Доказательство. Полагая во второй формуле (VII, 5; 75) $\alpha=0$, получаем $\left(\Gamma(\alpha)\sin\frac{\alpha\pi}{2}\right)_{\alpha=0}$. Эта величина равна $\frac{\pi}{2}$, поскольку $\Gamma(\alpha)\sim\frac{1}{\alpha}$ и $\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sim\frac{\alpha\pi}{2}$ при α, стремящемся к 0.

Формулы второй строки получаются, если в (VII, 5; 73) и (VII, 5; 75) положить $\alpha=\frac{1}{2}$ и учесть, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. Третья строка получается из второй заменой переменной $x=t^2$. Эти формулы называются формулами Френеля (они применяются в теории дифракции). См. гл. IV, формулы (IV, 9; 110_2) и (IV, 9; 113).

§ 6. ДОПОЛНЕНИЕ ПО ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ. ТЕОРЕМЫ АСКОЛИ И МОНТЕЛЯ

Полуметрические пространства

Во второй главе мы ввели сначала метрические, а затем топологические пространства. Каждое метрическое пространство является топологическим, но метрическая структура богаче, чем топологическая, и позволяет рассматривать дополнительные свойства и понятия (последовательности Коши и полные пространства, ограниченные множества, равномерно непрерывные отображения и т. д.). Топологическое пространство, топологию которого можно определить с помощью некоторой метрики, называется метризуемым. Различные метрики, определяющие его топологию, называются эквивалентными, но они не «идентичны»: может оказаться, например, что пространство полно в одной из метрик, но не полно в другой.

Существуют и не метризуемые топологические пространства.

Понятие метрического пространства можно несколько обобщить. Введем следующее определение:

Полурасстоянием на множестве E называется отображение d множества $E\times E$ в вещественную полуось $\mathbb{R}_+$, обладающее следующими свойствами:

1) симметричность: $d(x, y)=d(y, x)$;
2) полуположительность: $d(x, y)\geqslant 0$ и $d(x, x)=0$;
3) неравенство треугольника: (VII, 6; 1)

$$d(x, z)\leqslant d(x, y)+d(y, z).$$

Возможно, что $d(x, y)=0$ даже в том случае, когда $x\neq y$. Рассматривать множества, снабженные одним-единственным полурасстоянием, не очень интересно: такие топологические пространства неотделимы. (Таковы, например, пространства $\mathcal{L}^p$; см. гл. IV, стр. 567.)

Множество E будем называть *полуметрическим пространством*, если оно снабжено семейством $(d_i)_{i \in I}$ полурасстояний (где множество индексов I имеет произвольную мощность), удовлетворяющих следующему условию:

Семейство $(d_i)_{i \in I}$ является направленным (фильтрующимся), т. е. для каждой конечной части J множества I существует такое $k \in I$, что $d_k \geqslant d_j$ для всех $j \in J$. (VII, 6; 1_2)

Множество $x \in E$, таких, что $d_i(a, x) < R$ (соответственно $\leqslant R$), называется *открытым шаром* $B_{i,0}(a, R)$ (соответственно *замкнутым шаром* $B_i(a, R)$) с центром в точке $a \in E$, радиусом $R > 0$ и индексом $i \in I$.

Полуметрическое пространство мы наделим следующей топологией: подмножество $\mathcal{O}$ из E будем называть открытым, если вместе с каждой точкой оно содержит также некоторый шар с центром в этой точке, т. е. если

$$\forall a \subset \mathcal{O} \quad \exists i \in I \quad \text{и} \quad \varepsilon > 0, \text{ такие, что } B_i(a, \varepsilon) \subset \mathcal{O}. \qquad \text{(VII, 6; 2)}$$

Можно убедиться, что аксиомы (II, 2; 1) открытых множеств при этом удовлетворяются. Не совсем тривиальна лишь проверка аксиомы b) о конечном пересечении: пересечение конечного числа открытых множеств открыто. Пусть $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_n$ — открытые множества, $\mathcal{O}$ — их пересечение, и пусть $a \in \mathcal{O}$. Тогда существуют такие индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ и числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n > 0$, что каждый шар $B_{i,\nu}(a, \varepsilon_\nu)$ лежит в $\mathcal{O}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Если k — такой индекс, что d_k мажорирует $d_{i_1}, d_{i_2}, \ldots, d_{i_n}$ (аксиома направленности), если $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, то шар $B_k(a, \varepsilon)$ лежит в $\mathcal{O}$, а значит, $\mathcal{O}$ открыто. Можно сказать, что множество открыто тогда и только тогда, когда оно является объединением открытых шаров. Шары $B_i(a, \varepsilon)$ с центром в точке a (при переменных ε и i) образуют фундаментальную систему окрестностей точки a.

Введенная топология отделима (т. е. удовлетворяет аксиоме d) Хаусдорфа) тогда и только тогда, когда,

каковы бы ни были различные точки x и y из E, существует такой индекс $i \in I$, что $d_i(x, y) > 0$. (VII, 6; 2_2)

Полуметрическое пространство называется отделимым, если его топология отделима. *Даже если это не будет указано явно, мы всегда будем считать, что полуметрическое пространство имеет отделимую структуру.*

Полурасстояния d_i, очевидно, являются непрерывными функциями, действующими из $E \times E$ в $\mathbb{R}_+$.

Может случиться, что все полурасстояния d_i будут в действительности расстояниями. *Однако даже в этом случае, если* *только семейство расстояний содержит более, чем один элемент, пространство будет называться полуметрическим, а не метрическим.*

Говорят, что топологическое пространство *полуметризуемо*, если его топология может быть определена с помощью некоторого семейства полурасстояний.

Теорема 38. *Для того чтобы топологическое пространство E было полуметризуемым, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало следующим свойством:*

каковы бы ни были точка $a \in E$ и открытая окрестность Ω точки a, существует непрерывная функция γ на E с вещественными значениями $\geqslant 0$, положительная в точке a и равная нулю в $\complement\Omega$.

Доказательство. 1) Пусть пространство E — полуметрическое и $(d_i)_{i \in I}$ — его семейство полурасстояний. Если Ω является окрестностью точки a, то существуют $i \in I$ и $\varepsilon > 0$, такие, что шар $B_i(a, \varepsilon)$ лежит в Ω. Искомая функция равна $x \to \varepsilon - d(x, a)$ в множестве B и равна 0 вне его. Эта конструкция уже встречалась в лемме 1 к теореме 11 гл. IV (о разложении единицы). Там предполагалось, что пространство метрическое и локально компактное, в чем для рассматриваемого результата необходимости нет.

2) Обратно, предположим, что E — топологическое пространство, обладающее указанным свойством. Каждой непрерывной функции γ на E с неотрицательными значениями поставим в соответствие функцию на $E \times E$, определенную по формуле, $(x, y) \to |\gamma(x) - \gamma(y)|$. Полученная функция, очевидно, будет полурасстоянием. Мы будем ее обозначать через d_γ.

Меняя γ, мы получаем семейство полурасстояний, а следовательно, некоторую полуметрическую структуру. Эта структура определяет некоторую топологию $\mathcal{T}'$. Покажем, что эта топология совпадает с исходной топологией $\mathcal{T}$. В самом деле, открытые шары $B_{\gamma, 0}(a, \varepsilon)$ образуют фундаментальную систему окрестностей точки a в топологии $\mathcal{T}'$. Однако, поскольку каждая функция γ непрерывна в топологии $\mathcal{T}$, эти шары открыты, а значит, являются окрестностями точки a в топологии $\mathcal{T}$. Следовательно, каждая $\mathcal{T}'$-окрестность точки a является и ее $\mathcal{T}$-окрестностью. Обратно, если Ω — открытая окрестность точки a в топологии $\mathcal{T}$, то существует такая функция γ, которая > 0 в точке a и равна нулю в дополнении $\complement\Omega$. Тогда шар $B_\gamma\left(a, \frac{\gamma(a)}{2}\right)$ как множество точек x, удовлетворяющих неравенству $|\gamma(x) - \gamma(a)| \leqslant \frac{\gamma(a)}{2}$ $\left(\text{а значит, } \gamma(x) \geqslant \frac{\gamma(a)}{2} > 0\right)$, лежит в Ω и является некоторой окрестностью точки a в топологии $\mathcal{T}'$. Таким образом, в $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ каждая точка имеет одни и те же окрестности, поэтому $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Замечание. Эта теорема не дает практического критерия для выяснения того, полуметризуемо ли данное пространство. Как бы то ни было, если и верно, что многие часто применяемые в анализе пространства неметризуемы, то почти все *они полуметризуемы*. В частности, каждое компактное или локально компактное пространство полуметризуемо [1]).

Непрерывность и равномерная непрерывность

Пусть E и F — два полуметрических пространства с семействами полурасстояний $(d_i)_{i \in I}$ и $(\delta_j)_{j \in J}$. Отображение f пространства E в пространство F непрерывно (понятие чисто топологическое), если

$$\forall a \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall j \in J, \quad \exists \eta > 0, \quad \exists i \in I: \\ (d_i(x-a) \leqslant \eta \Rightarrow \delta_j(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon). \qquad \text{(VII, 6; 3)}$$

Кроме того, оно может быть и *равномерно непрерывно* (ввести это понятие, имея в своем распоряжении лишь топологические структуры, невозможно). А именно оно таково, если

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall j \in J, \quad \exists \eta > 0, \quad \exists i \in I: \\ (d_i(x', x'') \leqslant \eta \Rightarrow \delta_j(f(x'), f(x'')) \leqslant \varepsilon). \qquad \text{(VII, 6; 4)}$$

Теорема 39. *Непрерывное отображение полуметрического компактного пространства E в полуметрическое пространство F равномерно непрерывно.*

Доказательство. Эта теорема является обобщением теоремы 31 гл. II на полуметрические пространства. Однако приведенное там доказательство здесь не подходит, так как оно основывалось на теореме Больцано — Вейерштрасса, в которой предполагается метризуемость. Мы дадим новое доказательство, которое, конечно, будет годиться и для частного случая метрического пространства.

Предположим, что утверждение теоремы несправедливо, и покажем, что такое предположение приводит к противоречию.

---

[1]) Для того чтобы убедиться в этом, достаточно применить лемму 1 теоремы 11 гл. IV, из которой видно, что условия теоремы 38 выполнены. Заметим, однако, что мы эту лемму в общем случае не доказывали, а провели доказательство только для метрического или полуметрического случая!

Пусть существуют $j \in J$ и $\varepsilon > 0$, такие, что для любого $i \in I$ и любого $\eta > 0$ найдется пара $(x', x'') \in E \times E$, удовлетворяющая неравенствам

$$d_i(x', x'') \leqslant \eta, \quad \delta_j(f(x'), f(x'')) \geqslant \varepsilon. \qquad (\text{VII}, 6; 4_2)$$

Зафиксируем такие j и ε. Для каждого i и каждого η множество $E_{i,\eta}$ пар $(x', x'') \in E \times E$, удовлетворяющих соотношениям (VII, 6; 4_2), замкнуто в компактном множестве $E \times E$ (поскольку f, d_i, δ_j непрерывны) и непусто.

Поскольку семейство полурасстояний направлено, то пересечение конечного числа множеств $E_{i,\eta}$ содержит множество, обладающее теми же свойствами, а следовательно, непусто. Значит, пересечение всех $E_{i,\eta}$ непусто.

Если пара (x', x'') лежит в этом пересечении, то для каждого $i \in I$ имеем $d_i(x', x'') = 0$, а так как пространство E отделимо, то $x' = x''$. В то же время $\delta_j(f(x'), f(x'')) \geqslant \varepsilon$ — противоречие.

