§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О ВЫЧЕТАХ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теорема 19 о вычетах позволяет сводить вычисление некоторых определенных интегралов в комплексной плоскости к вычислению вычетов, т. е. коэффициентов разложений в окрестности некоторых особых точек. Однако и многие интегралы на вещественной оси, не содержащие никаких функций комплексной переменной, с помощью подходящих преобразований могут быть вычислены тем же самым способом. Это один из наиболее сильных методов вычисления определенных интегралов, для которых соответствующие неопределенные интегралы в конечном виде не берутся.

Пример 1. *Интеграл от 0 до 2π дробно-рациональной функции от тригонометрических функций.* Пусть $\vec{R}=\frac{\vec{P}}{Q}$ — рациональная дробь от двух комплексных переменных, $\vec{P}$ — полином с коэффициентами в банаховом пространстве $\vec{F}$, а Q — полином с комплексными коэффициентами. Предположим, что нам надо вычислить

$$\int_0^{2\pi} \vec{R}(\cos\theta,\ \sin\theta)\,d\theta. \qquad \text{(VII, 5; 1)}$$

Совершим замену переменной $e^{i\theta}=z$. Тогда формально получим

$$\int_\Gamma \vec{R}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{i}\frac{dz}{z}, \qquad \text{(VII, 5; 2)}$$

где Γ — тригонометрическая окружность, пробегаемая в положительном направлении. Для того чтобы обосновать такую замену, заметим, что для вычисления последнего интеграла от дифференциальной формы можно параметризовать кривую Γ с помощью функции $z=e^{i\theta}$. В силу (VI, 6; 69) мы получим интеграл (VII, 5; 1), а теперь интеграл (VII, 5; 2) можно вычислить по внутренней теореме 19 или внешней теореме 19_2 о вычетах.

Предположим, например, что надо вычислить интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta},\ \text{где } a\in\mathbb{C},\ a\notin[-1,\ +1]. \qquad \text{(VII, 5; 3)}$$

Согласно сказанному выше, имеем

$$\int_\Gamma \frac{1}{a+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{1}{i}\frac{dz}{z}=\int_\Gamma \frac{2}{i}\frac{dz}{z^2+2az+1}, \qquad \text{(VII, 5; 4)}$$

где трехчлен $z^2+2az+1$ имеет два корня, произведение которых равно 1. Один из них лежит в тригонометрическом круге Δ, ограниченном кривой Γ. Обозначим его через $\alpha=-a+\sqrt{a^2-1}$, считая, что корень выбирается соответствующим образом: если, например, a вещественно и >1, то выбирается корень >0, если же $a<-1$, то берется корень <0. Вычет в точке α равен $\frac{2}{i}\frac{1}{2\alpha+2a}$, что дает

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \qquad \text{(VII, 5; 5)}$$

Можно было бы в качестве упражнения применить обычный метод, положив $\operatorname{tg}\theta/2=t$. Подчеркнем, что по нашему методу мы вычисляли вычет в точке α, а не искали первообразную функции $\frac{1}{a+\cos\theta}$. В порядке контроля отметим, что при a, стремящемся к ∞, наш интеграл очевидным образом эквивалентен интегралу $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a}=\frac{2\pi}{a}$.

Пример. 2. *Интегралы по вещественной оси.* Пусть $\vec{R}=\frac{\vec{P}}{Q}$ — рациональная дробь, где $\vec{P}$ — полином с коэффициентами в банаховом пространстве $\vec{F}$ над полем $\mathbb{C}$, а Q — полином с комплексными коэффициентами. Ставится задача вычисления интеграла $\int_{\mathbb{R}}\frac{\vec{P}}{Q}dx$. Этот интеграл существует, если, с одной стороны, Q не имеет вещественных нулей и если, с другой стороны, (степень $Q)\geqslant$(степень $\vec{P})+2$ (интегрируемость на бесконечности).

Можно рассмотреть и несколько более общий случай, считая, что Q имеет, возможно, вещественные нули кратности 1. В этом случае для каждого из таких нулей a_i надо будет вычислять главное значение интеграла по Коши: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{|x-a_i|\geqslant\varepsilon}$ (гл. IV, стр. 736). Точно так же можно предполагать, что (степень $Q)\geqslant$(степень $\vec{P})+1$, если ограничиться рассмотрением главного значения Коши $\lim\limits_{A\to\infty}\int_{-A}^{+A}$ на бесконечности. Последнее возможно потому, что $\vec{P}/Q$ является суммой нечетной рациональной дроби, интегрирование которой по Коши дает 0, и четной рациональной дроби $\vec{P}_0/Q_0$, для которой (степень Q_0) $\geqslant$ (степень P_0) + 2, поскольку разность степеней $\geqslant 1$ и четна. Окончательно задача сводится к вычислению

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\,dx = \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_{\substack{|x-a_i| \geqslant \varepsilon \\ |x| \leqslant A}} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\,dx, \qquad \text{(VII, 5; 6)}$$

где a_i — вещественные нули полинома Q.

Сначала, разлагая $\vec{P}/Q$ на простые дроби, можно вычислить v. p. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx$. В силу условий, налагаемых на степени, полиномиальная часть равна нулю. Поэтому

$$\frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} = \sum_i \left(\frac{c_{i,-1}}{x-a_i} + \frac{c_{i,-2}}{(x-a_i)^2} + \ldots + \frac{c_{i,-k_i}}{(x-a_i)^{k_i}} \right), \qquad \text{(VII, 5; 7)}$$

где a_i — нули полинома Q (вещественные или комплексные).

При $k \geqslant 2$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(x-a_i)^k} = \left[\frac{1}{1-k}\, \frac{1}{(x-a_i)^{k-1}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Остается вычислить v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-a_i}$. Предположим сначала, что $\operatorname{Im} a_i > 0$. Выбирая $-\pi < \arg(z-a_i) < 0$, можно для $\operatorname{Im} z < \operatorname{Im} a_i$ или $\operatorname{Im}(z-a_i) < 0$ рассмотреть непрерывное значение функции $z \to \ln(z-a_i)$. Этот логарифм $\mathbb{C}$-дифференцируем, а его производная равна $z \to \frac{1}{z-a_i}$ (теорема 8). Следовательно, функция $x \to \ln(x-a_i)$, определенная на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$-дифференцируема и ее производная равна $\frac{1}{x-a_i}$. Значит,

$$\int_{-A}^{+A} \frac{dx}{x-a_i} = \ln(A-a_i) - \ln(-A-a_i) =$$

$$= \ln\left| \frac{A-a_i}{-A-a_i} \right| + i\,(\arg(A-a_i) - \arg(-A-a_i)). \qquad \text{(VII, 5; 8)}$$

Поскольку $\left| \frac{A-a_i}{-A-a_i} \right|$ стремится к 1 при A, стремящемся к бесконечности, первый член правой части стремится к нулю, а второй член, очевидно, стремится к $i\pi$. Проводя аналогичные вычисления для $\operatorname{Im} a_i < 0$ и тривиальное вычисление для $\operatorname{Im} a_i = 0$ (см. формулу (IV, 9; 119)), получим

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x - a_i} = \begin{cases} i\pi, & \text{если } \operatorname{Im} a_i > 0, \\ 0, & \text{если } \operatorname{Im} a_i = 0, \\ -i\pi, & \text{если } \operatorname{Im} a_i < 0, \end{cases} \qquad \text{(VII, 5; 9)}$$

откуда и вытекает требуемый результат:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\, dx = i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} \right). \qquad \text{(VII, 5; 10)}$$

Здесь мы воспользовались функцией $\ln$ комплексной переменной, что естественно, поскольку числа a_i комплексны. Однако мы вовсе не пользовались криволинейным интегралом $\int \vec{f}(z)\, dz$ в комплексной плоскости. Нами был использован только интеграл от комплекснозначной функции или функции со значениями в банаховом пространстве над $\mathbb{R}$ относительно меры dx, укладывающийся в рамки гл. IV. Вычетов не было, а вычисления велись с помощью первообразных. Теперь мы получим тот же результат, вычисляя интегралы в комплексной плоскости с помощью вычетов. Предположим сначала, что (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+ 2$ и все a_i невещественны. Интеграл $\int \frac{\vec{P}}{Q}\, dz$ вдоль полуокружности γ_A: $|z| = A$, $0 < \arg z < \pi$, при A, стремящемся к бесконечности, стремится к 0, поскольку на этой полуокружности норма $\|\vec{P}/Q\|$ мажорируема постоянной $1/A^2$, а длина полуокружности равна πA. Поэтому можно написать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\, dx = \lim_{A \to \infty} \int_{-A}^{+A} \frac{\vec{P}}{Q}\, dx =$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(\int_{[-A,\, +A]} \frac{\vec{P}}{Q}\, dz + \int_{\gamma_A} \frac{\vec{P}}{Q}\, dz \right), \qquad \text{(VII, 5; 11)}$$

