

вытекает формула

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{2}{\pi^2}\zeta(2) z - \ldots - \frac{2}{\pi^{2p}}\zeta(2p) z^{2p-1} - \ldots, \qquad \text{(VII, 4; 46)}$$

где ζ есть ζ-функция Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \text{(VII, 4; 47)}$$

определенная формулой (II, 16; 4) гл. II.

Разложение Лорана функции $\operatorname{ctg} z$ по степеням z получается непосредственно делением разложения $\cos z$ на разложение $\sin z$. Это будет разложение, все коэффициенты которого рациональны; первые члены имеют такой вид:

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \frac{z}{3} - \frac{z^3}{45} - \frac{2z^5}{945} - \frac{z^7}{4725} - \ldots. \qquad \text{(VII, 4; 48)}$$

Отсюда следует, что числа $\frac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}}$ рациональны и что их можно последовательно вычислять по формулам

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \\ \zeta(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \\ \zeta(6) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \\ \zeta(8) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}. \end{aligned} \qquad \text{(VII, 4; 49)}$$

Известно, что $\zeta(s)$ стремится к 1, когда $\operatorname{Re} s$ стремится к $+\infty$. В самом деле, для $\operatorname{Re} s \geqslant 1+\varepsilon > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится равномерно, а каждый его член $\frac{1}{n^s}$ стремится к 0 при $\operatorname{Re} s \to +\infty$, кроме первого члена, равного 1 (еще одно применение теоремы 66 гл. II). Следовательно, числовая последовательность $\pi^2/6$, $\pi^4/90$, $\pi^6/945$, $\pi^8/9450$ стремится к 1.

Значения $\zeta(2p+1)$ для нечетных чисел $2p+1$ неизвестны.

Учитывая сказанное по поводу формулы (II, 16; 19) для знакочередующихся рядов $\zeta_a(2p)$, получаем формулы

$$\begin{aligned} \zeta_a(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \\ \zeta_a(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}, \ \ldots . \end{aligned} \tag{VII, 4; 50}$$

Следствие 2. *Имеют место разложение*

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{1}{z+2ni\pi} - \frac{1}{2ni\pi} \right) \tag{VII, 4; 51}$$

и, кроме того, в окрестности точки $z=0$ разложение

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} B_p z^{2p-1} \quad \textit{для } |z| < 2\pi, \tag{VII, 4; 52}$$

где

$$B_p = \frac{2\,(2p)!}{(2\pi)^{2p}} \zeta(2p), \ \textit{или}\,[1] \ \frac{(-1)^{p+1}}{(2p)!} B_p = \frac{(-1)^{p+1} \zeta(2p)}{2^{2p-1} \pi^{2p}}. \tag{VII, 4; 53}$$

Для доказательства достаточно, исходя из функции ctg, записать функцию $\frac{1}{e^z-1}$ в виде

$$\frac{1}{e^z-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \operatorname{ctg} \frac{iz}{2} \tag{VII, 4; 54}$$

и воспользоваться формулами (VII, 4; 43) и (VII, 4; 46). Можно также дать прямое доказательство, аналогичное предыдущим.

Рациональные числа B_p называются *числами Бернулли.*

[1] Здесь довольно искусственно введен член $(2p)!$, полезный в некоторых приложениях.

Они применяются при решении ряда задач анализа и теории чисел. Первые из них таковы:

$$B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=\frac{1}{30},\quad B_3=\frac{1}{42},\quad B_4=\frac{1}{30},\ \ldots \qquad \text{(VII, 4; 55)}$$

Замечание. Формулы (VII, 4; 42), (VII, 4; 43) и (VII, 4; 51) можно рассматривать как своего рода «разложение на простые дроби» функций, стоящих слева. Однако в разложении рациональных дробей на простые дроби таких членов, как $\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)$, не бывает. Слагаемое $\frac{1}{n}$ введено здесь для обеспечения сходимости. С другой стороны, «целая часть» разложения, которая в принципе могла бы быть произвольной целой функцией, сведена здесь к своему простейшему виду с помощью рассуждений, основанных на теореме Лиувилля (см. стр. 412).