Говорят, что отображение f пространства E в пространство F *удовлетворяет условию Липшица* (или, короче, *липшицево*), если, каков бы ни был индекс $j \in J$, существуют $i \in I$ и $k \geqslant 0$, такие, что для любых $x', x'' \in E$

$$\delta_j(f(x'), f(x'')) \leqslant k d_i(x', x''). \qquad (\text{VII}, 6; 4_3)$$

Всякое липщицево отображение равномерно непрерывно.

Равномерная структура. Липшицева структура

Две полуметрические структуры на одном и том же множестве называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же топологию, т. е. если тождественное отображение множества E, снабженного любой из этих двух структур, в множество E, снабженное другой структурой, непрерывно. Говорят, что они *равномерно эквивалентны* или что они *определяют одну и ту же равномерную структуру* на E, если тождественное отображение множества E, снабженного любой из этих двух структур, в множество E, снабженное другой структурой, равномерно непрерывно. Две равномерно эквивалентные полуметрические структуры, разумеется, эквивалентны.

Говорят, что две полуметрические структуры *эквивалентны по Липшицу* (*липшиц-эквивалентны*), или определяют одну и ту же липшицеву структуру, если тождественное отображение множества E, снабженного любой из этих структур, в множество E, снабженное другой структурой, липшицево. Две структуры, эквивалентные по Липшицу, тем более равномерно эквивалентны. Например, если к семейству полурасстояний в E добавить все точные верхние грани или суммы конечного числа этих полурасстояний, то получится структура, липшиц-эквивалентная исходной.

Непрерывность (соответственно равномерная непрерывность, соответственно липшицевость) отображений E в F не нарушается, если полуметрические структуры в E и в F заменить на эквивалентные (соответственно на равномерно эквивалентные, соответственно на эквивалентные по Липшицу) структуры.

Если E — компактное топологическое пространство, то, как мы видели (см. замечание после теоремы 38), его топологию можно задать полуметрической структурой. Согласно теореме 39, все такие структуры равномерно эквивалентны; иначе говоря, компактное топологическое пространство имеет единственную равномерную структуру.

Определение равномерной структуры можно дать более общим образом, непосредственно, как это было сделано для топологических структур. А именно поступают следующим образом.

Равномерная структура на множестве E определяется заданием семейства подмножеств в $E \times E$, называемых *окружениями*, удовлетворяющего следующим условиям:

1°) всякое подмножество в $E \times E$, содержащее окружение, является окружением;

2°) пересечение любого конечного числа окружений является окружением;

3°) если $\mathcal{U} \subset E \times E$—окружение, то существует такое окружение $\mathcal{V}$, что $(x, y) \in \mathcal{V}$ влечет за собой $(y, x) \in \mathcal{U}$ (симметричность);

4°) если $\mathcal{U} \subset E \times E$—окружение, то существует такое окружение $\mathcal{V}$, что $(x, y) \in \mathcal{V}$, $(y, z) \in \mathcal{V}$ влекут за собой $(x, z) \in \mathcal{U}$ (неравенство треугольника); (VII, 6; 4_4)

5°) для всякого окружения $\mathcal{U}$ и всякой точки $x \in E$ пара (x, x) принадлежит $\mathcal{U}$;

6°) аксиома отделимости: пересечение всех окружений совпадает с диагональю $E \times E$, т. е. множеством всех пар (x, x), где $x \in E$.

Окружения служат своего рода мерой близости; если $(x, y) \in \mathcal{U}$, то говорят, что точки x и y *близки порядка* $\mathcal{U}$, или $\mathcal{U}$-близки.

Равномерная структура естественным образом определяет топологию: множество $\mathcal{O}$ в E открыто в этой топологии, если для всякого $a \in \mathcal{O}$ существует такое окружение $\mathcal{U} \subset E \times E$, что из $(a, x) \in \mathcal{U}$ следует $x \in \mathcal{O}$. Топологическое пространство называется *равномеризуемым*, если его топология может быть определена с помощью некоторой равномерной структуры.

Пусть теперь E и F — два равномерных пространства. Отображение f пространства E в пространство F называется *равномерно непрерывным*, если, каково бы ни было окружение $\mathscr{V}$ в $F\times F$, существует такое окружение $\mathscr{U}$ в $E\times E$, что из $(x, y)\in\mathscr{U}$ следует $(f(x), f(y))\in\mathscr{V}$. В этом случае f и подавно непрерывно.

Если E — полуметрическое пространство с полурасстояниями d_i, $i\in I$, то множество $\mathscr{U}\subset E\times E$ назовем окружением, если существуют такие $i\in I$ и $\varepsilon>0$, что из неравенства $d_i(x, y)\leqslant\varepsilon$ следует включение $(x, y)\in\mathscr{U}$. Тем самым полуметрическая структура определяет равномерную структуру. Оказывается, что хотя топологическая структура не всегда может быть определена с помощью семейства полурасстояний (см. теорему 38), но каждую равномерную структуру (в смысле только что данного нами общего определения) с помощью некоторого семейства полурасстояний определить можно. Поэтому для топологических пространств понятия равномеризуемости и полуметризуемости равносильны. Это значит, что мы ничего не потеряем, если будем рассматривать лишь равномерные структуры, определенные исходя из полуметрических структур.

Что же касается липшицевых структур, то вряд ли будет интересным определять их без помощи полурасстояний.

Если E и F — полуметрические пространства, то, следуя способу, указанному в гл. II, стр. 63, на $E\times F$ можно определить различные полуметрические структуры. Все они эквивалентны по Липшицу. При этом все функции расстояния d_i из $E\times E$ в $\mathbb{R}_+$ будут липшицевыми.

Последовательности Коши. Секвенциально полные пространства

Пусть E — полуметрическое пространство.

Сходимость последовательности зависит только от топологии. Последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ элементов из E *сходится* к $a\in E$, если, каковы бы ни были $i\in I$ и $\varepsilon>0$, найдется такое целое число p, что при $n\geqslant p$ выполняются неравенства $d_i(x_n, a)\leqslant\varepsilon$.

Однако в нашем случае можно определить и понятие последовательности Коши, чего нельзя сделать, если иметь дело лишь с топологической структурой. Последовательность x_n называется *последовательностью Коши*, если при любом $i\in I$ последовательность $d_i(x_m, x_n)$ сходится к 0 при m и n, стремящихся к бесконечности, иначе говоря, если

$$\forall i\in I,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists p\in\mathbb{N}:\ (m\geqslant p,\ n\geqslant p\Rightarrow d_i(x_m, x_n)\leqslant\varepsilon). \quad \text{(VII, 6; 5)}$$

Это свойство последовательности не нарушается, если имеющуюся структуру заменить на равномерно ей эквивалентную (но оно может нарушиться, если ее заменить на просто эквивалентную структуру). Впрочем, последовательности Коши можно определить непосредственно с помощью окружений равномерных структур. Последовательность x_n будет *последовательностью Коши*, если для любого окружения $\mathcal{U}$ найдется такое число $p \geqslant 0$, что для $m \geqslant p$ и $n \geqslant p$ имеет место соотношение $(x_m, x_n) \in \mathcal{U}$.

Полуметрическое пространство называется *секвенциально полным* (или *полуполным*), если в нем каждая последовательность Коши сходится. Мы говорим «секвенциально полным», а не «полным», поскольку в случае, когда выходят за пределы метрических пространств, рассмотрение последовательностей может оказаться недостаточным. Существует более сильное понятие полноты пространства, о котором мы здесь не говорим, совпадающее с понятием секвенциальной полноты для метрических пространств или пространств, равномерно эквивалентных метрическим.

Метризуемые полуметрические пространства

Теорема 40. *Пусть E — полуметрическое пространство, определенное с помощью конечного или счетного множества полурасстояний $d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots$. Тогда на E существует метрическая структура, равномерно эквивалентная данной. В частности, рассматриваемое топологическое пространство E метризуемо.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что семейство полурасстояний $d_0, d_0 + d_1, \ldots, d_0 + d_1 + \ldots + d_n, \ldots$ равномерно эквивалентно данному семейству. Следовательно, не уменьшая общности, можно считать, что семейство полурасстояний возрастающее: $d_n \geqslant d_{n-1}$ для любого n.

Если заменить теперь каждое d_n на $\delta_n = \inf(d_n, 1)$, т. е. положить

$$\delta_n(x, y) = \min(d_n(x, y), 1), \qquad \text{(VII, 6; 6)}$$

то мы снова получим равномерно эквивалентное семейство. Следовательно, можно считать, что задана возрастающая последовательность расстояний $\delta_n \leqslant 1$. Положим теперь

$$\delta = \sup_{n \geqslant 0} \left(\frac{\delta_n}{2^n} \right), \quad \text{где} \quad \delta_n(x, y) = \max_{n \geqslant 0} \left(\frac{\delta_n(x, y)}{2^n} \right). \qquad \text{(VII, 6; 7)}$$

Этот максимум существует, поскольку для x и $y \in E$ последовательность $\delta_n(x, y)/2^n$ стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Функция δ, очевидно, представляет собой некоторое полурасстояние. Она даже является просто расстоянием, поскольку в силу предположения отделимости существует такое число n, что $\delta_n(x, y) > 0$, а значит, и $\delta(x, y) > 0$.

Покажем, что метрическая структура, определяемая расстоянием δ, равномерно эквивалентна данной структуре. Пусть сначала $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из $\delta \leqslant \varepsilon/2^n$ очевидным образом следует $\delta_n/2^n \leqslant \varepsilon/2^n$ или $\delta_n \leqslant \varepsilon$. Пусть теперь задано $\varepsilon > 0$. Найдем такое n, для которого $1/2^n \leqslant \varepsilon$. Тогда из $\delta_n \leqslant \varepsilon$ следует $\delta_i/2^i \leqslant \varepsilon$: при $i \leqslant n$, поскольку $\delta_i/2^i \leqslant \delta_n/2^i \leqslant \varepsilon/2^i \leqslant \varepsilon$, а при $i \geqslant n$ потому, что $\delta_i \leqslant 1$ и $1/2^i \leqslant 1/2^n \leqslant \varepsilon$. Следовательно, структуры $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и δ равномерно эквивалентны. Тем более они просто эквивалентны, а значит, топологическая структура, определенная первой из них, метризуема.

Замечание. Напротив, из самого способа, по которому мы образовывали $\delta_n = \inf(d_n, 1)$, видно, что полученная метрическая структура, вообще говоря, не является эквивалентной по Липшицу исходной структуре.

Ограниченные подмножества полуметрического пространства

Множество A полуметрического пространства E называется *ограниченным*, если для любого $i \in I$ оно содержится в некотором шаре относительно полурасстояния d_i. Свойство ограниченности зависит только от липшицевой структуры. В то же время множество может быть ограниченным в некоторой полуметрике и не быть ограниченным в другой, ей равномерно эквивалентной. Например, если вернуться к доказательству теоремы 39, то в структурах $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где $\delta_n = \inf(d_n, 1)$, совокупности ограниченных множеств не совпадают: скажем, во второй структуре все пространство ограничено.