где γ_A обходится в направлении от A к $-A$. Но тогда $\Gamma_A = [-A, +A] \cup \gamma_A$ есть кривая, кусочно принадлежащая классу C^∞, являющаяся псевдограницей некоторого многообразия с псевдограницей, а именно полукруга Δ_A: $|z| \leqslant A$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Поскольку полукруг Δ_A ориентирован с помощью $\mathbb{C}$, то Γ_A обходится в положительном направлении. Из общей теоремы

Стокса 38 гл. VI следует, что в этом случае применима формула Стокса (упр. 2°) на стр. 232), а следовательно, применима и теорема 19 о вычетах. Соответствующий интеграл равен сумме вычетов в полюсах, содержащихся в этом полукруге, умноженной на $2i\pi$ (лишь бы только не было полюсов на γ_A). При достаточно больших A эта сумма не зависит от A и равна сумме вычетов в полюсах, содержащихся в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\, dx = 2i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q}. \tag{VII, 5; 12}$$

Отсюда a posteriori вытекает, что особая форма контура в $\mathbb{C}$, а именно Γ_A, роли не играла и что произвольный контур C^0 конечной длины, обходящий один раз в положительном направлении все полюсы функции $\vec{R}$ в верхней полуплоскости, дал бы тот же результат! Однако мы должны были исходить из $\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{R}(x)\, dx$ и перейти к $\int_{\Gamma_A}$ для того, чтобы быть уверенными, что $\lim_{A\to\infty} \int_{\Gamma_A} = \int_{R}$.

Можно было также воспользоваться другой полуокружностью γ'_A: $|z| = A$, $-\pi < \arg z < 0$, проходимой, как всегда, в направлении от $+A$ к $-A$, и получить на этот раз, что $\Gamma'_A = [-A, +A] \cup \gamma'_A$ обходится в отрицательном направлении, т. е. в направлении, противоположном обходу границы полукруга Δ'_A: $|z| \leqslant A$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, ориентированного плоскостью $\mathbb{C}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\, dx = -2i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q}. \tag{VII, 5; 13}$$

Все три результата (VII, 5; 10), (VII, 5; 12) и (VII, 5; 13) совпадают. В самом деле, сумма вычетов, включая вычет на бесконечности, согласно следствию из теоремы 19_2, равна нулю, а в силу неравенства (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+ 2$ вычет на бесконечности равен нулю.

Предположим теперь, что (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+ 1$, причем, как и ранее, a_i невещественны. Интегралом по кривой γ_A пренебрегать уже нельзя. Имеем:

$$\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} = \frac{\vec{c}_{\infty,-1}}{z} + \vec{g}_\infty(z), \tag{VII, 5; 14}$$

где $-\vec{c}_{\infty,-1}=\operatorname{Res}_\infty \frac{\vec{P}}{Q}$ и $\|\vec{g}(z)\|\leqslant \text{const}\,\frac{1}{|z|^2}$ для достаточно больших $|z|$. Поэтому $\int\limits_{\gamma_A}$ стремится к $\vec{c}_{\infty,-1}\int\limits_{\gamma_A}\frac{dz}{z}=i\pi\vec{c}_{\infty,-1}$, что дает

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}}{Q}dx=\lim_{A\to\infty}\int\limits_{-A}^{A}=\lim_{A\to\infty}\left(\int\limits_{[-A,\,A]}\frac{\vec{P}}{Q}dz+\int\limits_{\gamma_A}\frac{\vec{P}}{Q}dz\right)-i\pi\vec{c}_{\infty,-1}=$$

$$=2i\pi\sum_{\operatorname{Im}a_i>0}\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}+i\pi\operatorname{Res}_\infty\frac{\vec{P}}{Q}. \quad \text{(VII, 5; 15)}$$

Применение другой полуокружности дало бы

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}}{Q}dx=-2i\pi\sum_{\operatorname{Im}a_i<0}\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}-i\pi\operatorname{Res}_\infty\frac{\vec{P}}{Q}. \quad \text{(VII, 5; 16)}$$

Снова здесь все три результата (VII, 5; 10), (VII, 5; 15) и (VII, 5; 16) совпадают, так как сумма вычетов (включая $\operatorname{Res}_\infty$) равна нулю.

Предположим теперь, что имеется единственный нуль a_i полинома Q, лежащий на $\mathbb{R}$. Главное значение равно пределу интеграла по дополнению при ε, стремящемся к 0, к симметричному интервалу $[a_i-\varepsilon,\ a_i+\varepsilon]$. Присоединим полуокружность $\gamma_{i,\varepsilon}$: $|z-a_i|=\varepsilon$, $\operatorname{Im}z\geqslant 0$, пробегаемую в направлении от $a_i-\varepsilon$ к $a_i+\varepsilon$. Если учесть разложение $\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}=\frac{\vec{c}_{i,-1}}{z-a_i}+\vec{g}_i(z)$, где величина $\|\vec{g}_i(z)\|$ ограничена при z, стремящемся к a_i, то интеграл по этой полуокружности будет при ε, стремящемся к 0, стремиться к $-i\pi\vec{c}_{i,-1}=-i\pi\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}$. Если на оси $\mathbb{R}$ имеется несколько полюсов, то то же самое построение следует провести для каждого из них, так что окончательно получаем

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}}{Q}dx=\lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\limits_{\substack{|x|\leqslant A\\ |x-a_i|\geqslant\varepsilon,\ a_i\in\mathbb{R}}}\frac{\vec{P}}{Q}dx=$$

$$=\left(\lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int\limits_{\Gamma_{A,\,\varepsilon}}\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}dz\right)+i\pi\operatorname{Res}_\infty\frac{\vec{P}}{Q}+\sum_{a_i\in\mathbb{R}}i\pi\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}=$$

$$=2i\pi\sum_{\operatorname{Im}a_i>0}\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}+i\pi\sum_{\operatorname{Im}a_i=0}\operatorname{Res}_{a_i}\frac{\vec{P}}{Q}+i\pi\operatorname{Res}_\infty\frac{\vec{P}}{Q}, \quad \text{(VII, 5; 17)}$$

где $\Gamma_{A,\varepsilon}$ — кривая, пробегаемая в положительном направлении, к которой применяется теорема о вычетах:

$$\gamma_A:\ |z| = A,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0.$$

Применение нижних полуокружностей дало бы

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}}{Q}\,dx = -2i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - -i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - i\pi \operatorname{Res}_{\infty} \frac{\vec{P}}{Q}. \qquad \text{(VII, 5; 18)}$$

Так как сумма вычетов равна нулю, то все три результата совпадают.

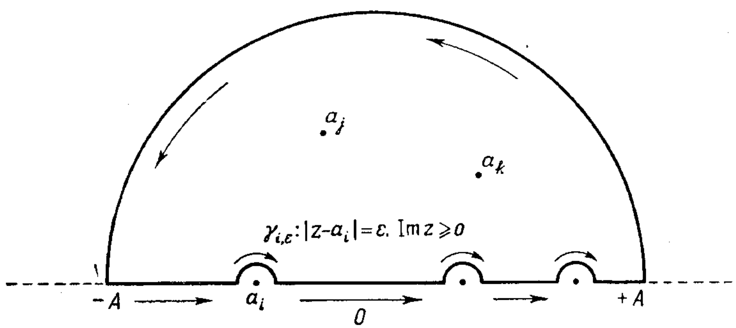

Рис. 14.

Из этих формул видно, что вычет на бесконечности играет ту же роль, что и вычеты в полюсах, расположенных на $\mathbb{R}$. Каждый из полюсов делится как бы на две половины, относящиеся к верхней и нижней полуплоскостям.

Во всех рассуждениях существенную роль играла следующая лемма:

Лемма. *Если на некоторой дуге S окружности радиуса R функция $\vec{f}(z)$ по норме мажорируема $\frac{\text{const}}{R^\alpha}$, то норма $\left\| \int_S \vec{f}(z)\,dz \right\|$ будет мажорируема $\frac{\text{const}}{R^{\alpha-1}}$. Следовательно, для $\alpha > 1$ этот интеграл стремится к 0 при R, стремящемся к бесконечности, а для $\alpha < 1$ стремится к 0 при R, стремящемся к нулю.*

Нам часто придется иметь дело с этой оценкой.