Первая проблема Кузена на поверхности Римана

То, что было сделано для комплексной плоскости $\mathbb{C}$, можно повторить для произвольной римановой поверхности W. Пусть $\{a_i\}_{i\in I}$—замкнутое множество изолированных точек W. В окрестности точки a_i нельзя уже задать полином от $\frac{1}{z-a_i}$, так как последнее выражение не имеет смысла. Однако в окрестности точки a_i можно задать мероморфную функцию $\vec{P}_i$ и искать такую мероморфную функцию $\vec{f}$ на W, чтобы для каждого i функция $\vec{f}-\vec{P}_i$ была голоморфной в этой окрестности. Эта задача и называется *первой проблемой Кузена* на W. Можно считать, что в окрестности каждой точки a_i задана локальная карта Φ_i: $\mathcal{O}_i\subset\mathbb{C}\to\Phi_i(\mathcal{O}_i)$, $\Phi_i(\alpha_i)=a_i$, а потому функция $\vec{P}_i$ задана в окрестности точки α_i в $\mathcal{O}_i$ в виде некоторого полинома от $\frac{1}{\zeta-\alpha_i}$ или же в виде суммы такого полинома и некоторой голоморфной функции, не играющей здесь никакой роли. Изменение карты, т. е. $\mathbb{C}$-диффеоморфизм $\zeta\to\zeta'$, $\mathcal{O}_i\to\mathcal{O}'_i$ хотя и не переводит полином от $\frac{1}{\zeta-\alpha_i}$ в полином от $\frac{1}{\zeta'-\alpha'_i}$, но преобразует сумму полинома от $\frac{1}{\zeta-\alpha_i}$ и голоморфной функции в аналогичную сумму. Можно ту же задачу поставить не только для функций, но и для мероморфных 1-форм. *Однако все результаты будут сильно отличаться от тех, которые были* *получены для случая $\mathbb{C}$ или открытого множества из $\mathbb{C}$: задача не всегда имеет решение.* Мы сейчас подробно проанализируем, что происходит на компактной поверхности Римана W. В этом случае имеется конечное число точек a_i. Предположим для простоты, что речь идет о скалярных формах и функциях: $\vec{F}=\mathbb{C}$.

1°) Решим сначала проблему Кузена для 1-формы ω. Для каждой точки a_i пусть P_i — мероморфная 1-форма, заданная в окрестности a_i. Эта форма определяет некоторый вычет. Если 1-форма ω существует, то форма $\omega - P_i$ голоморфна в точке a_i, а следовательно, 1-форма ω имеет тот же вычет, что и P_i. Для того чтобы задача была разрешимой, необходимо по меньшей мере, чтобы сумма этих вычетов была равна нулю (теорема 22е). Можно доказать (но это очень трудно), что это условие и достаточно: если оно выполнено, то существует решение проблемы Кузена — форму ω найти можно. Выясним теперь степень неопределенности задачи. Все решения получаются прибавлением к одному из них производной голоморфной 1-формы на W. Задача свелась к выяснению размерности $\mathbb{C}$-векторного пространства H голоморфных 1-форм на W. Рассмотрим группу гомологий W в размерности 1 (гл. VI, стр. 266). Можно доказать, что она изоморфна $\mathbb{Z}^{2g}$, где g — некоторое целое число, называемое *родом поверхности Римана* и являющееся *комплексной размерностью пространства H*. Этот род связан с одним понятием, обычно нечетко определяемым в математических курсах. Когда рассматривается «алгебраическая кривая» в проективном пространстве, то множество ее комплексных точек (включая бесконечно удаленные точки) имеет структуру римановой поверхности W (в случае уникурсальной кривой это будет сфера Римана $\hat{\mathbb{C}}$). То, что называют родом кривой, и есть как раз указанный здесь род g.