Поскольку функции расстояния непрерывны, то *замыкание ограниченного подмножества ограничено.*

Полунормированные векторные пространства

Мы уже определяли понятие полунормы в векторном пространстве $\vec{E}$. К понятию нормы оно относится так же, как относится понятие полурасстояния к понятию расстояния. Это некоторая функция p, определенная на $\vec{E}$, со значениями в $\mathbb{R}_+$, обладающая следующими свойствами:

1°) *полуположительность*: $p(\vec{x}) \geqslant 0$, $p(\vec{0}) = 0$;

2°) *однородность*: $p(\lambda\vec{x}) = |\lambda|\, p(\vec{x})$, где λ — скаляр; (VII, 6; 7$_2$)

3°) *неравенство выпуклости*: $p(\vec{x}+\vec{y}) \leqslant p(\vec{x}) + p(\vec{y})$.

Векторное пространство $\vec{E}$ называется *полунормированным*[1]), если оно снабжено некоторым семейством полунорм $(p_i)_{i \in I}$ (которые мы будем обозначать также через $\| \ \|_i$, несмотря на то что часто обозначение $\| \ \|$ резервируют лишь для обычных норм), причем это семейство является направленным (фильтрующимся): *каково бы ни было конечное множество $J \subset I$, существует такое k, что норма $\| \ \|_k$ мажорирует все нормы $\| \ \|_j$, $j \in J$.*

Кроме того, даже в тех случаях, когда это явно не будет сказано, считается, что структура отделима, т. е.

$$\text{каково бы ни было } \vec{x} \neq \vec{0}, \text{ существует такое } i \in I, \text{ что } \|\vec{x}\|_i \neq 0. \qquad \text{(VII, 6; 7}_4\text{)}$$

Если p — полунорма, то функция $(x, y) \to p(x-y)$ есть полурасстояние, и притом согласующееся с векторной структурой: оно инвариантно относительно сдвига и при гомотетии умножается на модуль коэффициента гомотетии. Следовательно, векторное полунормированное пространство является также и топологическим пространством. Более того,

Теорема 41. *Векторное полунормированное пространство является топологическим векторным пространством: отображения $(\vec{x}, \vec{y}) \to (\vec{x} + \vec{y})$ множества $\vec{E} \times \vec{E}$ в $\vec{E}$ и $(\lambda, \vec{x}) \to \lambda\vec{x}$ множества $\mathbb{K} \times \vec{E}$ в $\vec{E}$ непрерывны.*

Доказательство. В самом деле, пусть заданы $a \in E$, $b \in E$, $i \in I$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из неравенств $\|\vec{x} - \vec{a}\|_i \leqslant \varepsilon/2$ и $\|\vec{y} - \vec{b}\|_i \leqslant \varepsilon/2$ будет вытекать неравенство $\|(\vec{x} + \vec{y}) - (\vec{a} + \vec{b})\|_i \leqslant \varepsilon$, доказывающее непрерывность (и даже равномерную непрерывность) сложения. Пусть теперь $\alpha \in \mathbb{K}$. Тогда имеет место неравенство

$$\|\lambda\vec{x} - \alpha\vec{a}\|_i \leqslant |\lambda - \alpha| \, \|\vec{x}\|_i + |\alpha| \, \|\vec{x} - \vec{a}\|_i. \qquad \text{(VII, 6; 7}_5\text{)}$$

При $|\lambda - \alpha| \, \|\vec{x}\|_i \leqslant \varepsilon/2$ и $|\alpha| \, \|\vec{x} - \vec{a}\|_i \leqslant \varepsilon/2$ будет выполняться неравенство $\|\lambda\vec{x} - \alpha\vec{a}\|_i \leqslant \varepsilon$. Второе из неравенств выполняется при $\|\vec{x} - \vec{a}\|_i \leqslant \varepsilon/|2\alpha|$, а первое — при $|\lambda - \alpha| \leqslant \varepsilon/2\|x\|_i$, т. е. если считать $\|\vec{x} - \vec{a}\|_i \leqslant 1$ при $|\lambda - \alpha| \leqslant \varepsilon/2(\|\vec{a}\|_i + 1)$. Таким образом, из неравенств

$$|\lambda - \alpha| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(\|\vec{a}\|_i + 1)}, \quad \|\vec{x} - \vec{a}\|_i \leqslant \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\right) \qquad \text{(VII, 6; 7}_6\text{)}$$

[1]) Чаще полунормированным пространством называют пространство, наделенное *одной* полунормой. — *Прим. ред.*

следует неравенство $\|\lambda\vec{x}-\alpha\vec{a}\|_i\leqslant\varepsilon$, доказывающее непрерывность умножения на скаляр в точке (α, a) произведения $\mathbb{K}\times\vec{E}$. Однако умножение не равномерно непрерывно (см. гл. II, стр. 24).

Теорема 42. *Пусть $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные пространства, полунормированные с помощью семейств полунорм $(p_i)_{i\in I}$ на $\vec{E}$ и $(q_j)_{j\in J}$ на $\vec{F}$.*

Для того чтобы линейное отображение u пространства $\vec{E}$ в пространство $\vec{F}$ было непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы оно было непрерывным в нуле, и в этом случае оно будет равномерно непрерывным и даже липшицевым. Для того чтобы u было непрерывно в нуле, необходимо и достаточно, чтобы для каждого индекса $j\in J$ нашлись такой индекс $i\in I$ и такая постоянная $k\geqslant 0$, что

$$q_j(u(\vec{x}))\leqslant kp_i(\vec{x}) \text{ для любого } \vec{x}\in\vec{E}, \text{ или } q_j\circ u\leqslant kp_i. \quad \text{(VII, 6; 8)}$$

Доказательство. Эта теорема является обобщением теоремы 47 гл. II и доказывается почти тем же способом.

Предположим, что отображение u непрерывно в начале. При $j\in J$ шар $B_j=B_j(\vec{0}, 1)$ является окрестностью точки $\vec{0}$ в $\vec{F}$. Следовательно, существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки $\vec{0}$ в $\vec{E}$, что $u(\mathcal{U})\subset B_j$. Далее, существуют такой индекс i и такое число $k>0$, что шар $B_i(\vec{0}, 1/k)$ лежит в $\mathcal{U}$, так что из $p_i(\vec{x})\leqslant 1/k$ вытекает $q_j(u(\vec{x}))\leqslant 1$. В силу однородности из $p_i(\vec{x})\leqslant\lambda/k$ следует $q_j(u(\vec{x}))\leqslant\lambda$. Полагая теперь $\lambda=kp_i(\vec{x})$, получаем $q_j(u(\vec{x}))\leqslant kp_i(\vec{x})$.

Обратно, если указанное условие выполнено, то отображение u очевидным образом непрерывно на E и даже липшицево.

Следствие. *Пусть $(p_i)_{i\in I}$ и $(q_j)_{j\in J}$ — два семейства полунорм на векторном пространстве $\vec{E}$. Для того чтобы они определяли одну и ту же топологию, необходимо и достаточно, чтобы для любого $j\in J$ существовали такие $i\in I$ и $k\geqslant 0$, что*

$$q_j\leqslant kp_i, \quad \text{(VII, 6; 9)}$$

и чтобы для любого $i'\in I$ существовали такие $j'\in J$ и $k'\geqslant 0$, что $p_{i'}\leqslant k'q_{j'}$.

При выполнении этих условий два семейства полунорм определяют одну и ту же равномерную и одну и ту же липшицеву структуры.

Для доказательства достаточно применить теорему к тождественному отображению пространства $\vec{E}$, снабженного одной из двух структур, в пространство $\vec{E}$, снабженное другой структурой. Это следствие обобщает теорему 12 гл. II, являющуюся, как мы указывали в замечании после теоремы 47 гл. II, следствием последней теоремы.

Из этого следствия вытекает, в частности, что для векторного полунормированного пространства $\vec{E}$ равномерные и липшицевы структуры зависят не от полунорм, а только от топологии. Можно убедиться, что, например, равномерная непрерывность отображения f пространства $\vec{E}$ в полуметрическое пространство F с полурасстояниями $(\delta_j)_{j \in J}$ определяется исключительно топологией пространства $\vec{E}$, а не задающими эту топологию полунормами: каковы бы ни были $j \in J$ и $\varepsilon > 0$, существует такая окрестность $\mathcal{U}$ точки $\vec{0}$ в $\vec{E}$, что из $\vec{x}'' - \vec{x}' \in \mathcal{U}$ следует, что $d_j(f(\vec{x}'), f(\vec{x}'')) \leqslant \varepsilon$.

Впрочем, каждое топологическое векторное пространство, независимо от того, определяется его топология полунормами или нет, равномеризуемо, а именно равномерную структуру можно определить следующим образом: подмножество $\mathcal{U} \subset \vec{E} \times \vec{E}$ является окружением, если существует такая окрестность $\mathcal{V}$ точки $\vec{0}$ в $\vec{E}$, что из $\vec{x} - \vec{y} \in \mathcal{V}$ следует $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathcal{U}$. Если $\vec{E}$ полунормировано, то эта структура равномерна и определяется с помощью полунорм. Согласно сказанному на стр. 461, отсюда следует, что всякое векторное топологическое пространство полуметризуемо, но это вовсе не означает, что оно полунормируемо. Однако почти все векторные топологические пространства анализа полунормируемы, и их топология обычно определяется как раз заданием полунорм.

Понятие полунормированного пространства, немногим более сложное, чем понятие нормированного пространства, оказывается очень полезным. Оно нам сейчас послужит для определения некоторых топологий, которые мы не могли изучать до настоящего момента, и даст нам возможность привести простые примеры неметризуемых топологических пространств или ненормируемых векторных топологических пространств.

Пример 1. *Топология простой сходимости.* Пусть E — произвольное множество и F — полуметрическое пространство с полурасстояниями δ_j, $j \in J$. Напомним, что через F^E мы обозначили множество всевозможных отображений E в F. Функция $\delta_{j,x}$, определенная на множестве $F^E \times F^E$ равенством

$$\delta_{j,x}(f, g) = \delta_j(f(x), g(x)), \quad j \in J, \ x \in E, \quad \text{(VII, 6; 10)}$$

является некоторым полурасстоянием. При переменных j и x семейство этих полурасстояний не фильтрующееся. Поэтому целесообразно рассмотреть также точные верхние грани

$$\delta_{j,A}(f, g) = \sup_{x \in A} \delta_j(f(x), g(x)) \quad \text{(VII, 6; 11)}$$

по всем конечным подмножествам A множества E. Тем самым определяется полуметрическая, а значит, и топологическая структура на F^E. Ее называют *полуметрической структурой простой сходимости.* Последовательность f_n отображений E в F сходится к отображению f в этой топологии тогда и только тогда, когда для любой конечной части A множества E и любого $j \in J$ последовательность $\delta_{j,A}(f_n, f)$ сходится к нулю, а также тогда и только тогда, когда для любого $x \in E$ и любого $j \in J$ последовательность $\delta_{j,x}(f_n, f)$ сходится к нулю. Последнее можно выразить, сказав, что для каждого $x \in E$ последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ или что f_n просто сходится к f.

Заметим, что окрестности точек в этой топологии «громадные»; другими словами, эта топология очень слабая и сходимость в ней слабая (простая сходимость). В самом деле, если $j \in J$ и A — конечное подмножество E, то шар $B_{j,A}(f, \varepsilon)$ является множеством отображений g пространства E в пространство F, для которых $\delta_j(g(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$ при $x \in A$ *и совершенно произвольно для* $x \in \complement A$.