Полученные результаты можно подытожить в виде следующей теоремы:

Теорема 32. *Пусть $\vec{P}/Q$ — рациональная дробь, где полином $\vec{P}$ имеет коэффициенты, принадлежащие банахову пространству $\vec{F}$, а Q имеет комплексные коэффициенты, причем нули a_i полинома Q невещественны или же вещественны и порядка* 1, *а* (*степень* Q) $\geqslant$ (*степень* $\vec{P}$) $+ 1$. *Тогда*

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}\,dx =$$

$$= 2i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{\infty} \frac{\vec{P}}{Q} \right) =$$

$$= -2i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} + \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{\infty} \frac{\vec{P}}{Q} \right) =$$

$$= i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} - \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} \frac{\vec{P}}{Q} \right). \qquad \text{(VII, 5; 19)}$$

Приложение к вычислению сверток[1])

Сверткой двух функций f и g вещественной переменной x называется функция h, определенная формулой

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt \equiv f * g(x) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Естественно, что для сходимости интегралов на функции f и g приходится налагать некоторые ограничения. Если, например, $f \in L^\infty$, $g \in L^\infty$, то

$$|h(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt \leqslant \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1}$$

и свертка определена при всех x. Аналогично, она определена для всех x при $f \in L^2$ и $g \in L^2$, причем

$$|h(x)|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|^2\,dt \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\,dt \leqslant \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

[1]) В этом пункте автор часто ссылается на раздел «Распределения, свертка, интеграл Фурье», который он предполагал добавить к книге в окончательной редакции.

В связи с отсутствием этого раздела в текст внесен ряд добавлений и изменений. — *Прим. ред.*

Нетрудно проверить, что в обоих случаях свертка $f*g(x)$ является непрерывной ограниченной функцией.

Если $f,\ g\in L^1$, то, пользуясь теоремой Фубини, можно показать, что свертка $f*g(x)$ определена почти всюду и также принадлежит L^1.

Если μ — мера Радона на $\mathbb{R}$ с компактным носителем, то для любой непрерывной функции определена свертка

$$f*\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,d\mu(t).$$

Если, например, $\mu=\delta_{(a)}$, то $f*\delta_{(a)}=\tau_{(a)}f(x)=f(x-a)$. Отметим еще, что операция свертки коммутативна [1]).

Перейдем теперь к вычислениям. Пусть a и b невещественны. Вычислим $\frac{1}{x-a}*\frac{1}{x-b}$. Обе эти функции принадлежат L^2, поэтому их свертка

$$\frac{1}{x-a}*\frac{1}{x-b}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(t-a)(x-t-b)} \qquad \text{(VII, 5; 20)}$$

будет непрерывной и ограниченной функцией. Мы приходим к интегралу по $\mathbb{R}$ от рациональной дроби. Она имеет полюсы при $t=a$, $t=x-b$; соответствующие вычеты равны

$$\mathrm{Res}_a=\frac{1}{x-a-b},\quad \mathrm{Res}_{x-b}=-\frac{1}{x-a-b}. \qquad \text{(VII, 5; 21)}$$

Сумма этих вычетов равна нулю, как это и должно было быть, поскольку вычет в бесконечности равен нулю. Поэтому получаем следующий результат:

Теорема 33. *Если числа a и b невещественны, то*

$$\frac{1}{x-a}*\frac{1}{x-b}=\begin{cases}\dfrac{2i\pi}{x-a-b}, & \text{если } \operatorname{Im}a>0,\ \operatorname{Im}b>0,\\ -\dfrac{2i\pi}{x-a-b}, & \text{если } \operatorname{Im}a<0,\ \operatorname{Im}b<0,\\ 0, & \text{если } \operatorname{Im}a \text{ и } \operatorname{Im}b \text{ различных знаков.}\end{cases} \qquad \text{(VII, 5; 22)}$$

---

[1]) О более общем определении свертки см., например, книгу Л. Шварца «Математические методы для физических наук», «Мир», М., 1965. — *Прим. ред.*

Отсюда дифференцированием по a и b можно получить

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\frac{m!}{(x-a)^{m+1}} * \frac{n!}{(x-b)^{n+1}} = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} 2i\pi \frac{(m+n)!}{(x-a-b)^{m+n+1}} \qquad \text{(VII, 5; 23)}$$

($+1$, -1 *или* 0 *в зависимости от знаков* $\operatorname{Im} a$ *и* $\operatorname{Im} b$).

Если теперь понадобится вычислить свертку двух рациональных дробей, равных нулю на бесконечности и не имеющих вещественных полюсов, то можно либо непосредственно применить теорему 32, либо произвести разложение на простые дроби, а затем применить формулы (VII, 5; 22) и (VII, 5; 23), вычисляя свертки почленно.

В теории вероятностей встречается (в связи с законом Коши) свертка $\frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2} * \frac{b}{\pi}\frac{1}{x^2+b^2}$, где a и b вещественны и >0. В этом случае, применяя формулу (VII, 5; 22), получаем

$$\frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2} * \frac{b}{\pi}\frac{1}{x^2+b^2} = \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x-ai} - \frac{1}{x+ai}\right) * \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x-bi} - \frac{1}{x+bi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{2i\pi}{x-ai-bi} - \frac{1}{4\pi^2}\frac{-2i\pi}{x+ai+bi} = \frac{1}{\pi}\frac{a+b}{x^2+(a+b)^2} \qquad \text{(VII, 5; 24)}$$

(из четырех сверток две равны нулю). Таким образом, имеет место

Следствие 2. *Для вещественных положительных чисел a и b справедлива формула*

$$\frac{a}{\pi}\frac{1}{x^2+a^2} * \frac{b}{\pi}\frac{1}{x^2+b^2} = \frac{a+b}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+(a+b)^2}. \qquad \text{(VII, 5; 24}_2\text{)}$$

Если теперь a — вещественное число, то функция $1/(x-a)$ не является локально интегрируемой и поэтому для нее свертка непосредственно не определена. Однако существует ряд косвенных путей, использующих главное значение по Коши, для введения понятия свертки и в этом случае. Вот один из них. Воспользуемся формулой (IV, 9; 98), согласно которой

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x-a+i\varepsilon} = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)\,dx}{x-a} - i\pi\varphi(a) \qquad \text{(VII, 5; 25)}$$

для достаточно гладких функций $\varphi(x)$. Сокращенно можно записать

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0} \frac{1}{x-a+i\varepsilon} = \text{v. p.} \frac{1}{x-a} - i\pi\delta_{(a)}. \qquad \text{(VII, 5; 26)}$$

Как отмечалось в начале § 9 гл. IV, предел слева нельзя понимать в смысле сходимости мер Радона; его надо понимать в смысле теории распределений. Из (VII, 5; 26) получаем

$$\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{x-a}=\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\frac{1}{x-a+i\varepsilon}+i\pi\delta_{(a)}. \qquad \text{(VII, 5; 27)}$$

Свертки $\frac{1}{x-a+i\varepsilon}*\frac{1}{x-b}$ и $\delta_{(a)}*\frac{1}{x-b}$ существуют, поэтому можно по определению положить

$$\left(\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{x-a}\right)*\frac{1}{x-b}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\left(\frac{1}{x-a+i\varepsilon}*\frac{1}{x-b}\right)+i\pi\delta_{(a)}*\frac{1}{x-b}. \qquad \text{(VII, 5; 28)}$$

Если $\operatorname{Im} b>0$, то, согласно (VII, 5; 22), это дает

$$0+i\pi\tau_{(a)}\frac{1}{x-b}=\frac{i\pi}{x-a-b},$$

где $\tau_{(a)}$ — параллельный перенос на a. Если $\operatorname{Im} b<0$, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\frac{-2i\pi}{x-a-b+i\varepsilon}+i\pi\tau_{(a)}\frac{1}{x-b}=$$
$$=-\frac{2i\pi}{x-a-b}+i\pi\frac{1}{x-a-b}=-\frac{i\pi}{x-a-b}.$$

Полученные пределы являются функциями класса $C^\infty(a+b\notin\mathbb{R})$.

Точно так же можно действовать и в том случае, когда оба числа a и b вещественны. Так, например, по определению

$$\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{x-a}*\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{x-b}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\left(\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{x-a}*\frac{1}{x-b+i\varepsilon}\right)+i\pi\,\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{x-a-b}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\frac{-i\pi}{x-a-b+i\varepsilon}+i\pi\,\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{x-a-b}=-\pi^2\delta_{(a+b)}$$

Поэтому теорему 33 можно дополнить:

Следствие 3. *Если число a вещественно, а число b невещественно, то*

$$\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{x-a}*\frac{1}{x-b}=\begin{cases}\dfrac{\pi i}{x-a-b}, & \text{если} \quad \operatorname{Im} b>0,\\[2mm] -\dfrac{\pi i}{x-a-b}, & \text{если} \quad \operatorname{Im} b<0.\end{cases} \qquad \text{(VII, 5; 29)}$$

Если числа a и b вещественны, то

$$\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{x-a}*\mathrm{v.\,p.}\frac{1}{x-b}=-\pi^2\delta_{(a+b)}. \qquad \text{(VII, 5; 30)}$$

В частности,

$$\text{v. p.}\frac{1}{x} * \text{v. p.}\frac{1}{x} = -\pi^2\delta. \qquad \text{(VII, 5; 31)}$$

Замечание. Для вещественного числа a и невещественного числа b полученное значение совпадает с значением $\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(t-a)(x-t-b)}$, даваемым теоремой 32 (см. вычисления, проведенные при доказательстве теоремы 33).