2°) Рассмотрим теперь проблему Кузена для функций. Можно указать условия, необходимые для того, чтобы эта проблема имела решение. В самом деле, если ϖ — голоморфная 1-форма, $\varpi \in H$, и P_i — мероморфная функция, заданная в окрестности точки a_i, то $P_i\varpi$ будет мероморфной 1-формой в окрестности a_i. Если существует такая мероморфная функция f на W, что для каждого i функция $f - P_i$ голоморфна в окрестности точки a_i, то $f\varpi$ является такой мероморфной 1-формой на W, что $f\varpi - P_i\varpi$ голоморфна в окрестности точки a_i. Следовательно, сумма вычетов форм $P_i\varpi$ должна быть равна нулю. Так должно быть для каждой формы $\varpi \in H$. Поскольку имеется g независимых голоморфных форм $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_g$, это даст g условий, которым должна удовлетворять система функций P_i. Здесь также можно доказать (доказательство очень сложно), что эти условия и достаточны для того, чтобы задача имела решение. Какова же при этом будет степень неопределенности? Ответ в нашем случае прост: каждая голоморфная функция постоянна (следствие 7 теоремы 12), а значит, решение определено с точностью до аддитивной постоянной. Эти результаты и аналогичные им были доказаны в предыдущем веке Риманом, Вейерштрассом и Абелем. Заметим, что для 1-форм имеется одно условие разрешимости и g степеней неопределенности, а для функций имеется g условий разрешимости и одна степень неопределенности. Между этими задачами имеет место своего рода двойственность.

Существует обобщение такого рода двойственности, что составляет содержание теоремы Римана — Роха, современные обобщения которой относятся к наиболее глубоким теоремам математики.

Рассмотрим в качестве частного случая сферу Римана $\hat{\mathbb{C}}$.

1°) Так как сфера в $\mathbb{R}^3$ односвязна (теорема 57 гл. VI), то ее род g равен нулю, а значит, ее группа гомологий сводится к $\{0\}$ (каждый 1-мерный цикл гомологичен 0 и даже гомотопен 0). Следовательно, пространство H голоморфных 1-форм сводится к $\{0\}$. Здесь это, впрочем, очевидно. Голоморфная 1-форма на $\hat{\mathbb{C}}$ является целой на $\mathbb{C}$. Но тогда если она не равна тождественно нулю, то в точке ∞ у нее обязательно полюс порядка $\geqslant 2$ (напомним, что $z^k\,dz$ имеет полюс порядка $k+2$ — см. стр. 396). Поэтому проблема Кузена для 1-форм будет разрешимой, если только сумма вычетов равна нулю, и ее решение единственно. Это решение можно получить непосредственно следующим образом. Для каждой точки $a_i \neq \infty$ в качестве главной части можно взять $P_i = A_i\,dz$, где A_i — полином относительно $\frac{1}{z-a_i}$ без свободного члена. Положим $c_{-1,i} = \operatorname{Res}_{a_i} P_i$. Для точки ∞ главную часть выберем в виде $P_\infty = c_{-1,\infty}\frac{dz}{z} + B\,dz$, где B — некоторый полином (напомним, что формы $\frac{dz}{z}$ и dz особые). Имеем $c_{-1,\infty} = \operatorname{Res}_\infty P_\infty$. Если $A = \sum\limits_{a_i \neq \infty} A_i$, то искомая форма ω необходимо имеет вид $\omega = A\,dz + R\,dz$, где R — полином. Если взять точку ∞, то должно иметь место равенство

$$c_{-1,\infty}\frac{dz}{z} + B\,dz = \sum_{a_i \neq \infty} c_{-1,i}\frac{dz}{z} + R\,dz.$$

Это дает, во-первых, условие $\sum\limits_{a_i \neq \infty} c_{-1,i} + (-c_{-1,\infty}) = 0$ — сумма вычетов должна равняться нулю; во-вторых, равенство $B = R$, чем единственным образом определяется R. Имеется одно условие разрешимости и нет никакой неопределенности.