Введенная топология зависит, очевидно, только от топологии пространства F, а не от его полуметрики. В самом деле, фундаментальную систему окрестностей точки $f \in F^E$ образуют множества

$$[x_1, \ldots, x_n, \mathscr{V}_1, \ldots, \mathscr{V}_n] = [g \in F^E, \ g(x_1) \in \mathscr{V}_1, \ldots, g(x_n) \in \mathscr{V}_n], \quad \text{(VII, 6; 12)}$$

где x_i — произвольные точки из E и $\mathscr{V}_i$ — произвольные окрестности точек $f(x_i)$ из F. Здесь F^E рассматривается как произведение E экземпляров пространства F. В гл. II мы определяли топологию произведения только для конечных произведений, но можно ее определить и для произвольных произведений, и предыдущая топология как раз и будет топологией произведения. Тем не менее часто удобно исходить именно из полуметрического пространства F и рассматривать F^E как полуметрическое пространство.

Пусть $a \in E$. Отображение $f \to f(a)$, ставящее в соответствие каждой функции f на E со значениями в F ее значение в точке a, является липшицевым отображением E^F в F. В самом деле, для каждого $j \in J$ имеем равенство $\delta_{j,a}(f, g) = \delta_j(f(a), g(a))$ и тем более неравенство $\leqslant$. Это отображение, следовательно, равномерно непрерывно. Если рассматривать F^E как бесконечное произведение, то мы тем самым обобщили утверждение, высказанное в § 6 гл. II: в топологии произведения все отображения проектирования непрерывны.

В частности, если $\vec{F}$ — векторное полунормированное пространство с полунормами $\| \ \|_j$, $j \in J$, то $\vec{F}^E$ становится также полунормированным векторным пространством с полунормами $|||\ |||_{j,A}$, определенными формулой

$$|||\vec{f}|||_{j,A} = \max_{x \in A} \|\vec{f}(x)\|_j. \qquad \text{(VII, 6; } 12_2\text{)}$$

Даже если F — метрическое или $\vec{F}$ — нормированное пространство, пространства F^E или $\vec{F}^E$ будут лишь соответственно полуметрическим или полунормированным. Если $F = \mathbb{C}$, то пространство $\mathbb{C}^E$ комплексных функций на множестве E является полунормированным топологическим векторным пространством с полунормами $\| \ \|_A$, определенными формулой

$$\|f\|_A = \max_{x \in A} |f(x)|. \qquad \text{(VII, 6; 13)}$$

Напомним, что в пространстве $\mathscr{C}'(X)$ мер Радона на локально компактном пространстве X мы вводили широкую топологию (гл. IV, § 7). Это не что иное, как топология простой сходимости на $\mathscr{C}(X)$, определенная с помощью полунорм

$$\|\mu\|_A = \sup_{\varphi \in A} |\mu(\varphi)|, \text{ где } A \text{ — конечная часть } \mathscr{C}(X). \qquad \text{(VII, 6; } 13_2\text{)}$$

Если множество E несчетно, то таким образом определенная топология на $\mathbb{C}^E$ неметризуема.

В самом деле, каждое счетное пересечение окрестностей точки 0 содержит некоторое бесконечномерное векторное подпространство. [Действительно, пусть $A_0, A_1, A_2, \ldots$ — последовательность конечных подмножеств в E. Какова бы ни была последовательность $\varepsilon_n > 0$, пересечение шаров $B_{A_n}(0, \varepsilon_n) = \{f \in \mathbb{C}^E; |f(x)| \leqslant \varepsilon_n \text{ для } x \in A\}$ содержит множество $\mathfrak{N}_A$ комплексных функций f на E, равных нулю на объединении A множеств A_n и принимающих произвольные значения вне его. Поскольку множество A счетно, а E несчетно, множество $\mathfrak{N}_A$ есть бесконечномерное векторное подпространство пространства $\mathbb{C}^E$.] Но в любом метрическом пространстве каждая точка обладает последовательностью окрестностей, пересечение которых сводится к этой точке; такова, скажем, последовательность шаров с центром в этой точке радиуса $1/2^n$.

Если множество E счетно, то в силу теоремы 40, пространство $\mathbb{C}^E$ метризуемо (то же самое верно и для пространства F^E, если структура F определена счетным множеством полурасстояний). *Однако это пространство ненормируемо, если только множество E не конечно*[1]).

В самом деле, каждая окрестность точки 0 содержит некоторое бесконечномерное векторное подпространство. [Шар $B_A(0, \varepsilon)$ содержит подпространство $\mathfrak{N}_A$ функций, равных нулю на множестве A и принимающих произвольные значения вне его. Поскольку множество A конечно, а множество E бесконечно, $\mathfrak{N}_A$ является бесконечномерным векторным подпространством $\mathbb{C}^E$.] Но в любом нормированном векторном пространстве начало обладает окрестностью, не содержащей ни одного отличного от $\{0\}$ векторного подпространства; таков, скажем, единичный шар.

Таким образом, *полунормированное топологическое векторное пространство может быть метризуемым, но не ненормируемым*. Это и не удивительно — норма является расстоянием весьма специального вида.

Рассмотрим последовательность полунорм p_n. Как и при доказательстве теоремы 40, их можно считать возрастающими.

Следуя этому доказательству, мы должны положить $q_n = \inf(p_n, 1)$, а затем $q = \sup\limits_{n \geqslant 0}(q_n/2^n)$, и тогда расстояние δ на E определится как $\delta(x, y) = q(x-y)$. *Однако q — не норма. Не будут нормами уже q_n*, поскольку $q_n \leqslant 1$ и для скаляра λ равенство $q_n(\lambda x) = |\lambda| q_n(x)$ не выполняется. Из сказанного вытекает, что шары относительно расстояния δ, образуя фундаментальную систему окрестностей нуля, содержат бесконечномерные векторные подпространства. Поэтому они весьма отличаются от шаров, определяемых с помощью норм. Метризуемость $\mathbb{C}^E$ для счетного множества E или, более общо, метризуемость F^E для счетного E и полуметрического F со счетным множеством расстояний весьма полезны для приложений теорем общей топологии, требующих метризуемости (например, теоремы 16 гл. II или теоремы Больцано — Вейерштрасса той же главы, характеризующей компактные подмножества в F^E). Однако в большинстве случаев в пространстве $\mathbb{C}^E$

---

[1]) Если E состоит из n элементов, то $\mathbb{C}^E$ изоморфно $\mathbb{C}^n$ и, значит, нормируемо.

предпочитают использовать счетное семейство полунорм, связанных с векторной структурой, а не с определенным выше расстоянием.

Пример 2. *Топология равномерной сходимости.* Во второй главе мы определили *равномерную* сходимость последовательности функций f_n, определенных на E, со значениями в F, к некоторому пределу f только для метрического пространства F. Теперь это можно сделать для полуметрического пространства F: последовательность f_n сходится к f при n, стремящемся к бесконечности, тогда и только тогда, когда для каждого j последовательность $\delta_j(f_n, f) = \sup\limits_{x \in E} \delta_j(f_n(x), f(x)) \leqslant \leqslant +\infty$ сходится к нулю. Иначе говоря, на пространстве $(F^E)_b$ *ограниченных* отображений E в F вводится полуметрическая структура, называемая *структурой равномерной сходимости*, с помощью полурасстояний

$$\delta_j(f, g) = \sup_{x \in E} \delta_j(f(x), g(x)) < +\infty. \qquad \text{(VII, 6; 14)}$$

Если F — метрическое пространство, то мы возвращаемся к расстоянию (II, 15; 3), введенному в гл. II.

Равномерная сходимость последовательности отображений E в F зависит не только от топологии пространства F, а также и от его равномерной структуры. Однако если заменить полуметрическую структуру F на другую, равномерно ей эквивалентную, то изменятся ограниченные множества в F, а следовательно, изменится пространство $(F^E)_b$. Поэтому, если мы интересуемся только топологическими и равномерными структурами, а не полуметрическими, то полурасстояния δ_j в F можно всегда заменить на равномерно эквивалентные им $\inf(\delta_j, 1)$. Тогда пространство F станет ограниченным, пространство $(F^E)_b$ совпадет с пространством F^E, также ограниченным, а топологические равномерные структуры равномерной сходимости на F^E будут определяться полурасстояниями $\inf(\delta_j(f, g), 1)$, зависящими только от равномерной структуры F [1]). Впрочем, равномерную структуру в F^E можно определить непосредственно исходя из равномерной структуры в F: $\mathscr{V} \subset F^E \times \times F^E$ будет окружением, если существует такое окружение $\mathscr{U} \subset F \times F$, что «$\forall x \in E \ (f(x), g(x)) \in \mathscr{U}$» влечет за собой включение «$(f, g) \in \mathscr{V}$».

[1]) Конечно, при этом теряется всякая возможность изучать ограниченные подмножества, и если δ_j определены исходя из полунорм на векторном пространстве $\vec{F}$, то $\inf(\delta_j, 1)$ этим свойством больше не обладает, так что теряется связь с векторной структурой.

Пример 3. *Топология компактной сходимости.* Пусть E — топологическое пространство и F — полуметрическое пространство с полурасстояниями δ_j, $j \in J$. Рассмотрим пространство $(F^E)_c$ *непрерывных* отображений E в F. Так как каждая непрерывная функция на компакте достигает своего максимума, то для любого компакта K и любого $j \in J$ функция

$$\delta_{j,K}(f, g) = \max_{x \in K} \delta_j(f(x), g(x)) \qquad \text{(VII, 6; 15)}$$

конечна и является полурасстоянием на $(F^E)_c$. При переменных j и K эти полурасстояния определяют на $(F^E)_c$ некоторую полуметрическую структуру. Последовательность непрерывных отображений f_n пространства E в F сходится в соответствующей топологии к отображению f тогда и только тогда, когда для каждого $j \in J$ и каждого компакта K из E последовательность $\delta_{j,K}(f_n, f)$ сходится к 0 при n, стремящемся к бесконечности, т. е. тогда и только тогда, когда для любого компакта K последовательность f_n сходится к f равномерно на K. Эта структура называется *полуметрической структурой равномерной сходимости на каждом компакте*, или *структурой компактной сходимости*. Соответствующая топология зависит только от топологии E и равномерной структуры F. Если $\vec{F}$ — полунормированное топологическое векторное пространство, то $(\vec{F}^E)_c$ будет также полунормированным топологическим векторным пространством с полунормами

$$|||\vec{f}|||_{j,K} = \max_{x \in K} \|\vec{f}(x)\|_j. \qquad \text{(VII, 6; 16)}$$

Например, пространство $(\mathbb{C}^E)_c$ непрерывных комплексных функций на E будет иметь полунормы, определяемые формулой

$$\|f\|_K = \max_{x \in K} |f(x)|. \qquad \text{(VII, 6; 16}_2\text{)}$$

Если E — локально компактное пространство, счетное в бесконечности, а F — полуметрическое пространство со счетным множеством полурасстояний, то топологическое пространство $(F^E)_c$ метризуемо. В самом деле, пусть A_n — последовательность компактов, объединение которых равно E, и B_n — последовательность компактных окрестностей компактов A_n. Тогда каждый компакт K из E для достаточно больших n содержится в B_n [1]), а счетное множество полурасстояний δ_{j,B_n} эквивалентно по Липшицу семейству всех $\delta_{j,K}$, где K — ком-

[1]) Смотри доказательство теоремы 11 гл. IV (о разложении единицы) — стр. 457 т. I.

пакты из E, так что для доказательства остается лишь воспользоваться теоремой 40. Если локально компактное пространство E некомпактно, то из рассуждений, проведенных в примере 1, следует, что метризуемое векторное пространство $(\mathbb{C}^E)_c$ ненормируемо, поскольку каждая окрестность нуля содержит некоторый шар $B_K(0, \varepsilon)$, а следовательно, и векторное бесконечномерное подпространство $\mathfrak{N}_K$ функций, равных нулю на компакте K и принимающих произвольные значения вне его[1]).