Введение экспоненциальных множителей

Вычисление вычетов в теореме 32 было удобным способом доказательства, но без него можно было обойтись. Заметим, что прямой метод вычисления интегралов был бы даже короче. Однако не следует думать, что при применении вычетов можно иметь дело только с рациональной дробью. *Легко указать случаи, когда интеграл может быть вычислен только с помощью вычетов или аналогичных ухищрений, а не непосредственно, т. е. случаи, когда определенный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}$ *может быть вычислен, в то время как первообразная или неопределенный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{x}$ *неизвестны.* Рассмотрим, например, интеграл (Фурье)

$$\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}\,dx, \quad \alpha \text{ вещественно}, \qquad \text{(VII, 5; 32)}$$

где $\frac{\vec{P}}{Q}$ — рациональная дробь, причем полином Q имеет невещественные нули или же вещественные нули порядка 1 и (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+1$. Поскольку условия, указанные в теореме 101 гл. IV, очевидным образом выполняются, то главное значение интеграла имеет смысл для каждого вещественного полюса. При $\alpha = 0$ интеграл на бесконечности следует понимать в смысле главного значения по Коши. В случае $\alpha \neq 0$ как для $x \to +\infty$, так и для $x \to -\infty$ интеграл будет, согласно критерию Абеля, условно сходящимся (следствие теоремы 98 гл. IV): отношение $\frac{\vec{P}}{Q}$ имеет на бесконечности ограниченную вариацию (поскольку его производная, мажорируемая по норме $\text{const}\frac{1}{x^2}$, интегрируема на бесконечности) и стремится к $\vec{0}$ на бесконечности, а $\left|\int_A^\beta e^{i\alpha x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{|\alpha|}$; см. пример (IV, 9; 83). Здесь прямое вычисление уже невозможно.

Воспользуемся методом вычетов с применением верхних полуокружностей. Снова рассмотрим контур $\Gamma_{A,\varepsilon}$ (см. стр. 433). Так же как и ранее, интеграл по полуокружности $\gamma_{i,\varepsilon}$ стремится к $-i\pi\,\mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right)$. Что же касается интеграла по большой полуокружности γ_A: $|z|=A$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, то при условии, что (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+2$ и $\alpha \geqslant 0$, он стремится к нулю; действительно,

$$\left\|\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right\| \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{A^2}$$

(поскольку $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha \operatorname{Im} z} \leqslant 1$ для $\operatorname{Im} z \geqslant 0$). Если же имеет место лишь равенство (степень Q) = (степень $\vec{P}$) + 1, то $\frac{\vec{P}}{Q} = \frac{\vec{c}_{\infty,-1}}{z} + \vec{g}$, где $\|\vec{g}(z)\| \leqslant \mathrm{const}\frac{1}{|z|^2}$, и для $\alpha \neq 0$ имеем

$$\lim_{A\to\infty}\int_{\gamma_A}\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\,dz = \vec{c}_{\infty,-1}\lim_{A\to\infty}\int_{\gamma_A}\frac{e^{i\alpha z}}{z}\,dz\,^{1)} =$$

$$= \vec{c}_{\infty,-1}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{e^{-i\alpha A}+e^{i\alpha A}}{-i\alpha A} + \int_{\gamma_A}\frac{e^{i\alpha z}}{i\alpha z^2}\,dz\right) = 0. \qquad \text{(VII, 5; 33)}$$

Таким образом, для $\alpha > 0$ имеет место следующая формула:

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\vec{P}(x)}{Q(x)}e^{i\alpha x}\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{A\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\,dz + i\pi\sum_{a_i\in\mathbb{R}}\mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right) =$$

$$= 2i\pi\sum_{\operatorname{Im} a_i>0}\mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right) + i\pi\sum_{\operatorname{Im} a_i=0}\mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}\right). \qquad \text{(VII, 5; 34)}$$

Мы видим, что в противоположность случаю $\alpha=0$ при $\alpha\neq 0$ *для получения нужного результата нет необходимости во вве-*

[1]) Мы воспользовались здесь интегрированием по частям и формулой Стокса, имеющей для дифференциальных форм степеней 0 и 1 тривиальный вид: $\int_{\Gamma_A} dF = F(-A) - F(+A)$.

дении вычета на бесконечности. Заметим, что для функции $\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}$ точка ∞ является не полюсом, а существенно особой точкой (что не мешает ей иметь вычет в бесконечности). Следует в особенности отметить тот факт, что для $\alpha > 0$ нельзя пользоваться нижними полуокружностями, а значит, a priori нет формулы вида (VII, 5; 18). В самом деле, на Γ'_A: $|z| = A$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ функция $e^{i\alpha z}$ неограничена, она возрастает по экспоненциальному закону, поскольку $|e^{i\alpha z}| = e^{-\alpha \operatorname{Im} z}$. С другой стороны, остается справедливым тот факт, что сумма вычетов (считая и вычет в бесконечности) функции $\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)}e^{i\alpha z}$ равна нулю. Следовательно, из (VII, 5; 39) можно получить формулу вида (VII, 5; 18) (к этому же можно прийти, если к контуру $\Gamma_{A,\varepsilon}$ применить внешнюю теорему 19_2 о вычетах):

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx = -2i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right) - \\ - i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right) - 2i\pi \operatorname{Res}_{\infty}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right), \qquad \text{(VII, 5; 35)}$$

откуда, беря среднее арифметическое, получаем формулу вида (VII, 5; 10):

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx = i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right) - \\ - i\pi \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right) - i\pi \operatorname{Res}_{\infty}\left(\frac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}\right). \qquad \text{(VII, 5; 36)}$$

Все происходит так, как будто в силу поведения функции $e^{i\alpha z}$ при $\alpha > 0$ на бесконечности точка ∞ считается лежащей в области $\operatorname{Im} z < 0$, тогда как при $\alpha = 0$ она считается лежащей на прямой $\operatorname{Im} z = 0$. Для $\alpha < 0$ следует воспользоваться нижними полуокружностями; получаем

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\,dx = i\pi\left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \operatorname{Res}_{\infty} - \sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) = \\ = 2i\pi\left(\sum_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \operatorname{Res}_{\infty} + \frac{1}{2}\sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) = \\ = -2i\pi\left(\sum_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \frac{1}{2}\sum_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right), \qquad \text{(VII, 5; 37)}$$

где вычет в бесконечности считается так, как будто ∞ находится в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Теорема 34. *Пусть $\vec{P}/Q$ — рациональная дробь на $\mathbb{C}$, где $\vec{P}$ — полином со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$, а полином Q принимает комплексные значения, причем нули a_i полинома Q невещественны или же вещественны и просты, и, кроме того, (степень Q) $\geqslant$ (степень $\vec{P}$) $+ 1$. Тогда для вещественного значения α имеют место следующие формулы, в которых* Res *являются вычетами функции* $\dfrac{\vec{P}(z)}{Q(z)} e^{i\alpha z}$:

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{i\alpha x}\, dx =$$

$$= \begin{cases} = 2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) = \\ = -2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \operatorname{Res}_{\infty} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) = \\ = i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} - \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} - \operatorname{Res}_{\infty}\right) \text{ для } \alpha > 0; \\ = 2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \operatorname{Res}_{\infty} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) = \\ = -2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) = \\ = i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \operatorname{Res}_{\infty} - \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) \text{ для } \alpha < 0; \\ = 2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \dfrac{1}{2} \operatorname{Res}_{\infty}\right) = \\ = -2i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \dfrac{1}{2} \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i = 0} \operatorname{Res}_{a_i} + \dfrac{1}{2} \operatorname{Res}_{\infty}\right) = \\ = i\pi\left(\sum\limits_{\operatorname{Im} a_i > 0} \operatorname{Res}_{a_i} - \sum\limits_{\operatorname{Im} a_i < 0} \operatorname{Res}_{a_i}\right) \text{ для } \alpha = 0. \end{cases} \qquad \text{(VII, 5; 38)}$$

Следствие 1. *Если $a \in \mathbb{C}$ и α вещественно, то*

$$
\text{v. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}\,dx}{x-a} =
$$

$$
=\begin{cases}
=2i\pi \operatorname{Res}_a\left(\dfrac{e^{i\alpha z}}{z-a}\right) = -2i\pi \operatorname{Res}_\infty\left(\dfrac{e^{i\alpha z}}{z-a}\right) = 2i\pi e^{i\alpha a} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } \operatorname{Im} a > 0,\ \alpha > 0; \\
=2i\pi \operatorname{Res}_\infty = -2i\pi \operatorname{Res}_a = -2i\pi e^{i\alpha a} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \text{для } \operatorname{Im} a < 0,\ \alpha < 0; \\
=0 \quad \text{для } \operatorname{Im} a \text{ и } \alpha, \text{ имеющих противоположные знаки}; \\
=i\pi \operatorname{Res}_a = -i\pi \operatorname{Res}_\infty = i\pi e^{i\alpha a} \\
\qquad \text{для } \alpha > 0,\ \operatorname{Im} a = 0 \text{ или } \alpha = 0,\ \operatorname{Im} a > 0; \\
=-i\pi \operatorname{Res}_a = +i\pi \operatorname{Res}_\infty = -i\pi e^{i\alpha a} \\
\qquad \text{для } \alpha < 0,\ \operatorname{Im} a = 0 \text{ или } \alpha = 0,\ \operatorname{Im} a < 0; \\
=0 \quad \text{для } \alpha = \operatorname{Im} a = 0.
\end{cases} \tag{VII, 5; 39}
$$

(Символ v. p. необходим только при $\alpha = 0$ или $\operatorname{Im} a = 0$.)