2°) Перейдем к проблеме Кузена на $\hat{\mathbb{C}}$ для функций. Для каждой точки $a_i \neq \infty$ главной частью будет полином P_i от $\frac{1}{z-a_i}$ без свободного члена. Для точки ∞ это будет полином P_∞ от z без свободного члена. Положим $P = \sum\limits_{a_i \neq \infty} P_i$. Тогда должно выполняться равенство $f = P + R$, где R — полином. Пусть c_0 — свободный член полинома R. Записывая условие на бесконечности, получаем $P_\infty = R - c_0$, что определяет полином R с точностью до постоянной. Здесь нет никаких условий разрешимости, а степень неопределенности равна 1.

Вторая проблема Кузена в комплексной плоскости

Пусть задано замкнутое множество $\{a_i\}_{i \in I}$ изолированных точек из $\mathbb{C}$ и для каждого i целое число $p_i \geqslant 1$. Вторая проблема Кузена заключается в определении *комплексной* целой функции на $\mathbb{C}$, имеющей точки a_i в качестве нулей кратности p_i.

Теорема 30 (Вейерштрасс). *Каковы бы ни были последовательности точек a_i и чисел p_i, вторая проблема Кузена имеет решение. Все ее решения получаются умножением одного из них на произвольную целую функцию, не имеющую нулей, т. е. на функцию вида e^g, где g — произвольная целая функция.*

Доказательство. Пусть h — комплексная мероморфная функция в $\mathbb{C}$, имеющая простые полюсы a_i с вычетами p_i. По теореме 28 Миттаг-Леффлера такая функция существует. Пусть z_0 — фиксированная точка $\mathbb{C}$, отличная от a_i.

Рассмотрим интеграл $H(z) = \int\limits_{z_0}^{z} h(\zeta)\,d\zeta$ вдоль пути C^0 конечной длины, соединяющего точку z_0 с точкой z и не проходящего через точки a_i. При изменении пути в открытом односвязном множестве Ω из $\complement_{\mathbb{C}}\{a_i\}_{i \in I}$ интеграл не меняется и представляет собой некоторую голоморфную первообразную h_0 функции h в Ω (теорема 7). Однако так как окружность, охватывающая одну из точек a_i, не гомотопна нулю, то множество $\complement_{\mathbb{C}}\{a_i\}_{i \in I}$ не будет односвязным и, следовательно, предыдущий интеграл a priori имеет бесконечное множество возможных значений в зависимости от выбранного пути. Здесь разность между двумя этими значениями равна интегралу от $h(\zeta)\,d\zeta$ вдоль

C^0-цикла Γ конечной длины (замкнутого пути, идущего от z_0 до z_0). Поскольку плоскость односвязна, цикл Γ гомотопен 0, а значит, гомологичен 0 в $\mathbb{C}$, и к нему можно применить теорему 19 о вычетах: этот интеграл равен произведению $2i\pi$ на сумму вычетов функции h. *Однако все вычеты h — целые числа.* Следовательно, разность между двумя значениями H в точке z равна целому кратному $2i\pi$, а значит, $e^{H(z)}$ *имеет вполне определенное значение.*

Так определенная функция e^H голоморфна и не имеет нулей в $\complement_{\mathbb{C}}\{a_i\}_{i\in I}$. В самом деле, пусть z_1 — точка этого открытого множества и Δ — круг с центром в z_1, содержащийся в этом открытом множестве. Для каждого $z\in\Delta$ можно выбрать значение H по формуле $H(z)=\int\limits_{z_0}^{z_1}+\int\limits_{z_1}^{z}$, где первый интеграл вычисляется по некоторому раз навсегда фиксированному пути, а второй — по пути, лежащему в Δ. Поскольку круг Δ односвязен, то этот второй интеграл является голоморфной функцией от z (первообразная для h в Δ) и, следовательно, является также соответствующим значением H, а значит, функция e^H голоморфна и не имеет нулей. В точке z_0 она принимает значение, равное 1.