Пример 4. *Пространства дифференцируемых функций.* Пусть Ω — некоторое открытое множество из $\mathbb{R}^n$[2]) и $\vec{F}$ — некоторое банахово пространство. Рассмотрим пространство $\left(F^\Omega\right)_{c,m}$ функций класса C^m на Ω со значениями в $\vec{F}$. Его обозначают также через $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ или через $\mathscr{E}^m(\Omega)$, если $\vec{F} = \mathbb{C}$. Это пространство можно снабдить полунормами

$$|||\vec{f}\,|||_{m,K} = \max_{\substack{x \in K \\ |p| \leqslant m}} \|D^p\vec{f}(x)\|. \qquad \text{(VII, 6; 17)}$$

Последовательность функций $\vec{f}_j$ из $\mathscr{E}^m(\Omega; F)$ сходится к $\vec{f}$ в соответствующей топологии при j, стремящемся к бесконечности, тогда и только тогда, когда для любого индекса дифференцирования p порядка $|p| \leqslant m$ функции $D^p\vec{f}_j$ сходятся к функции $D^p\vec{f}$ равномерно на каждом компакте из Ω. Эта топология называется *топологией компактной сходимости относительно производных порядка* $\leqslant m$. Можно также рассмотреть пространство $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F}) = \mathscr{E}^\infty(\Omega; \vec{F})$ ($\mathscr{E}(\Omega)$, если $\vec{F} = \mathbb{C}$) отображений класса C^∞ множества Ω в $\vec{F}$ и для каждого целого $m \geqslant 0$ и каждого компакта K из Ω определить в нем полунорму $|||\ |||_{m,K}$. Поскольку Ω представляет собой объединение счетного множества компактов [если оно ограничено, то можно взять последовательность $K_\nu = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, \complement\Omega) \geqslant 1/\nu\}$, в противном случае — последовательность $K_\nu = \{x \in \Omega;\ d(x, \complement\Omega) \geqslant 1/\nu,\ d(x, 0) \leqslant \nu\}$], то эти полунормированные векторные пространства метризуемы, хотя и ненормируемы. Если для каждого компакта $K \subset \Omega$ через $\mathscr{D}_K^m(\Omega)$ (соответственно через $\mathscr{D}_K(\Omega)$) обозначить подпространство пространства $\mathscr{E}^m(\Omega)$ (соответ-

---

[1]) Если пространство E компактно, то $\left(\mathbb{C}^E\right)_{cb} = \mathscr{C}(E)$ — банахово пространство.

[2]) Для простоты мы берем $\mathbb{R}^n$. Можно было бы взять произвольное конечномерное векторное пространство.

ственно $\mathscr{E}(\Omega)$) функций с носителем в K, то его можно снабдить индуцированной топологией. Она определяется нормой $\| \ \|_{m,K}$ (соответственно нормами $\| \ \|_{m,K}$ при целых $m \geqslant 0$). Норма $\| \ \|_{m,K}$ на $\mathscr{D}_K^m(\Omega)$ также индуцируется нормой $\| \ \|_m$ банахова пространства $(\mathbb{C}^\Omega)_{cb;\,m}$ (следствие 2 теоремы 111 гл. IV). Поскольку подпространство $\mathscr{D}_K^m(\Omega)$ очевидным образом замкнуто в $(\mathbb{C}^\Omega)_{cb;\,m}$, оно также является банаховым пространством. Напротив, можно показать, что пространство $\mathscr{D}_K(\Omega)$ метризуемое и полунормированное, но ненормируемое (это не очевидно; доказательство из примера 1 непригодно, поскольку $\| \ \|_{m,K}$ являются нормами на $\mathscr{D}_K(\Omega)$ и шар не содержит ни одного векторного пространства, кроме $\{0\}$). Мы в этом убедимся ниже (см. замечание к следствию 6 теоремы 47).

Пример 5. *Пространство голоморфных функций.* Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{C}^n$, т. е. из $\mathbb{R}^{2n}$. Пользуясь одной вещественной структурой, т. е. считая $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, определим пространства $\mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F})$ и $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})$. Обозначим через $\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F})$ пространство голоморфных функций на Ω со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$ (над полем комплексных чисел). Это замкнутое подпространство пространства $\mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F})$ для всех m и, согласно теореме 15 Вейерштрасса, подпространство пространства $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})$. Кроме того, топологии в $\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F})$, индуцированные топологиями пространств $\mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F})$ и $\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F})$, совпадают. Пространство это метризуемое и полунормируемое, но ненормируемое. Здесь снова его ненормируемость не очевидна. (В самом деле, для множества K, имеющего внутренние точки, и связного множества Ω все полунормы $\| \ \|_{m,K}$ являются нормами в $\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F})$. Действительно, если голоморфная функция $\vec{f}$ равна нулю на K, то, согласно следствию 5 теоремы 11, она равна нулю на связном множестве Ω. Но тогда соответствующие шары не содержат других векторных подпространств, кроме $\{0\}$, и проводимые в примере 1 рассуждения непригодны.) Мы установим это в замечании к следствию 6 теоремы 47.

Замечание. Имеют место включения:

$$(F^E)_c \subset F^E, \quad (F^E)_b \subset F^E,$$

$$\mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F}) \subset \mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F}) \subset (\vec{F}^\Omega)_c \subset \vec{F}^\Omega,$$

$$\mathscr{H}(\Omega;\ \vec{F}) \subset \mathscr{E}(\Omega;\ \vec{F}),$$

и соответствующие канонические инъекции непрерывны.

Теорема 43. *Если пространство F или $\vec{F}$ секвенциально полно, то пространства F^E (E — множество), $(F^E)_b$ (E — множество), $(F^E)_c$ (E — локально компактное топологическое пространство), $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ (Ω — открытое множество из $\mathbb{R}^n$), $\mathscr{E}(\Omega; F)$ и $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ (Ω — открытое множество из $\mathbb{C}^n$) секвенциально полны.*

Доказательство. 1) Пусть f_n — последовательность Коши из F^E (простая сходимость). Тогда для любого $x \in E$ точки $f_n(x)$ образуют последовательность Коши в пространстве F, по предположению секвенциально полном, а следовательно, сходятся к некоторому пределу $f(x)$. В этом случае f_n просто сходятся к f, а значит, F^E секвенциально полно.

2) Пусть f_n — последовательность Коши из $(F^E)_b$ (равномерная сходимость). Согласно 1), функции f_n просто сходятся к пределу f. Кроме того, для $j \in J$ и $\varepsilon > 0$ существует такое целое число p, что $\delta_j(f_n, f_m) \leqslant \varepsilon$ при $m \geqslant p$ и $n \geqslant p$, а следовательно, $\delta_j(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$ для любого $x \in E$. Переходя к пределу при m, стремящемся к бесконечности, получаем отсюда $\delta_j(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon$, т. е. $\delta_j(f, f_n) \leqslant \varepsilon$. Таким образом, функции f_n при n, стремящемся к бесконечности, равномерно сходятся к f. Далее, поскольку f_n ограничены, из написанного выше неравенства следует, что функция f ограничена и, значит, $f \in (F^E)_b$, а функции f_n сходятся к f в пространстве $(F^E)_b$, что и означает секвенциальную полноту этого пространства.

3) Пусть f_n — последовательность Коши в $(F^E)_c$ (равномерная сходимость на каждом компакте). Из 1) следует, что f_n просто сходятся к некоторому пределу f. Если применить 2) к некоторому компакту $K \subset E$ вместо самого пространства E, то получим, что f_n равномерно сходятся к f на K. Из теоремы 65 гл. II (хотя и доказанной лишь для метрического пространства F, но, очевидно, также справедливой и для полуметрического пространства F) следует, что сужение f на K непрерывно. Поскольку каждая точка E имеет компактную окрестность, то f непрерывна на E, т. е. $f \in (F^E)_c$. Но тогда f_n сходится к f в пространстве $(F^E)_c$, которое тем самым оказывается секвенциально полным.

4) Пусть f_n — последовательность Коши в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, где $\vec{F}$ — пространство Банаха. При $m = 0$ искомый результат вытекает из 3). При $m \geqslant 1$ и $|p| \leqslant m$ точки $D^{\vec{p}} f_n$ образуют последовательность Коши в $(\vec{F}^\Omega)_c$, которая, следовательно, равномерно сходится на каждом компакте из Ω к некоторой функ-

ции $\vec{f}_p$ на Ω со значениями в $\vec{F}$. Из следствия 1 теоремы 111 гл. IV вытекает, что $\vec{f}$ принадлежит классу C^m и что $\vec{f}_p = D^p\vec{f}$ при $|p| \leqslant m$. Значит, $\vec{f} \in \mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, а $\vec{f}_n$ сходятся к $\vec{f}$ в пространстве $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, которое тем самым оказывается секвенциально полным. То же самое справедливо для $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$.

5) Мы знаем, что $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ — замкнутое, а следовательно, секвенциально замкнутое подпространство секвенциально полного пространства $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$. Значит, оно само секвенциально полно (очевидное обобщение теоремы 43 гл. II на полуметрические пространства).

Замечание. Как отмечалось на странице 462, в случае пространств со счетным множеством полурасстояний секвенциально полные пространства можно называть просто полными. Так будет в случае 1), если множество E конечно или счетно; в случае 2); в случае 3), если E счетно в бесконечности, при условии, что в каждом из этих случаев полуметрическая структура F определена счетным множеством полурасстояний. Так будет всегда в случаях 4) и 5) при том же самом условии на $\vec{F}$, поскольку Ω — объединение счетного множества компактов. Кроме того, можно доказать, что если пространство F полно (понятие, здесь не определявшееся), то во всех случаях 1)—5) рассматриваемые пространства также полны.

Ограниченные множества в топологическом векторном пространстве

На стр. 463 мы дали определение ограниченных множеств в полуметрическом пространстве. Для полунормированного векторного пространства с полунормами p_i, $i \in I$, это означает следующее: множество B ограничено, если для любого i полунорма p_i ограничена на B. Хотя, вообще говоря, ограниченные множества зависят от липшицевой структуры, в полунормированном векторном пространстве в силу следствия теоремы 42 они вполне определяются топологией. А именно, множество B ограничено в топологическом векторном пространстве $\vec{E}$ тогда и только тогда, когда для любой окрестности $\mathscr{V}$ точки $\vec{0}$ найдется такое число $\eta > 0$, что $\eta B \subset \mathscr{V}$. Укажем ограниченные множества в предыдущих примерах.

Пример 1. Множество B ограничено в $\vec{F}^E$ (E — множество, $\vec{F}$ — векторное полунормированное пространство) тогда только тогда, когда множество $B(x)=\{\vec{f}(x),\ \vec{f}\in B\}$ при любом $x\in E$ ограничено в $\vec{F}$. (Говорят еще, что функции $\vec{f}$ из B ограничены в совокупности в каждой точке E.) В частности, $B\subset\mathbb{C}^E$ ограничено тогда и только тогда, когда в каждой точке $x\in E$ функции $|f(x)|$ при $f\in B$ ограничены в совокупности (граница, конечно, зависит от x).

Пример 2. В пространстве $(\vec{F}^E)_b$ ограниченных функций, определенных на множестве E, со значениями в полунормированном векторном пространстве $\vec{F}$ множество B ограничено тогда и только тогда, когда множество $\vec{f}(x)$, где $x\in E$, $\vec{f}\in B$, ограничено в $\vec{F}$ (снова говорят, что функции $\vec{f}\in B$ ограничены в совокупности на E). В частности, множество B ограничено в $(\mathbb{C}^E)_b$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{x\in E,\ f\in B}|f(x)|$ конечен.