Следствие 2. *При $a \notin \mathbb{R}$ имеют место равенства*

$$
m! \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}dx}{(x-a)^{m+1}} = \begin{cases}
2i\pi (i\alpha)^m e^{i\alpha a} & \text{для } \operatorname{Im} a > 0,\ \alpha > 0; \\
-2i\pi (i\alpha)^m e^{i\alpha a} & \text{для } \operatorname{Im} a < 0,\ \alpha < 0; \\
0 & \text{для } \operatorname{Im} a \text{ и } \alpha \text{ противоположных знаков или для } \alpha = 0.
\end{cases} \tag{VII, 5; 40}
$$

Доказательство. Очевидно, эти формулы получаются из предыдущих формул дифференцированием по a под знаком $\int$. Надо лишь обосновать это дифференцирование. Так как $a \notin \mathbb{R}$, то на конечном расстоянии здесь особенностей не имеется. Заметим, далее, что в силу следствия теоремы 115 гл. IV для интеграла по ограниченному интервалу дифференцирование под знаком $\int$ возможно:

$$
\frac{d}{da}\left(\int_{-A}^{B} \frac{e^{i\alpha x}}{x-a}\,dx\right) = \int_{-A}^{B} \frac{e^{i\alpha x}}{(x-a)^2}\,dx. \tag{VII, 5; 41}
$$

Устремим A и B к бесконечности. Интегралы в левой и правой частях (VII, 5; 46) будут сходиться соответственно к $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x-a}\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{(x-a)^2}\,dx$ равномерно относительно a, пробегающего любой компакт области $\operatorname{Im} z \neq 0$: первый по теореме Абеля, а второй просто в силу абсолютной сходимости. Из теоремы 111 гл. IV следует теперь, что второй предел является производной первого предела по a. То же справедливо и для следующих производных, поскольку абсолютная сходимость для всех них сохраняется. Впрочем, все это получается непосредственным применением теоремы 117 гл. IV. Можно было бы воспользоваться также формулой $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-a}\right) = -\frac{1}{(x-a)^2}$ и проинтегрировать (VII, 5; 39) по частям (сначала по ограниченному интервалу, а затем, переходя к пределу, по $\mathbb{R}$, что сводится к применению теоремы 98 гл. IV).

Наконец, *можно было бы доказать формулы* (VII, 5; 40) *непосредственно*, как были доказаны формулы (VII, 5; 39) с помощью формулы (VII, 5; 38).

Замечание. Для вычисления v. p. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\vec{P}(x)}{Q(x)} e^{iax} dx$ можно либо непосредственно воспользоваться теоремой 34, либо разложить $\frac{\vec{P}}{Q}$ на простые дроби и применить следствия 1 и 2.

Следствие 3. *Для $a > 0$ и вещественного λ*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\pm 2i\pi\lambda x} \frac{a\,dx}{a^2+x^2} = e^{-2\pi a|\lambda|}; \qquad \text{(VII, 5; 42)}$$

следовательно, для вещественного s

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{\pm isx}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|s|}. \qquad \text{(VII, 5; 43)}$$

Для доказательства достаточно применить (VII, 5; 38), где α заменено на $2\pi\lambda$, и рассмотреть последовательно $\lambda > 0$, $\lambda < 0$, $\lambda = 0$. В действительности, как только нужная формула получена для $\lambda > 0$, остается заметить, что при замене λ на $-\lambda$ она должна перейти в комплексно сопряженную форму, т. е. должна остаться в силу вещественности неизменной. В силу же непрерывности по λ в точке $\lambda = 0$, применяя очевидным образом теорему о сходимости Лебега, можно убедиться в справедливости нашей формулы и при $\lambda = 0$. Таким образом, теорема верна при всех значениях λ. Можно было бы также написать равенство

$$\frac{1}{\pi}\frac{a}{x^2+a^2}=\frac{1}{2i\pi}\left(\frac{1}{x-ia}-\frac{1}{x+ia}\right)$$

и применить следствие 1. Напомним, что соотношение (VII, 5; 42) было указано без доказательства в гл. IV (формула (IV, 11; 50)).

Следствие 4. *Имеет место равенство* (*теорема* 118 *гл.* IV)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \qquad \text{(VII, 5; 44)}$$

Доказательство.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{4i}\,\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx-$$

$$-\frac{1}{4i}\,\text{v. p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix}}{x}\,dx=\frac{i\pi-(-i\pi)}{4i}=\frac{\pi}{2}. \qquad \text{(VII, 5; 45)}$$

Замечание. При доказательстве мы использовали v. p. относительно особенности в начале координат, в то время как в саму доказываемую формулу v. p. не входит.

Пример 3. *Интегрирование по полуоси от* 0 *до* $+\infty$. Некоторые интегралы от 0 до $+\infty$ тривиально сводятся к интегралам по всей прямой $\mathbb{R}$ в силу четности подинтегральной функции:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^m}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^m};\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Нас интересует не этот случай.

Пусть $\vec{R}=\vec{P}/Q$ — рациональная дробь и α — комплексное число. Рассмотрим интеграл

$$I=I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^{\alpha}\,dx \qquad \text{(VII, 5; 46)}$$

в предположении, что $\vec{R}$ не имеет вещественных полюсов $\geqslant 0$ и $\vec{R}(0)\neq\vec{0}$. Имеем $|x^{\alpha}|=|e^{\alpha\ln x}|=e^{\operatorname{Re}\alpha\ln x}=x^{\operatorname{Re}\alpha}$, так что интеграл I имеет смысл, если $\operatorname{Re}\alpha>-1$ (интегрируемость в начале координат) и $\operatorname{Re}\alpha+(\text{степень }\vec{P})-(\text{степень }Q)<-1$ (интегрируемость на бесконечности).

Рассмотрим интеграл $\int\limits_{\Gamma_{A,\,\varepsilon}} \vec{R}(z)\, z^\alpha\, dz$ по следующему контуру $\Gamma_{A,\,\varepsilon}$:

часть (1) — отрезок $[\varepsilon + i\varepsilon,\ A + i\varepsilon]$;
часть (2) — отрезок $[A - i\varepsilon,\ \varepsilon - i\varepsilon]$;
часть (3) — дуга окружности $|z| = \sqrt{A^2 + \varepsilon^2}$, $\operatorname{Re} z \leqslant A$;
часть (4) — дуга окружности $|z| = \sqrt{2}\varepsilon$, $\operatorname{Re} z \leqslant \varepsilon$.

Направление обхода указано стрелками (положительное направление). В подинтегральной функции для многозначного

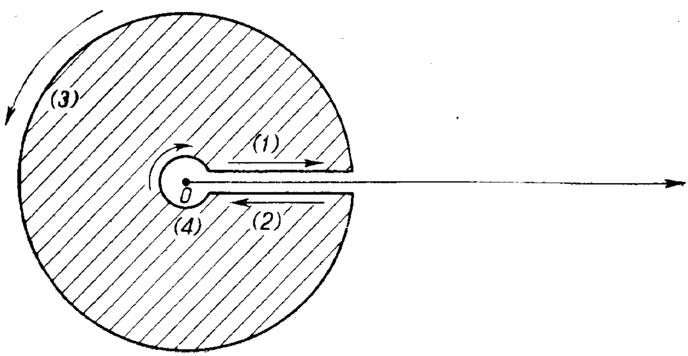

Рис. 15.

множителя $z^\alpha = e^{\alpha \ln z} = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$ выбрана ветвь $0 < \arg z < 2\pi$. Эта функция z^α голоморфна в комплексной плоскости с удаленной полупрямой $\mathbb{R}_+$, и, следовательно, функция $\vec{R}(z)\, z^\alpha$ мероморфна.