Рассмотрим теперь одну из точек a_i. Имеем $h=\dfrac{p_i}{z-a_i}+k$, где функция k голоморфна в окрестности точки a_i. Если взять различные значения логарифма и $K(z)=\int\limits_{z_0}^{z}k(\zeta)\,d\zeta$, то различные значения $H(z)$ можно записать в виде $\int\limits_{z_0}^{z}\dfrac{p_i\,d\zeta}{\zeta-a_i}+\int\limits_{z_0}^{z}k(\zeta)\,d\zeta$, или же $p_i\ln\left(\dfrac{z-a_i}{z_0-a_i}\right)+K(z)$, откуда $e^{H(z)}=\left(\dfrac{z-a_i}{z_0-a_i}\right)^{p_i}e^{K(z)}$. В силу проведенного выше доказательства для окрестности точки z_1 функция e^K голоморфна и не имеет нулей в окрестности точки a_i, так что e^H имеет точку a_i нулем кратности p_i. Значит, эта функция $f=e^H$ является решением проблемы Кузена. Поскольку множество $\complement_{\mathbb{C}}\{a_i\}_{i\in H}$ связно, то функция в этом открытом множестве определена с точностью до ее логарифмической производной. Таким образом, f — единственная голоморфная функция с логарифмической производной, равной h, такая, что $f(z_0)=1$.

Пользуясь методом Миттаг-Леффлера определения h, исследуем подробнее вид функции f.

Исходя из точки $b = z_0$, отличной от всех точек a_i, определим ряд (VII, 4; 35):

$$h(z) = \sum_i \left(\frac{p_i}{z - a_i} - Q_i(z) \right), \qquad \text{(VII, 4; 56)}$$

равномерно сходящийся в дополнении к точкам a_i.

Здесь Q_i—некоторый полином. Обозначим через R_i единственную первообразную этого полинома, равную нулю в точке z_0. Тогда

$$f(z) = e^{H(z)} = \prod_i \left(\left(\frac{z - a_i}{z_0 - a_i} \right)^{p_i} e^{-R_i(z)} \right). \qquad \text{(VII, 4; 57)}$$

[Непосредственно видно, что мы имеем здесь бесконечное произведение, принимающее значение 1 в точке z_0, логарифмическая производная которого локально равномерно сходится к h в связном открытом множестве $\complement_{\mathbb{C}} \{a_i\}_{i \in I}$, а значит, в силу теоремы 112 гл. IV сходится локально равномерно в том же открытом множестве и, очевидно, обладает требуемыми свойствами.]

Обычно берут $z_0 = b = 0$ (если окажется, что эта точка совпадает с одной из точек a_i, например a_0, то надо сначала выделить член z^{p_0}, соответствующий кратности этого нуля, а затем заняться поисками функции, имеющей другие нули с заданными кратностями). Если учесть (VII, 4; 37), то получится функция вида

$$f(z) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{a_i} \right)^{p_i} e^{p_i \left(\frac{z}{a_i} + \frac{z^2}{2a_i^2} + \ldots + \frac{z^{r_i}}{r_i a_i^{r_i}} \right)} \right). \qquad \text{(VII, 4; 58)}$$

Совершенно ясно, что отношение двух решений является произвольной целой функцией без нулей. Согласно следствию 4 теоремы 10, она представляет собой экспоненту некоторой произвольной целой функции.

Замечание 1. Тот факт, что $\mathbb{C}$ односвязно, сыграл существенную роль при доказательстве теоремы. Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{C}$. Как мы уже видели (замечание 1 на стр. 409), первая проблема Кузена всегда имеет решения в Ω. Значит, можно построить функцию h, фигурирующую в предыдущем доказательстве. Но величина $H(z)$ не будет более определена с точностью до целого кратного $2i\pi$, поскольку теорема о вычетах применима лишь тогда, когда кривая Γ гомологична 0, а это возможно только тогда, когда множество Ω

односвязно. Однако мы располагаем некоторой свободой, поскольку выбор функции h не единствен. Можно показать, что для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ задача всегда имеет решение. Не так будет обстоять дело для поверхностей Римана даже тогда, когда первая проблема Кузена разрешима. Соответствующий пример мы приведем позже.