Пример 3. В пространстве $(\vec{F}^E)_c$ непрерывных отображений топологического пространства E в векторное полунормированное пространство $\vec{F}$ множество B ограничено тогда и только тогда, когда для любого компакта K из E множество значений $\vec{f}(x)$, где $x\in K$, $\vec{f}\in B$, ограничено в $\vec{F}$ (говорят еще, что функции $\vec{f}\in B$ ограничены в совокупности на каждом компакте K из E). В частности, множество B ограничено в $(\mathbb{C}^E)_c$ тогда и только тогда, когда для любого компакта K из E величина $\sup\limits_{x\in K,\ f\in B}|f(x)|$ конечна, т. е. если для любого компакта K найдется такое число $M_K\geqslant 0$, что

$$|f(x)|\leqslant M_K \quad \text{для} \quad x\in K,\ f\in B. \tag{VII, 6; 18}$$

Пример 4. В пространстве $\mathscr{E}^m(\Omega;\vec{F})$, где $\vec{F}$ — банахово пространство, множество B ограничено тогда и только тогда, когда для каждого компакта K из Ω конечна величина $\sup\limits_{x\in K,\ |p|\leqslant m,\ f\in B}\|D^p\vec{f}(x)\|$, т. е. когда для каждого K существует такое число $M_K\geqslant 0$, что

$$\|D^p\vec{f}(x)\|\leqslant M_K \quad \text{для} \quad x\in K,\quad |p|\leqslant m,\quad \vec{f}\in B. \tag{VII, 6; 19}$$

В пространстве $\mathscr{E}(\Omega;\vec{F})=\mathscr{E}^\infty(\Omega;\vec{F})$ множество B ограничено тогда и только тогда, когда для каждого компакта K из Ω и каждого целого $m\geqslant 0$ конечна величина $\sup\limits_{x\in K,\ |p|\leqslant m,\ \vec{f}\in B}\|D^p\vec{f}(x)\|$, т. е. когда для каждого компакта K и каждого m найдется такое число $M_{K,m} \geqslant 0$, что

$$\|D^p \vec{f}(x)\| \leqslant M_{K,m} \quad \text{для} \quad x \in K, \quad |p| \leqslant m, \quad \vec{f} \in B. \qquad (\mathrm{VII}, 6; 19_2)$$

Пример 5. Поскольку $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ является топологическим векторным подпространством пространства $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ или $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$, этот пример сводится к примеру 4.

Эти примеры указывают на существенное различие между нормированными векторными пространствами и полунормированными пространствами. В нормированном пространстве *шары с центром в $\vec{0}$ являются одновременно окрестностями нуля и ограниченными множествами.* Множество ограничено, если оно лежит в некотором шаре. Оно будет окрестностью нуля, если содержит некоторый шар с центром в $\vec{0}$. В полунормированном же пространстве E множество является окрестностью нуля, если *существует* такое $i \in I$, что это множество содержит шар относительно полунормы $\| \ \|_i$, а ограничено оно, если для *каждого* $i \in I$ это множество содержится в некотором шаре относительно полунормы $\| \ \|_i$. В предыдущих примерах 1—5 окрестности нуля не ограничены (кроме случаев вырождения: в примере 1, если E конечно и $\vec{F}$ нормировано; в примере 2, если F нормировано, и в примере 3, если E компактно и $\vec{F}$ нормировано). Можно доказать, что, *если в полунормированном векторном пространстве существует ограниченная окрестность $\vec{0}$, то это пространство нормируемо.*

Множества равностепенно непрерывных отображений и теоремы Асколи

Пусть E — топологическое пространство и F — полуметрическое пространство с полурасстояниями $(\delta_j)_{j \in J}$. Напомним, что отображение f пространства E в пространство F непрерывно в точке $a \in E$, если для каждого индекса $j \in J$ и каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $\mathscr{U}$ точки a в E, что для всех x из $\mathscr{U}$ справедливы неравенства $\delta_j(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим теперь некоторое множество $\mathscr{F}$ непрерывных функций и предположим, что для любого $j \in J$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать *одну и ту же окрестность $\mathscr{U}$ точки a в E,* такую, что для всех $x \in \mathscr{U}$ и всех $f \in \mathscr{F}$ имеет место неравенство $\delta_j(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon$. В этом случае говорят, что функции $f \in \mathscr{F}$ *равностепенно непрерывны в точке $a \in E$* или что множество $\mathscr{F}$ *равностепенно непрерывно в точке a.* Говорят, что функции $f \in \mathcal{F}$ *равностепенно непрерывны* или что множество $\mathcal{F}$ *равностепенно непрерывно*, если указанное выше свойство имеет место для каждой точки $a \in E$. Каждое конечное множество непрерывных функций равностепенно непрерывно. Объединение двух равностепенно непрерывных множеств равностепенно непрерывно.

Если пространство E, кроме того, полуметрическое с полурасстояниями $(d_i)_{i \in I}$, то множество $\mathcal{F}$ мы будем называть *равномерно равностепенно непрерывным*, если для любого $j \in J$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $i \in I$ и $\eta > 0$, что для всех $f \in \mathcal{F}$ из $d_i(x', x'') \leqslant \eta$ следует $\delta_j(f(x'), f(x'')) \leqslant \varepsilon$.

Например, если все функции $f \in \mathcal{F}$ липшицевы и если для всех $j \in J$ найдутся один и тот же индекс $i \in I$ и одно и то же число $k \geqslant 0$, такие, что $\delta_j(f(x'), f(x'')) \leqslant k d_i(x', x'')$ для любой функции $f \in \mathcal{F}$, то множество $\mathcal{F}$ равномерно равностепенно непрерывно, и можно даже сказать, что оно *равностепенно липшицево*. Так, если $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — нормированные векторные пространства, то множество отображений $u \in \mathcal{L}(\vec{E}; \vec{F})$, таких, что $\|u\| \leqslant M$ (шар радиуса M в $\mathcal{L}(\vec{E}; \vec{F})$), будет равностепенн) липшицевым (поскольку $\|u(\vec{x}) - u(\vec{y})\| \leqslant M \|\vec{x} - \vec{y}\|$), а следовательно, равномерно равностепенно непрерывным на $\vec{E}$. Если $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — полунормированные пространства, то множество $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(\vec{E}; \vec{F})$ равностепенно непрерывно тогда и только тогда, когда оно равностепенно непрерывно в начале, и в этом случае $\mathcal{F}$ равностепенно липшицево, а значит, и равномерно равностепенно непрерывно. Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы для всех $j \in J$ существовали такой индекс $i \in I$ и такое число $k \geqslant 0$, что $q_j(u) \leqslant k p_i$ для всех функций $u \in \mathcal{F}$ (обобщение теоремы 42).

Пусть E и F — аффинные нормированные пространства, Ω — открытое множество в E и $\mathcal{F}$ — множество таких *дифференцируемых* отображений f множества Ω в F, у которых нормы $\|f'(x)\|$ производных $f'(x) \in \mathcal{L}(\vec{E}; \vec{F})$ при $x \in \Omega$ и $f \in \mathcal{F}$ ограничены одним и тем же числом $M \geqslant 0$. Тогда множество $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно. В самом деле, из формулы конечных приращений следует, что $\|\overrightarrow{f(x'') - f(x')}\| \leqslant M \|\overrightarrow{x'' - x'}\|$ для каждой функции $f \in \mathcal{F}$, лишь бы только отрезок $[x', x'']$ лежал в Ω. Следовательно, если $a \in \Omega$ и задано $\varepsilon > 0$, то, для того чтобы при всех $x \in \mathcal{U}$ и $f \in \mathcal{F}$ выполнялось неравенство $\|\overrightarrow{f(x) - f(a)}\| \leqslant \varepsilon$, достаточно в качестве $\mathcal{U}$ выбрать шар с центром в точке a радиуса $\leqslant \varepsilon/M$, целиком лежащий в Ω. В действительности достаточно предполагать еще меньше. Если для каждой точки $a \in \Omega$ найдутся такая ее открытая окрестность ω и такое число $M \geqslant 0$, что $\|f'(x)\| \leqslant M$ для всех $x \in \omega$ и $f \in \mathscr{F}$, то результат сохранится, поскольку в этом случае можно в качестве $\mathscr{U}$ взять шар, лежащий в ω.

В частности, возвращаясь к сказанному об ограниченных множествах в примере 4 при $m=1$ и учитывая, что ограниченные множества в примере 5 — те же самые, что и в примере 4, мы видим, что каждая ограниченная часть из $\mathscr{E}^1(\Omega; \vec{F})$ или из $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ является равностепенно непрерывным множеством отображений Ω в $\vec{F}$.

Теорема 44 (первая теорема Асколи). *Пусть E — топологическое пространство и F — полуметрическое пространство. Пусть $\mathscr{F}$ — множество отображений E в F, равностепенно непрерывное в точке $a \in E$. Тогда замыкание $\bar{\mathscr{F}}$ множества $\mathscr{F}$ в F^E (F^E — пространство всех отображений E в F, снабженное топологией простой сходимости) также равностепенно непрерывно в точке a.*

Доказательство. Зададимся одним из полурасстояний δ_j на F и $\varepsilon > 0$. Поскольку множество $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывно в точке a, существует такая окрестность $\mathscr{U}_{j,\varepsilon} = \mathscr{U}$ точки a в E, что для $x \in \mathscr{U}$, $g \in \mathscr{F}$ выполняется неравенство

$$\delta_j(g(a), g(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(VII, 6; 20)}$$

Пусть теперь x — произвольная точка $\mathscr{U}$, а f — произвольная функция из множества $\bar{\mathscr{F}}$. Среди полурасстояний на F^E имеется полурасстояние $\delta_{j,\{a,x\}}$, определяемое равенством $\delta_{j,\{a,x\}}(u, v) = \sup[\delta_j(u(a), v(a)), \delta_j(u(x), v(x))]$. Следовательно, для функции f, принадлежащей замыканию $\bar{\mathscr{F}}$, найдется такая функция $g \in \mathscr{F}$ (g зависит от f, a, x, j, ε), что

$$\delta_j(f(a), g(a)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad \delta_j(f(x), g(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \qquad \text{(VII, 6; 21)}$$

Ясно, что для $x \in \mathscr{U}$ и $f \in \bar{\mathscr{F}}$ справедливо неравенство

$$\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant \delta_j(f(a), g(a)) + \delta_j(g(a), g(x)) + \\ + \delta_j(g(x), f(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon; \qquad \text{(VII, 6; 22)}$$

следовательно, для каждого $j \in J$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $\mathscr{U}$ точки a в E, что для $x \in \mathscr{U}$, $f \in \bar{\mathscr{F}}$ имеет место неравенство $\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant \varepsilon$, чем и доказана равностепенная непрерывность множества $\bar{\mathscr{F}}$ в точке a.

Следствие 1. *В условиях теоремы все функции f из $\bar{\mathscr{F}}$ непрерывны в точке a. Каждый простой предел*[1] *f последовательности функций f_n из $\mathscr{F}$ непрерывен в точке a.*

Замечание. Это следствие существенно дополняет теорему 65 гл. II. Теорема эта утверждает, что *локально равномерный* предел последовательности непрерывных функций f_n непрерывен. Мы видим, что непрерывным может быть и *простой* предел последовательности непрерывных функций f_n, если эти функции f_n не только непрерывны в отдельности, но и *равностепенно* непрерывны.