Имеют место следующие оценки. При $|z|$, стремящемся к 0,

$$\|\vec{R}(z)\, z^\alpha\| \leqslant \mathrm{const}\, |z^\alpha| = \mathrm{const}\, |e^{\alpha \ln z}| = \mathrm{const}\, e^{\operatorname{Re}(\alpha \ln z)} =$$
$$= \mathrm{const}\, |z|^{\operatorname{Re}\alpha} e^{-\operatorname{Im}\alpha \arg z} \leqslant \mathrm{const}\, |z|^\alpha$$

(поскольку $0 < \arg z < 2\pi$). При $|z|$, стремящемся к бесконечности,

$$\|\vec{R}(z)\, z^\alpha\| \leqslant \mathrm{const}\, |z|^{\operatorname{Re}\alpha + (\text{степень } \vec{P}) - (\text{степень } Q)}.$$

Если учесть предположения относительно $\operatorname{Re}\alpha$, то получается, что интегралы по контурам (4) и (3) стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ и $A \to +\infty$ (см. лемму на стр. 433).

Интеграл по отрезку (1) стремится к искомому интегралу I. В самом деле, его можно записать в виде

$$\int_{\varepsilon}^{A} \vec{R}(x+i\varepsilon)(x+i\varepsilon)^{\alpha}\,dx = \int_{0}^{+\infty} \vec{R}(x+i\varepsilon)(x+i\varepsilon)^{\alpha}\chi_{\varepsilon,A}(x)\,dx, \tag{VII, 5; 47}$$

где $\chi_{\varepsilon,A}(x)=1$ для $\varepsilon \leqslant x \leqslant A$ и $\chi_{\varepsilon,A}(x)=0$ для $x<\varepsilon$ или $x>A$.

Подинтегральная функция в каждой точке стремится к $\vec{R}(x)\,x^{\alpha}$. Для того чтобы применить теперь теорему сходимости Лебега, надо показать, что интегрируемая функция мажорируется некоторой фиксированной интегрируемой неотрицательной функцией. Выберем $\varepsilon_0>0$, $A_0>0$ так, чтобы при $x \geqslant A_0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ имели место неравенства

$$\|\vec{R}(x+i\varepsilon)\| \leqslant \text{const}\,|x+i\varepsilon|^{(\text{степень } \vec{P})-(\text{степень } Q)} \leqslant$$
$$\leqslant \text{const}\, x^{(\text{степень } \vec{P})-(\text{степень } Q)}$$

и чтобы при $x \leqslant A_0$ и $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ величина $\|\vec{R}(x+i\varepsilon)\|$ была ограниченной. Тогда при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ будет справедливым неравенство

$$\|\vec{R}(x+i\varepsilon)\| \leqslant \text{const}\left(1+x^{(\text{степень } \vec{P})-(\text{степень } Q)}\right).$$

Одновременно при $x \geqslant \varepsilon$, $x \leqslant |x+i\varepsilon| = \sqrt{x^2+\varepsilon^2} \leqslant \sqrt{2}\,x$, а следовательно, при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\chi_{\varepsilon,A}(x)\,|(x+i\varepsilon)^{\alpha}| \leqslant \text{const}\, x^{\operatorname{Re}\alpha},$$

$$\chi_{\varepsilon,A}(x)\,\|\vec{R}(x+i\varepsilon)(x+i\varepsilon)^{\alpha}\| \leqslant \text{const}\, x^{\operatorname{Re}\alpha}\left(1+x^{(\text{степень } \vec{P})-(\text{степень } Q)}\right)$$

— интегрируемая функция, поскольку $\operatorname{Re}\alpha > -1$ и $\operatorname{Re}\alpha + (\text{степень } \vec{P}) - (\text{степень } Q) < -1$. Таким образом, интеграл по отрезку (1) действительно стремится к I.

Рассмотрим теперь интеграл по отрезку (2). Его можно записать в виде

$$-\int_{\varepsilon}^{A} \vec{R}(x-i\varepsilon)(x-i\varepsilon)^{\alpha}\,dx = -\int_{0}^{+\infty} \chi_{\varepsilon,A}(x)\,\vec{R}(x-i\varepsilon)(x-i\varepsilon)^{\alpha}\,dx. \tag{VII, 5; 48}$$

Поскольку при ε, стремящемся к 0, и A, стремящемся к $+\infty$, аргумент $x-i\varepsilon$ стремится к 2π, то $\chi_{\varepsilon,A}(x)\,\vec{R}(x-i\varepsilon)(x-i\varepsilon)^{\alpha}$ в каждой точке сходится к $\vec{R}(x)\,x^{\alpha}e^{2i\pi\alpha}$. Эта функция мажорируется функцией $x^{\operatorname{Re}\alpha}\left(1+x^{(\text{степень }\vec{P})-(\text{степень }Q)}\right)$. Поэтому из теоремы сходимости Лебега следует, что интеграл по отрезку (2) стремится к $-e^{2\pi i\alpha}I$ [1]). Окончательно получаем

$$\lim_{A\to+\infty,\ \varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}\vec{R}(z)\,z^{\alpha}\,dz=(1-e^{2i\pi\alpha})\,I. \qquad \text{(VII, 5; 49)}$$

Отсюда следует, что при нецелом α (для того чтобы $1-e^{2i\pi\alpha}\neq 0$) можно вычислить интеграл I, исходя из интеграла $\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$. Но $\Gamma_{A,\varepsilon}$ является путем, кусочно принадлежащим классу C^{∞}, а кроме того, псевдограницей заштрихованной области — многообразия с псевдограницей. Тем самым мы находимся в условиях применимости общей теоремы 38 Стокса из гл. VI, упр. 2°), стр. 232. Из теоремы 19 о вычетах следует, что $\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ равен умноженной на $2i\pi$ сумме вычетов функции $R(z)\,z^{\alpha}$ в полюсах, содержащихся в этой области, т. е. при достаточно больших A и достаточно малых ε, во всех полюсах a_i функции $\vec{R}(z)$.

Эти полюсы — нули a_i полинома Q. При подсчете вычетов в каждом из них следует учитывать значение функции z^{α}, т. е. $e^{\alpha\ln z}$.

Сказанное выше можно резюмировать в виде теоремы:

Теорема 35. *Если* $\vec{R}=\dfrac{\vec{P}}{Q}$ — *рациональная дробь от одной переменной, не имеющая неотрицательных вещественных полю-*

---

[1]) Зачастую это доказательство «упрощают», считая отрезки (1) и (2) путями с нулевыми ординатами», «один из которых лежит на верхней, а другой — на нижней стороне прямой $\mathbb{R}$». Контур $\Gamma_{A,\varepsilon}$ при этом имеет вид

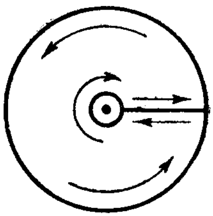

Рис. 16.

Но такое толкование предполагает применение функций, «принимающих различные значения на двух сторонах прямой $\mathbb{R}$», т. е. применение более сложных топологических средств.

сов a_i, *и* α — *такое нецелое комплексное число, что* $\operatorname{Re}\alpha > -1$ *и* $\operatorname{Re}\alpha +$ (*степень* $\vec{P}$) — (*степень* Q) < -1, *то*

$$I = I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \vec{R}(x)\, x^\alpha\, dx = \frac{2i\pi}{1 - e^{2i\pi\alpha}} \sum_{a_i} \operatorname{Res}_{a_i} (\vec{R}(z)\, z^\alpha), \qquad \text{(VII, 5; 50)}$$

где функция z^α *определена по формуле* $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$, $\ln z = \ln|z| + i \arg z$, $0 < \arg z < 2\pi$.

Следствие. *Для* Γ-*функции Эйлера*[1]) *имеет место «формула дополнения»*

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \qquad \text{(VII, 5; 51)}$$

Доказательство. Как известно,

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1 + x}\, dx \quad \text{для} \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \qquad \text{(VII, 5; 52)}$$

Это интеграл предыдущего типа с $\alpha = z - 1$ и $R(x) = 1/(1 + x)$. Подинтегральная функция имеет единственный полюс -1, в котором ее вычет равен $(-1)^{z-1} = e^{i\pi(z-1)}$. Для $0 < \operatorname{Re} z < 1$ по формуле (VII, 5; 50) получаем

$$\frac{2i\pi e^{i\pi(z-1)}}{1 - e^{2i\pi(z-1)}} = \frac{-2i\pi e^{i\pi z}}{1 - e^{2i\pi z}} = \frac{-2i\pi}{e^{-i\pi z} - e^{i\pi z}} = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Тот же результат получается для произвольного z либо из соображений периодичности (обе функции $\Gamma(z)\,\Gamma(1 - z)$ и $\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ антипериодичны[2]) с антипериодом 1), либо с помощью аналитического продолжения (обе части мероморфны по z и могут совпадать между собой при $0 < \operatorname{Re} z < 1$ только тогда, когда они совпадают всюду).

Случай целого α не подходит под условия предыдущей теоремы. В этом случае $1 - e^{2i\pi\alpha} = 0$ и одновременно равен нулю интеграл $\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ (поскольку функция $\vec{R}(z)\, z^\alpha$ является рациональной дробью, сумма ее вычетов, считая и вычет в бесконечности, равна нулю) и потому $I = \vec{0}/0$. Так как речь идет о рациональной дроби, то в этом случае вычисления можно проводить обычными методами. То же самое можно сделать для нецелого α, а затем перейти к пределу. Это возможно, поскольку при $\alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\alpha \leqslant \alpha_2$, где вещественные числа α_1 и α_2 удовлетворяют указанным условиям, функция $I(\alpha)$ непрерывна по α.