Замечание 2. Можно было бы искать функцию $\vec{f}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, удовлетворяющую тем же условиям. Но такое обобщение тривиально: достаточно умножить скалярную функцию, имеющую заданные нули, на фиксированный ненулевой вектор из $\vec{F}$.

Замечание 3. Функцию f мы строили так, чтобы она имела нули только в точках a_i и только порядка p_i. Можно потребовать, чтобы она имела нули *по крайней мере* в точках a_i (но, возможно, и в других точках) порядков *по крайней мере* p_i, т. е. чтобы в кольце целых функций функция f делилась бы на каждую из функций $(z-a_i)^{p_i}$. Тогда функция, построенная при доказательстве, снова является решением задачи, а все другие функции можно получить умножением ее на произвольную целую функцию (с нулями или без них).

Важные частные случаи. Предположим, что ряд $\sum_i p_i/|a_i|$ сходится. Тогда можно написать следующее решение:

$$f(z)=\prod_{i=0}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_i}\right)^{p_i}. \qquad \text{(VII, 4; 59)}$$

В самом деле, согласно теореме 70 гл. II, написанное произведение локально равномерно сходится в области, дополнительной к нулям.

Если написанный выше ряд не сходится, но сходится ряд $\sum_i \frac{p_i}{|a_i|^{r+1}}$, то решение можно записать в виде

$$f(z)=\prod_{i=0}^{\infty}\left(\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\frac{z}{a_i}+\frac{z^2}{2a_i^2}+\dots+\frac{z^r}{ra_i^r}}\right)^{p_i}. \qquad \text{(VII, 4; 60)}$$

Это получается предыдущим способом, если учесть (VII, 4; 37).

Если $\sum_i \frac{p_i}{|a_i|^{r+1}}=+\infty$ при любом r, то будет иметь место формула (VII, 4; 58), где r_i стремится к бесконечности при a_i, стремящемся к бесконечности.

Следствие 1. *Справедлива формула*

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}\right) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \qquad \text{(VII, 4; 61)}$$

где бесконечные произведения локально сходятся в $\mathbb{C}\mathbb{Z}$.

В самом деле, $\frac{\sin \pi z}{\pi z}$ является единственной голоморфной функцией с логарифмической производной $\pi \operatorname{ctg} \pi z - 1/z$, равной 1 в начале координат. Остается применить (VII, 4; 43).

Замечание. Подобно тому как на стр. 416 мы сравнивали полученные разложения с разложениями рациональных дробей на простые дроби, можно сравнить соотношение (VII, 4; 61) с разложением полинома на простые сомножители. Для обеспечения сходимости мы пишем здесь $\prod \left(\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}\right)$, а не $\prod (z-n)$. С другой стороны, так как полином без нулей есть постоянная (теорема Даламбера), то в случае полиномов сохраняется только произвольный постоянный множитель. Сохраняется и произвольная целая функция без нулей. Интересно отметить, что для функции sin она постоянна.

Следствие 2. *Пусть* $\{a_i\}_{i\in I}$, $\{b_j\}_{j\in J}$ — *два замкнутых непересекающихся множества изолированных точек из* $\mathbb{C}$ *и* $i \to p_i$, $j \to q_j$ — *два отображения множеств* I, J *в множество целых чисел* > 0. *Тогда на* $\mathbb{C}$ *существует мероморфная комплекснозначная функция* f, *имеющая точки* a_i *нулями кратности* p_i, *а точки* b_j — *полюсами порядков* q_j *(вторая общая проблема Кузена). Если* f — *одна из таких функций, то все другие функции, обладающие этими же свойствами, получаются умножением ее на произвольную целую функцию без нулей.*

Доказательство. Пусть g (соответственно h) — целая функция, имеющая нулями кратности p_i (соответственно q_j) точки a_i (соответственно b_j). Тогда g/h и будет функцией, удовлетворяющей условиям следствия.