В действительности теорема 65 гл. II и предыдущая теорема очень близки.

1) *Если последовательность функций f_n, непрерывных в точке a, локально равномерно сходится к пределу f (необходимо также непрерывному в этой точке), то функции f_n равностепенно непрерывны в точке a.*

В самом деле, пусть заданы $j \in J$ и $\varepsilon > 0$. В силу равномерной локальной сходимости можно найти такую окрестность $\mathscr{U}_1$ точки a в E и такое целое число $p \geqslant 0$, что при $n \geqslant p$ и $x \in \mathscr{U}_1$ выполняется неравенство $\delta_j(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon/3$. Для конечного числа функций $f, f_0, f_1, \ldots, f_{p-1}$, непрерывных в точке a, можно найти такую окрестность $\mathscr{U}_2$ точки a, что для всех $x \in \mathscr{U}_2$ выполняются неравенства $\delta_j(f(x), f(a)) \leqslant \varepsilon/3$ и $\delta_j(f_n(x), f_n(a)) \leqslant \varepsilon$ для $n < p$. Но тогда для $x \in \mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2$ выполняются неравенства

$$\delta_j(f_n(a), f_n(x)) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n < p \qquad \text{(VII, 6; 23)}$$

и

$$\delta_j(f_n(a), f_n(x)) \leqslant (\delta_j(f_n(a), f(a)) + \delta_j(f(a), f(x)) + \\ + \delta_j(f(x), f_n(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqslant p, \qquad \text{(VII, 6; 24)}$$

чем и доказана равностепенная непрерывность множества функций f_n в точке a.

Обратно, мы увидим ниже (следствие 1 следующей теоремы), что

2) *Если E локально компактно, то любая просто сходящаяся последовательность равностепенно непрерывных на E функций сходится локально равномерно.*

Таким образом, если непрерывные на локально компактном пространстве E функции f_n просто сходятся к f, то предположение, что они локально равномерно сходятся, равносильно предположению, что они равностепенно непрерывны на E, и в этом случае их предел f непрерывен. Но хотя теорема 65 гл. II и предыдущая теорема 44, таким образом, «теоретически» эквивалентны, *практически* они дают два сугубо различных критерия непрерывности предельной функции f.

Следствие 2. *Аналогичные результаты имеют место для равностепенной непрерывности на всем пространстве E или равномерной равностепенной непрерывности в случае, когда пространство E полуметрическое.*

Теорема 45 (вторая теорема Асколи). *Пусть E — топологическое и F — полуметрическое пространства. На равностепенно непрерывном множестве $\mathscr{F}$ отображений E в F полуметрические структуры простой сходимости на плотном подмножестве E_0 пространства E, простой сходимости на E и равномерной сходимости на каждой компактной части из E равномерно эквивалентны* (*иначе говоря, соответствующие равномерные структуры тождественны и, в частности, соответствующие топологии совпадают*).

Доказательство. Полуметрическая структура простой сходимости на E_0 определяется полурасстояниями

$$\delta_{j, A_0}(f, g) = \max_{x \in A_0} \delta_j(f(x), g(x)), \tag{VII, 6; 25}$$

где A_0 — конечная часть E_0. Структура простой сходимости на E определяется полурасстояниями

$$\delta_{j, A}(f, g) = \max_{x \in A} \delta_j(f(x), g(x)), \tag{VII, 6; 26}$$

где A — конечная часть E.

Наконец, структура равномерной сходимости на компактных частях E определяется полурасстояниями

$$\delta_{j, K}(f, g) = \max_{x \in K} \delta_j(f(x), g(x)), \tag{VII, 6; 27}$$

где K — компактная часть E.

Поскольку вторая из этих равномерных структур является промежуточной между первой и третьей, достаточно показать, что эти последние равномерно эквивалентны. Впрочем, поскольку каждое из полурасстояний первой структуры является также полурасстоянием в третьей (можно взять $K = A_0 \subset E_0$), то достаточно установить лишь обратное утверждение. Это утверждение, очевидно, неверно для множества $(F^E)_c$ всех непрерывных отображений E в F. Однако речь идет лишь о структурах, индуцированных на равностепенно непрерывной части $\mathscr{F}$ множества $(F^E)_c$.

Итак, пусть K — некоторый компакт из E, $j \in J$ и $\varepsilon > 0$. Докажем, что тогда существуют такая конечная часть A_0 множества E_0 и такое число $\eta > 0$, что при $\delta_{j, A_0}(f, g) \leqslant \eta$ *для* f *и* g *из* $\mathcal{F}$ выполняется неравенство $\delta_{j, K}(f, g) \leqslant \varepsilon$. Доказать это очень просто. В силу равностепенной непрерывности множества $\mathcal{F}$ для каждой точки a из K можно указать такую окрестность $\mathcal{U}_a$ точки a в E, что при $x \in \mathcal{U}_a$ и $h \in \mathcal{F}$ выполняется неравенство $\delta_j(h(a), h(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Для покрытия компакта K достаточно конечного числа окрестностей $\mathcal{U}_a$. Пусть это будут $\mathcal{U}_{a_\nu}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. Так как множество E_0 по предположению плотно, каждая из окрестностей $\mathcal{U}_{a_\nu}$ содержит некоторую точку b_ν из E_0. Поэтому для f и g из $\mathcal{F}$ и $x \in \mathcal{U}_{a_\nu}$ имеем

$$\delta_j(f(x), g(x)) \leqslant \delta_j(f(x), f(a_\nu)) + \delta_j(f(a_\nu), f(b_\nu)) + \\ + \delta_j(f(b_\nu), g(b_\nu)) + \delta_j(g(b_\nu), g(a_\nu)) + \delta_j(g(a_\nu), g(x)). \quad \text{(VII, 6; 28)}$$

Если теперь положить $A_0 = \{b_\nu\}_{\nu=1, 2, \ldots, n}$, $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$, то, поскольку каждая из точек $x \in K$ лежит в одном из $\mathcal{U}_{a_\nu}$, из неравенства $\delta_{j, A_0}(f, g) \leqslant \eta$ будет следовать неравенство $\delta_{j, K}(f, g) \leqslant \varepsilon$.

Следствие 1. *Если последовательность равностепенно непрерывных функций f_n на E со значениями в F сходится к некоторой непрерывной функции f на E в каждой точке некоторого плотного в E подмножества E_0, то функции f_n сходятся к f во всех точках E и сходимость эта равномерна на каждом компакте из E.*

В самом деле, множество $\mathcal{F}$ функций f_n и f равностепенно непрерывно на E. Поэтому для обоснования утверждения достаточно применить теорему 45.

Заметим, что для того чтобы применить теорему 45 для доказательства этого следствия, нам пришлось рассмотреть *множество функций f_n и f*. Предположим, однако, что нам известно лишь, что для каждого x из плотного множества E_0 функции $f_n(x)$ сходятся к некоторому пределу $f(x)$. Согласно теореме 44, функция f непрерывна на E_0, но, вообще говоря, не может быть продолжена до непрерывной функции на E. Поэтому заключение следствия не имеет места, и мы не можем утверждать, что $f_n(x)$ *сходятся к пределу в каждой точке x из E*. Имеются, впрочем, два случая, когда такое заключение справедливо. Прежде всего это будет при $E_0 = E$, так как тогда, как мы это только что видели, f непрерывна на всем E_0 и применимо следствие 1. Далее, это верно, если F секвенциально полно, или, более общо, если для любого $x \in E$ множество $\mathscr{F}(x)=\{f_n(x);\ n\in\mathbb{N}\}$ содержится в секвенциально полной части F. В самом деле, для m и n, стремящихся к бесконечности, и конечного множества $A_0\subset E_0$ расстояние $\delta_{\mathfrak{f},A_0}(f_m, f_n)$ стремится к 0, а следовательно, в силу тождественности равномерных структур, индуцированных на $\mathscr{F}$ множествами F^E и F^{E_0}, стремится к 0 величина $\delta_{\mathfrak{f},A}(f_m, f_n)$ для каждой конечной части A множества E. Следовательно, для каждого $x\in E$ функции $f_n(x)$ образуют последовательность Коши, которая, согласно нашему предположению, сходится, и ее предел непрерывен на E, что позволяет применить следствие 1. Отсюда вытекает

Следствие 2. *Если функции f_n равностепенно непрерывны и просто сходятся к f на E, то функция f непрерывна, а сходимость равномерна на каждом компакте из E.*

Следствие 3. *Если равностепенно непрерывная последовательность отображений f_n топологического пространства E в полуметрическое пространство F сходится в каждой точке некоторого подмножества E_0, плотного в E, и если в каждой точке x из E множество $\mathscr{F}(x)=\{f_n(x);\ n\in\mathbb{N}\}$ содержится в некоторой секвенциально полной части F, то последовательность f_n сходится в каждой точке E и ее предел непрерывен на E, а сходимость равномерна на каждом компакте из E.*

Топологические дополнения. Теоремы Бэра и Банаха—Штейнгауза

В гл. IV были приведены теоремы Бэра и Банаха — Штейнгауза. Установим здесь некоторые дополнения к этим теоремам.

Пространством Бэра (или *бэровским пространством*) называется такое топологическое пространство E, в котором любое пересечение счетного множества плотных открытых множеств плотно. Если перейти к дополнениям, то это будет означать, что любое объединение счетного множества замкнутых множеств, не содержащих внутренних точек, является множеством без внутренних точек. Из леммы к теореме 65 гл. IV следует, что любое полное метрическое пространство является пространством Бэра. Следует заметить, что здесь смешивается чисто топологическое свойство быть пространством Бэра со свойством, относящимся к метрической структуре. Вернее будет сказать: если топологическое пространство E таково, что его топология может быть определена метрикой, в которой оно полно, то это пространство является пространством Бэра. Например, если E — полное полуметрическое пространство со счетным множеством полурасстояний, то оно бэровское. Действительно, согласно теореме 40, его структура равномерно эквивалентна некоторой метрической структуре, относительно которой это пространство полно, поскольку последовательности Коши, определяемые равномерной структурой, у них одни и те же. Каждое банахово пространство является пространством Бэра. Пространства $(F^E)_c$, где F — полное полуметрическое пространство со счетным множеством полурасстояний и E — объединение счетного множества компактов; пространства $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, где F — полное полунормированное пространство со счетным множеством полунорм; пространства $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$ и $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ при тех же условиях — все являются бэровскими. Можно также доказать, но мы этим пользоваться не будем, что каждое локально компактное пространство есть пространство Бэра. Напротив, поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел в топологии, индуцированной из $\mathbb{R}$, не является бэровским, поскольку оно представляет собой объединение счетного множества замкнутых множеств без внутренних точек, каждое из которых состоит из одной точки. Неполное векторное нормированное пространство, вообще говоря, не является бэровским. [Рассмотрим, например, пространство $E = C[0, 1]$, снабженное нормой, индуцированной из $\mathscr{L}^1([0, 1], dx)$[1]). Это пространство неполно, поскольку оно плотно в $\mathscr{L}^1$. Докажем, что оно не является пространством Бэра. Обозначим через B единичный шар относительно обычной нормы пространства $C[0, 1]$ ($\|f\| = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$). Пусть $\bar{B}$ — его замыкание в $\mathscr{L}^1$. Поскольку из любой сходящейся в $\mathscr{L}^1$ последовательности можно извлечь dx-почти всюду сходящуюся подпоследовательность (теореме 38 гл. IV), то множество $\bar{B}$ все состоит из функций, dx-почти всюду, а значит, в силу непрерывности и всюду, ограниченных по модулю числом 1. Это значит, что $\bar{B} = B$, т. е. что шар B замкнут в E. Однако B не имеет внутренней части. В самом деле, если бы B содержало некоторый шар (по норме $\mathscr{L}^1$) с центром $g \in C[0, 1]$ радиуса R, то из неравенства $\int\limits_0^1 |f - g| \, dx \leqslant R$ следовало бы неравенство $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| \leqslant 1$, что невозможно. Точно так же при любом целом n множество nB замкнуто в E и не имеет внутренних точек. Однако из того, что множество B является единичным шаром в $C[0, 1]$ в обычной норме, следует, что объединение всех nB совпадает со всем пространством $C[0, 1]$, а значит, E не является пространством Бэра (в норме $\mathscr{L}^1$).]