[1]) Определение Γ-функции см. ниже, формула (VII, 5; 65). — *Прим. ред.*

[2]) Функция называется антипериодичной с антипериодом T, если $f(x + T) = -f(x)$. — *Прим. ред.*

В самом деле, $\vec{R}(x)x^\alpha$ непрерывна по α для любого $x \neq 0$ и имеет место оценка $\|\vec{R}(x)x^\alpha\| \leqslant \|\vec{R}(x)\|(x^{\alpha_1} + x^{\alpha_2})$, откуда в силу теоремы сходимости Лебега (теорема 114 гл. IV) следует непрерывность I.

Далее, для нецелых α можно вычислить

$$\frac{2i\pi}{1 - e^{2i\pi\alpha}} \sum_{a_i} \mathrm{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\alpha)$$

и совершить предельный переход к целым α, раскрывая неопределенность $\vec{0}/0$. Это легко сделать с помощью правила Лопиталя. Для целых α

$$I(\alpha) = \lim_{\substack{\beta\to\alpha\\ \beta \text{ нецелое}}} I(\beta) = \lim_{\beta\to\alpha} \frac{2i\pi}{1 - e^{2i\pi\beta}} \sum_{a_i} \mathrm{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\beta) =$$

$$= \lim_{\beta\to\alpha} \frac{2i\pi}{-2i\pi e^{2i\pi\beta}} \sum_{a_i} \mathrm{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\beta \ln z) =$$

$$= -\sum_{a_i} \mathrm{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\alpha \ln z). \qquad \text{(VII, 5; 53)}$$

Существует и другой метод. Рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_{\Gamma_{A,\varepsilon}} \vec{R}(z)\,z^\alpha \ln^{m+1}(z)\,dz, \qquad \text{(VII, 5; 54)}$$

где α (целое или нецелое) удовлетворяет все тем же условиям и m — целое число $\geqslant 0$. Интегралы по контурам (3) и (4) при A, стремящемся к бесконечности, и ε, стремящемся к 0, стремятся к нулю. Интеграл по отрезку (1) стремится к

$$\int_0^{+\infty} \vec{R}(x)\,x^\alpha \ln^{m+1}(x)\,dx, \qquad \text{(VII, 5; 55)}$$

в то время как интеграл по отрезку (2) стремится к

$$\int_0^{+\infty} \vec{R}(x)\,x^\alpha e^{2i\pi\alpha}(\ln x + 2i\pi)^{m+1}\,dx, \qquad \text{(VII, 5; 56)}$$

так что

$$2i\pi \sum_{a_i} \mathrm{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\alpha \ln^{m+1} z) = \lim_{A\to\infty,\ \varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_{A,\varepsilon}} \vec{R}(z)\,z^\alpha \ln^{m+1}(z)\,dz =$$

$$= \int_0^\infty \vec{R}(x)\,x^\alpha \left(\ln^{m+1} x - e^{2i\pi\alpha}(\ln x + 2i\pi)^{m+1}\right)dx. \qquad \text{(VII, 5; 57)}$$

Для целых α и $m=0$ получаем

$$2i\pi\sum_{a_i}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\alpha\ln z)=-2i\pi\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^\alpha\,dx, \qquad \text{(VII, 5; 58)}$$

чем и решается поставленная задача. Для $m=1$

$$2i\pi\sum_{a_i}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\alpha\ln^2 z)=$$

$$=-4i\pi\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^\alpha\ln x\,dx+4\pi^2\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^\alpha\,dx. \qquad \text{(VII, 5; 59)}$$

Таким образом, теорему 35 можно дополнить:

Теорема 36. *В условиях теоремы* 35 *при целом* α

$$\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^\alpha\,dx=-\sum_{a_i}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\alpha\ln z),\qquad \int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^\alpha\ln x\,dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\alpha\ln^2 z)-i\pi\sum_{a_i}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\alpha\ln z). \qquad \text{(VII, 5; 60)}$$

Заметим еще, что *интеграл I дифференцируем по α под знаком* $\int$ (при целых и нецелых α). В самом деле, формальное дифференцирование дает

$$\frac{dI}{d\alpha}=\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^\alpha\ln x\,dx. \qquad \text{(VII, 5; 61)}$$

Полученный интеграл по тем же критериям и аналогичным оценкам сходится, так что законность выполненного формально дифференцирования вытекает из теоремы 115 гл. IV. Более общо,

$$\frac{d^mI}{d\alpha^m}=\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^\alpha\ln^m x\,dx. \qquad \text{(VII, 5; 62)}$$

Производную $\frac{d^mI}{d\alpha^m}$ можно вычислить с помощью теоремы 35, что даст для вычисления правой части соотношения (VII, 5; 62) при целых $m\geqslant 0$ формулу

$$\int_0^{+\infty}\vec{R}(x)\,x^\alpha\ln^m x\,dx=\frac{d^m}{d\alpha^m}\left(\frac{2i\pi}{1-2^{2i\pi\alpha}}\sum_{a_i}\operatorname{Res}_{a_i}(\vec{R}(z)\,z^\alpha)\right) \qquad \text{(VII, 5; 63)}$$

(для нецелых α результат получается непосредственно, а для целых α — раскрытием неопределенности $\vec{0}/0$).

Например, для $0 < \operatorname{Re} z < 1$ имеем

$$I(z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1} \ln x}{1+x} \, dx = \frac{d}{dz} \left(\int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} \, dx \right) =$$

$$= \frac{d}{dz} \left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right) = - \frac{\pi^2 \cos \pi z}{\sin^2 \pi z}. \qquad \text{(VII, 5; 64)}$$

Пример 4. *Применение к функциям Эйлера.* Можно указать большое число случаев применения вычетов в теории специальных функций. Мы ограничимся здесь примером интересной формулы, относящейся к эйлеровым интегралам и являющейся скорее примером применения первой интегральной формулы Коши, чем теоремы о вычетах.

Как известно, Г-функция Эйлера определяется для $\operatorname{Re} \alpha > 0$ формулой

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} \, dx. \qquad \text{(VII, 5; 65)}$$

Оказывается, можно заменить путь интегрирования — вещественную полупрямую $\geqslant 0$ — полупрямой с аргументом θ в комплексной плоскости:

$$\int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} e^{-z} z^{\alpha-1} \, dz, \quad z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln z}, \quad \arg z = \theta. \qquad \text{(VII, 5; 66)}$$

Для того чтобы в этом убедиться, надо доказать, что разность

$$\int_0^{+\infty} - \int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} \qquad \text{(VII, 5; 67)}$$

равна нулю. Второй интеграл $\int_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} = \int_0^{\infty} e^{-re^{i\theta}} (re^{i\theta})^{\alpha-1} e^{i\theta} \, dr$ имеет смысл, если функция $|e^{-z} z^{\alpha-1}| = e^{-r\cos\theta} r^{\operatorname{Re}\alpha-1} e^{-\theta \operatorname{Im}\alpha}$ интегрируема на бесконечности, т. е. если $\cos\theta > 0$ (интегрируемость в начале координат требует выполнения упоминавшегося выше условия $\operatorname{Re} \alpha > 0$). Возьмем, например, $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$. При этих условиях разность (VII, 5; 67) можно записать в виде

$$\lim_{A \to +\infty,\ \varepsilon \to 0} \left(\int_\varepsilon^A - \int_{e^{i\theta}\varepsilon}^{e^{i\theta}A} \right). \qquad \text{(VII, 5; 68)}$$

Добавим путь по дуге $|z|=A$ с аргументом, изменяющимся от 0 до θ, и путь по дуге $|z|=\varepsilon$ с аргументом, изменяющимся от θ до 0. Поскольку функция $|e^{-z}z^{\alpha-1}|$ на большой окружности ограничена величиной $\operatorname{const} e^{-A\cos\theta}A^{\operatorname{Re}\alpha-1}$, а на малой — величиной $\operatorname{const}\varepsilon^{\operatorname{Re}\alpha-1}$, то интегралы по этим путям стремятся к 0, когда A стремится к бесконечности и ε стремится к 0. Следовательно, разность равна пределу интеграла $\int\limits_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$, где $\Gamma_{A,\varepsilon}$ — контур, указанный на рис. 17.

Но этот контур является ориентированной псевдограницей ориентированного многообразия с псевдограницей $D_{A,\varepsilon}$ (заштрихованная область на рисунке), ориентированного согласно

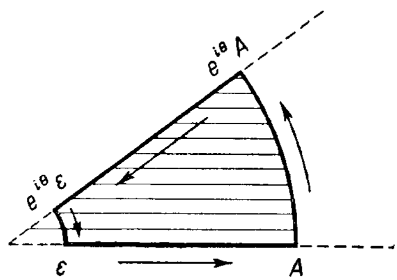

Рис. 17.