Следствие 3. *Каждая мероморфная на* $\mathbb{C}$ *функция* $\vec{f}$ *со значениями в банаховом пространстве* $\vec{F}$ *является отношением целой функции со значениями в* $\vec{F}$ *и целой комплекснозначной функции.*

Доказательство. Пусть b_i — полюсы функции $\vec{f}$ порядков q_i. Мы знаем, что существует целая скалярная функция h, имеющая точки b_l нулями кратности q_l. Тогда $\vec{f}h$ будет целой функцией $\vec{g}$ со значениями в $\vec{F}$ и, следовательно, $\vec{f}=\frac{\vec{g}}{h}$.

Следствие 4. *Пусть $\{a_i\}_{i\in I}$ — замкнутое множество изолированных точек $\mathbb{C}$, и пусть $i\to\vec{c}_i$ — отображение I в банахово пространство $\vec{F}$. Тогда на $\mathbb{C}$ существует целая функция $\vec{f}$ со значениями в $\vec{F}$, принимающая в точках a_i значение $\vec{c}_i$. Если $\vec{f}$ — такая функция, то все другие функции получаются прибавлением к ней произвольной целой функции, обращающейся в нуль во всех точках a_i.*

Доказательство. Пусть h — скалярная функция, имеющая точки a_i в качестве простых нулей (вторая проблема Кузена). Тогда если функция $\vec{f}$ существует, то $\vec{f}/h$ является мероморфной функцией, имеющей в качестве простых полюсов точки a_i, в которых $\vec{c}_i\neq\vec{0}$, а вычеты равны $\vec{c}_i/h'(a_i)$. Обратно, пусть $\vec{g}$—функция, удовлетворяющая этим условиям (первая проблема Кузена). Тогда функция $\vec{f}=\vec{g}h$ — искомая. Очевидно, все остальные функции получаются прибавлением к $\vec{f}$ целой функции, обращающейся в нуль во всех точках a_i, т. е. умножением произведения h на произвольную целую функцию.

Пример. Найдем функцию $\vec{f}$, принимающую такие значения $\vec{c}_n$ в точках $n\in\mathbb{Z}$, что $\sum\limits_{n\neq 0}\|\vec{c}_n\|/n<+\infty$. Здесь $h(z)$ может быть равной $\frac{\sin\pi z}{\pi}$. Функция $\vec{g}$ должна иметь вычет $\vec{c}_n$ в точке n. Поскольку ряд $\sum\limits_{n\neq 0}\frac{\|\vec{c}_n\|}{n}$ сходится, можно взять

$$\vec{g}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\vec{c}_n}{z-n},\quad \vec{f}(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\vec{c}_n}{z-n}.$$

Замечание 1. Предыдущая и даже более общая задача уже была решена в замечании 2, следующем за теоремой 28.

Замечание 2. В случае, когда имеется конечное число точек, мы получаем интерполяционную формулу Лагранжа. В самом деле, в качестве h можно взять функцию $(z-a_0)(z-a_1)\ldots$

$\ldots(z-a_n)$. Тогда

$$h'(z)=\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{z-a_i}\right)h(z),\quad h'(a_i)=\prod_{j\neq i}(a_i-a_j),\qquad \text{(VII, 4; 61}_2\text{)}$$

откуда

$$\begin{aligned}\vec{g}(z)&=\sum_i\frac{\vec{c}_i}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}\frac{1}{z-a_i},\\ \vec{f}(z)&=\sum_i\vec{c}_i\prod_{j\neq i}\frac{z-a_j}{a_i-a_j}.\end{aligned}\qquad \text{(VII, 4; 61}_3\text{)}$$

Теорема 32 (Адамар). *Пусть f — комплексная целая функция на $\mathbb{C}$, допускающая для достаточно больших значений $|z|$ оценку*

$$|f(z)|\leqslant Ce^{|z|^{\rho}}.\qquad \text{(VII, 4; 62)}$$

Тогда если a_i — ее нули кратности p_i, то ряд $\sum\limits_{a_i\neq 0}\frac{p_i}{|a_i|^k}$ сходится для любого вещественного числа $\rho>0$. Если $\rho<r+1$, где r — целое число $\geqslant 0$, то функцию f можно выразить в виде произведения множителей Вейерштрасса

$$f(z)=e^{P(z)}z^{p_0}\sum_{a_i\neq 0}\left(\left(1-\frac{z}{a_i}\right)e^{\left(\frac{z}{a_i}+\frac{z}{2a_i^2}+\ldots+\frac{z^r}{ra_i^r}\right)}\right)^{p_i},\qquad \text{(VII, 4; 63)}$$

локально равномерно сходящегося в $\complement\{a_i\}_{i\in I}$, где $p_0\geqslant 0$ — кратность нуля в начале координат, а P — полином степени $\leqslant r$.

Доказательство этой теоремы очень сложно, и мы его приводить не будем. Это одна из первых теорем, доказанных Адамаром (1892 г.; ему тогда было 27 лет), и притом одна из наиболее впечатляющих. (Мемуар, в котором содержалась эта теорема, и ряд других столь же замечательных теорем были удостоены Большой премии Французской Академии наук.)

Продемонстрируем силу этой теоремы. Рассмотрим, например, функцию $\sin\pi z$. Согласно неравенству

$$|\sin\pi z|=\left|\frac{e^{i\pi z}-e^{-i\pi z}}{2i}\right|\leqslant e^{\pi|z|},\qquad \text{(VII, 4; 64)}$$

эта функция допускает указанную в теореме оценку с показателем $\rho=1$. Отсюда следует, что для $k>1$ имеет место неравенство $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^k}<\infty$ (которое мы уже знаем) и что при $r=1$

$$\sin \pi z = e^{\alpha z+\beta} z \prod_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}\right), \qquad \text{(VII, 4; 65)}$$

где α и β — некоторые постоянные. Функция $\sin \pi z$ нечетна. Функция z в правой части нечетна, а бесконечное произведение четно. Значит, $e^{\alpha z+\beta}$ должна быть четной функцией, а это означает, что $\alpha=0$. Остается заметить, что $\frac{\sin \pi z}{z}$ стремится к π при z, стремящемся к 0, и что все члены бесконечного произведения при $z=0$ равны 1, откуда следует, что $e^{\beta}=\pi$. Отсюда снова вытекает тождество (VII, 4; 61). Таким образом, *формула* (VII, 4; 61) *непосредственно получается из теоремы Адамара без использования каких-либо предварительных формул.*

Теорема Адамара говорит о том, что если мы знаем нули функции и их кратности, причем выполнено некоторое условие на ее рост (VII, 4; 62), то тем самым мы почти знаем саму функцию, поскольку она определяется с точностью до множителя e^P, где P — некоторый полином степени $\leqslant r$.

Предположим, в частности, что неравенство (VII, 4; 62) имеет место с $\rho<1$. Тогда можно взять $r=0$, и множитель e^P сведется к постоянной. Именно так и получается, когда f—полином. Таким образом, теорема 32 содержит как частный случай такое существенное обобщение теоремы Даламбера:

Следствие. *Если целая скалярная функция на* $\mathbb{C}$ *допускает оценку* (VII, 4; 62) *с* $\rho<r+1$ *и не имеет нулей, то она имеет вид* e^P, *где* P — *полином степени* $\leqslant r$. *В частности, если* $\rho<1$, *то она постоянна.*

Можно сказать еще и так: *функция* f, *удовлетворяющая соотношению* (VII, 4; 62) *с* $\rho<1$ *и не являющаяся полиномом, имеет бесконечное множество нулей* (если бы она имела их только конечное число, то она имела бы вид произведения $C\prod\limits_i\left(1-\frac{z}{a_i}\right)$, т. е. была бы полиномом), *а следовательно, бесконечное множество раз принимает любое значение* c (вместо f следует рассмотреть функцию $f-c$). Как показывает пример нигде не обращающейся в нуль функции e^z, это утверждение неверно для $\rho\geqslant 1$.