ориентации плоскости $\mathbb{C}$. Мы находимся в условиях применимости теоремы Стокса (общая теорема 38 гл. IV, упр. 2°), стр. 232), а следовательно, первой основной интегральной формулы Коши.

Подинтегральная функция голоморфна в некотором открытом множестве, содержащем $D_{A,\varepsilon}$, а именно в открытом множестве $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$, $z \neq 0$. Следовательно, интеграл $\int\limits_{\Gamma_{A,\varepsilon}}$ равен нулю, чем и доказано равенство функций (VII, 5; 65) и (VII, 5; 66). Таким образом,

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{e^{i\theta}\cdot\infty} e^{-z}z^{\alpha-1}\,dz = \int\limits_0^{+\infty} e^{-re^{i\theta}}r^{\alpha-1}e^{i\theta\alpha}\,dr. \qquad \text{(VII, 5; 69)}$$

Положим теперь $\theta=\frac{\pi}{2}$, а следовательно $e^{-re^{i\theta}}=e^{-ir}$. В силу критерия Абеля при $\operatorname{Re}\alpha<1$ записанный интеграл является полусходящимся на бесконечности (интегрируемость в начале координат при $\operatorname{Re}\alpha>0$ обеспечена). В самом деле, вариация функции $r^{\alpha-1}$ ограничена на бесконечности (поскольку в силу теоремы 87 гл. IV ее производная $(\alpha-1)r^{\alpha-2}$ интегрируема на бесконечности) и стремится к нулю при r, стремящемся к бесконечности, а $\left|\int_A^B e^{-ir}\,dr\right| \leqslant 2$.

Кроме того, при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ интеграл равномерно сходится на бесконечности. Это вытекает из теоремы Абеля при $0 < \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. В самом деле,

$$|(e^{-r\cos\theta}r^{\alpha-1})'| \leqslant |\alpha-1|\,r^{\operatorname{Re}\alpha-2} + |(e^{-r\cos\theta})'|\,r^{\operatorname{Re}\alpha-1}, \qquad \text{(VII, 5; 70)}$$

откуда в силу (IV, 9; 23)

$$V([A, +\infty[;\, e^{-r\cos\theta}r^{\alpha-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \int_A^{+\infty} (|\alpha-1|\,r^{\operatorname{Re}\alpha-2} + |(e^{-r\cos\theta})'|\,r^{\operatorname{Re}\alpha-1})\,dr \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\alpha-1}{\operatorname{Re}\alpha-1}\right| A^{\operatorname{Re}\alpha-1} + A^{\operatorname{Re}\alpha-1} = \mathrm{const}\, A^{\operatorname{Re}\alpha-1}. \qquad \text{(VII, 5; 71)}$$

Согласно (IV, 9; 102),

$$\left|\int_A^{\infty} (e^{-r\cos\theta}r^{\alpha-1})(e^{-ir\sin\theta})\,dr\right| \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\, A^{\operatorname{Re}\alpha-1} \sup_{\substack{B \geqslant A\\ \theta \geqslant \theta_0}} \left|\int_A^B e^{-ir\sin\theta}\,dr\right| \leqslant \mathrm{const}\, A^{\operatorname{Re}\alpha-1}\frac{2}{\sin\theta_0}. \qquad \text{(VII, 5; 72)}$$

Но для $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ в силу оценки $|e^{-re^{i\theta}}r^{\alpha-1}| \leqslant e^{-r\cos\theta_0}r^{\operatorname{Re}\alpha-1}$ *абсолютная* сходимость на бесконечности равномерна, и, значит, для $\operatorname{Re}\alpha < 1$ и $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ имеет место указанная равномерная сходимость на бесконечности.

Следовательно, из теоремы 116 гл. IV вытекает, что наш интеграл является непрерывной функцией от θ, а поскольку эта функция постоянна при $0 \leqslant \theta < \pi/2$, она постоянна и при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Поэтому для $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$ можно написать

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-ir}r^{\alpha-1}e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\,dr, \qquad \text{(VII, 5; 73)}$$

или

$$e^{-i\alpha\frac{\pi}{2}}\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-ir}r^{\alpha-1}\,dr. \qquad \text{(VII, 5; 74)}$$

Проводя те же рассуждения с $\theta = -\frac{\pi}{2}$, получим тот же результат с заменой $-i$ на i; комбинируя эти результаты, находим

$$\Gamma(\alpha)\cos\frac{\alpha\pi}{2}=\int_0^{+\infty} r^{\alpha-1}\cos r\,dr,$$
$$\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}=\int_0^{+\infty} r^{\alpha-1}\sin r\,dr. \qquad \text{(VII, 5; 75)}$$

В том, что касается второго интеграла, можно пойти дальше. В самом деле, как в первом, так и во втором интегралах для сходимости на бесконечности по Абелю требуется выполнение неравенства $\operatorname{Re}\alpha<1$, а для интегрируемости в начале координат необходимо выполнение неравенства $\operatorname{Re}\alpha>0$. Однако ввиду наличия синуса второй интеграл имеет смысл в начале координат даже при $\operatorname{Re}\alpha>-1$, так что окончательно он имеет смысл в полосе $-1<\operatorname{Re}\alpha<+1$. Этот интеграл определяет функцию от α, голоморфную в указанной полосе (формальное дифференцирование по α под знаком $\int$ дает $\int_0^{+\infty} r^{\alpha-1}\ln r\sin r\,dr$, и остается применить к $\int_0^A$ теорему 115 гл. IV и теорему 117 гл. IV для перехода к пределу при A, стремящемся к бесконечности), а поскольку то же самое имеет место для $\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}$ ($\alpha=0$ является полюсом $\Gamma(\alpha)$ и одновременно нулем синуса, а следовательно, регулярной точкой), обе функции при $0<\operatorname{Re}\alpha<1$ совпадают во всей этой полосе. Итак, имеет место

Теорема 37. *Формулы* (VII, 5; 75) *справедливы: первая для* $0<\operatorname{Re}\alpha<1$, *а вторая для* $-1<\operatorname{Re}\alpha<+1$.

Следствие.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{\pm ix}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\pi}\,e^{\pm\frac{i\pi}{4}},\qquad \int_0^{+\infty}\cos x\,\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_0^{+\infty}\sin x\,\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{\pm it^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{\pm\frac{i\pi}{4}},\qquad \int_0^{+\infty}\cos t^2\,dt=\int_0^{+\infty}\sin t^2\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

(VII, 5; 76)

Доказательство. Полагая во второй формуле (VII, 5; 75) $\alpha=0$, получаем $\left(\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)_{\alpha=0}$. Эта величина равна $\frac{\pi}{2}$, поскольку $\Gamma(\alpha)\sim\frac{1}{\alpha}$ и $\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sim\frac{\alpha\pi}{2}$ при α, стремящемся к 0.

Формулы второй строки получаются, если в (VII, 5; 73) и (VII, 5; 75) положить $\alpha=\frac{1}{2}$ и учесть, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Третья строка получается из второй заменой переменной $x=t^2$. Эти формулы называются формулами Френеля (они применяются в теории дифракции). См. гл. IV, формулы (IV, 9; 110_2) и (IV, 9; 113).

§ 6. ДОПОЛНЕНИЕ ПО ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ. ТЕОРЕМЫ АСКОЛИ И МОНТЕЛЯ

Полуметрические пространства

Во второй главе мы ввели сначала метрические, а затем топологические пространства. Каждое метрическое пространство является топологическим, но метрическая структура богаче, чем топологическая, и позволяет рассматривать дополнительные свойства и понятия (последовательности Коши и полные пространства, ограниченные множества, равномерно непрерывные отображения и т. д.). Топологическое пространство, топологию которого можно определить с помощью некоторой метрики, называется метризуемым. Различные метрики, определяющие его топологию, называются эквивалентными, но они не «идентичны»: может оказаться, например, что пространство полно в одной из метрик, но не полно в другой.

Существуют и не метризуемые топологические пространства.

Понятие метрического пространства можно несколько обобщить. Введем следующее определение:

Полурасстоянием на множестве E называется отображение d множества $E\times E$ в вещественную полуось $\mathbb{R}_+$, обладающее следующими свойствами:

1) симметричность: $d(x, y)=d(y, x)$;
2) полуположительность: $d(x, y)\geqslant 0$ и $d(x, x)=0$;
3) неравенство треугольника: (VII, 6; 1)

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z).$$

Возможно, что $d(x, y)=0$ даже в том случае, когда $x\neq y$. Рассматривать множества, снабженные одним-единственным полурасстоянием, не очень интересно: такие топологические пространства неотделимы. (Таковы, например, пространства $\mathscr{L}^p$; см. гл. IV, стр. 567.)