---

[1]) Пространство $\mathscr{L}^1$ лишь полунормировано и не отделимо. Однако его полунорма индуцирует на C норму, поскольку непрерывная функция, dx-почти всюду равная нулю, равна нулю всюду.

Пусть E — бэровское пространство. Часть $A \subset E$ называется *тощей*, если она содержится в объединении счетного множества замкнутых подмножеств без внутренних точек. Объединение счетного множества тощих частей является тощим множеством. Тот факт, что пространство бэровское, означает, что каждая тощая его часть не имеет внутренних точек. Напротив, в небэровском пространстве тощая часть может быть всем пространством, и это понятие интереса не представляет. Говорят, что некоторое свойство P точек из E выполняется B-почти всюду (B — от Baire (Бэр)), если множество тех точек E, в которых оно не выполняется, тощее. Тощие множества относятся к категории «пренебрежимых» множеств аналогично множествам нулевой меры относительно некоторой неотрицательной меры. Однако это свойство чисто топологическое, не связанное с теорией меры. (Впрочем, чаще всего E будет не локально компактным банаховым пространством, которое вообще не может нести меры Радона.) Между понятиями «B-почти всюду» и «μ-почти всюду» (для некоторой меры μ) непосредственной связи нет. Рассмотрим, например, вещественную ось $\mathbb{R}$. Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — счетное множество, плотное в $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{O}_{n,\varepsilon}$ открытый интервал с центром a_n длины $\varepsilon/2^n$ и через $\mathcal{O}_\varepsilon$ объединение по $n = 0, 1, 2, \ldots$ интервалов $\mathcal{O}_{n,\varepsilon}$ при заданном ε. Тогда $\mathcal{O}_\varepsilon$ будет открытым плотным множеством с мерой $\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon/2^n = 2\varepsilon$ ($\leqslant$, а не $=$ потому, что интервалы $\mathcal{O}_{n,\varepsilon}$ могут пересекаться). Пересечение A множеств $\mathcal{O}_\varepsilon$ $\left(\text{можно взять } \varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ является пересечением счетного множества плотных открытых множеств, а значит, его дополнение является тощим множеством. Тем не менее A имеет нулевую dx-меру. Таким образом, точки множества A расположены «почти всюду» в смысле Бэра, а точки его дополнения — «почти всюду» в смысле меры dx. Или еще: A является множеством «B-почти всех» точек, но имеет нулевую dx-меру; его дополнение $\complement A$ есть множество «dx-почти всех» точек, но тощее. Объединение счетного множества тощих частей является тощим, равно как объединение счетного множества множеств нулевой dx-меры имеет нулевую dx-меру, но объединение тощего множества $\complement A$ и множества A нулевой dx-меры может совпадать со всей прямой $\mathbb{R}$. Никогда не следует смешивать эти понятия! Впрочем, можно доказать, что всякое множество «B-почти всех» точек на $\mathbb{R}$, заведомо не являющееся счетным, имеет в точности мощность континуума.

Теорема 46 (Банаха — Штейнгауза). *Пусть $\vec{E}$ и $\vec{F}$ — векторные топологические пространства, причем $\vec{E}$ — бэровское,* *а $\vec{F}$ — секвенциально полное. Пусть u_n — последовательность линейных непрерывных отображений $\vec{E}$ в $\vec{F}$, сходящаяся к некоторому пределу при n, стремящемся к бесконечности, в каждой точке подпространства $\vec{E}_0$, плотного в $\vec{E}$. Тогда:*

1) или последовательность u_n расходится B-почти всюду на $\vec{E}$ и даже B-почти всюду неограничена,

2) или она всюду сходится на $\vec{E}$, ее предел и есть непрерывное линейное отображение, функции u_n равностепенно непрерывны, а сходимость равномерна на каждом компакте из $\vec{E}$ [1]).

Доказательство. Для простоты будем считать пространство $\vec{F}$ полунормированным с полунормами q_j, $j \in J$. Пусть $A_{j,k}$ при $k \in \mathbb{N}$ — подмножество в $\vec{E}$, определенное соотношением $A_{j,k} = \{\vec{x} \in \vec{E};\ \forall n,\ q_j(u_n(x)) \leqslant k\}$. Поскольку функции u_n непрерывны, множество $A_{j,k}$ замкнуто. Значит, если в некоторой точке $\vec{x}$ образы $u_n(\vec{x})$ имеют предел, то они ограничены, и, следовательно, для каждого j точка $\vec{x}$ лежит в объединении $A_j = \bigcup\limits_k A_{j,k}$. Следовательно, если *хотя бы для одного* j все множества $A_{j,k}$ имеют пустую внутреннюю часть, то множество A_j тощее и реализуется возможность 1): для $\vec{x} \notin A_j$, т. е. для B-почти каждого $\vec{x}$, последовательность $u_n(\vec{x})$ не сходится и даже не ограничена. В противном случае это означало бы, что *для каждого* j найдется такое k, что множество $A_{j,k}$ имеет непустую внутреннюю часть. Однако если множество $A_{j,k}$ является окрестностью точки $\vec{a}$, то множество $(A_{j,k} - \vec{a})$ [2]) будет окрестностью точки $\vec{0}$. Но множество $A_{j,k} - \vec{a}$ содержится в множестве $A_{j,2k}$ поскольку для каждого $n \in \mathbb{N}$ и каждого вектора $\vec{x} \in (A_{j,k} - \vec{a})$ выполняются неравенства $q_j(u_n(\vec{x} + \vec{a})) \leqslant k$, $q_j(u_n(\vec{a})) \leqslant k$, а значит, $q_j(u_n(\vec{x})) \leqslant 2k$. Следовательно, множество $A_{j,2k}$ также является окрестностью точки $\vec{0}$. Для любого $j \in J$ и любого $\varepsilon > 0$ можно найти такую окрестность $\frac{\varepsilon}{2k} A_{j,2k}$ точки $\vec{0}$ в $\vec{E}$, что для каждого вектора $\vec{x}$ из $\frac{\varepsilon}{2k} A_{j,2k}$ и каждого n выполняется неравенство $q_j(u_n(\vec{x})) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, функции u_n равностепенно непрерывны в на-

[1]) Обобщение теоремы 65 гл. IV; доказательство, впрочем, то же.

[2]) $(A_{j,k} - \vec{a}) = \{\vec{x} - \vec{a};\ \vec{x} \in A_{j,k}\}$.

чале, а значит, в силу линейности всюду. Из следствия 3 теоремы 45 вытекают теперь все заключения случая 2) (поскольку пространство $\vec{F}$ секвенциально полно, линейность предела u очевидна). Теорема доказана.

Мы видим, что теорема Банаха — Штейнгауза получается сопоставлением теорем Бэра и Асколи.

Приведем некоторые приложения полученных результатов к теории мер и распределений [1]).

Рассмотрим приложения, в которых реализуется возможность 1) теоремы 46. Пусть задана последовательность линейных непрерывных форм $u_{n,a}$ на $C[0, 1]$:

$$u_{n,a}(\varphi)=\frac{\varphi(a+1/n)-\varphi(a)}{1/n}, \quad u_{n,a}=n(\delta_{(a+1/n)}-\delta_{(a)}). \qquad \text{(VII, 6; 29)}$$

Формы $u_{n,a}$ сходятся к $\delta'_{(a)}$: $\varphi\to\varphi'(a)$ на плотном подмножестве функций, дифференцируемых в точке a. Однако норма $u_{n,a}$, равная $2n$ (формула (IV, 2; 7)), стремится вместе с n к $+\infty$. Следовательно, множество функций $\varphi\in C[0, 1]$, для которых u_n сходятся, тощее. Другими словами, не только не каждая непрерывная функция дифференцируема в точке a — это мы уже знали, — но и *В-почти все непрерывные функции не дифференцируемы в точке a*. Этот результат дает нашей интуиции достаточное моральное право считать, что, *вообще говоря*, непрерывная функция не дифференцируема. Пусть теперь R_1 — плотная счетная часть отрезка $[0, 1]$. Множество функций, дифференцируемых в точке $a\in R_1$, тощее. Объединение таких множеств снова тощее. Поэтому B-почти каждая непрерывная функция не дифференцируема в каждой точке R_1. (На самом деле имеет место даже большее: для B-почти всех функций $\varphi\in C[0, 1]$ последовательность $u_{n,a}(\varphi)$ не ограничена ни в одной точке a из R_1.) Напротив, по-видимому, неверно и, во всяком случае, не очевидно, что B-почти каждая непрерывная функция нигде не дифференцируема.

Отметим, однако, другое. При доказательстве теоремы 46 *линейность функций u_n и сходимость их на плотном множестве E_0 не фигурировали в первой возможности: даже без этих предположений, если хотя бы для одного j все множества $A_{j,k}$ не имеют внутренних точек, то множество точек сходимости функций u_n всегда тощее. Это как раз будет иметь место, если в каждой точке x некоторого множества E_1, плотного в $\vec{E}$, функции $u_n(\vec{x})$ неограничены и если пространство $\vec{F}$ нормиро-*

[1]) Приложения, касающиеся распределений (обобщенных функций) при переводе опущены (см. примечание на стр. 434). — *Прим. ред.*

вано. В этом случае имеется только одна норма q_j; мы будем обозначать ее через $\| \ \|$ и соответственно будем вместо $A_{j,k}$ и A_j писать просто A_k и A. Для каждого $\vec{x}$ из E_1 функции $u_n(\vec{x})$ неограничены, а значит, $\vec{x} \notin A$. Следовательно, множество A не содержит ни одной точки из E_1 и, значит, не имеет внутренней части. Но тогда не имеет внутренней части ни одно из множеств A_k и, значит, множество A тощее: последовательность функций u_n расходится и даже неограничена в B-почти каждой точке $\vec{E}$.

Пусть R_1 — счетное плотное подмножество отрезка $[0, 1]$. Пусть φ — такая функция, для которой в каждой точке $a \in R_1$ последовательность $u_{n,a}(\varphi)$ неограничена. Мы уже видели (теорема 46, возможность 1), что такие функции φ исчерпывают «B-почти все» пространство $C[0, 1]$. Зафиксировав функцию φ, образуем последовательность функций

$$\varphi_n(x) = \frac{\varphi(x + 1/n) - \varphi(x)}{1/n}.$$

Это последовательность непрерывных (не линейных!) функций на бэровском пространстве $[0, 1]$, не ограниченная ни в одной точке счетного плотного множества R_1. Снова реализуется возможность 1) теоремы 46, и мы получаем, что эта последовательность неограничена в B-почти каждой точке x отрезка $[0, 1]$. В частности, функция φ B-почти всюду не дифференцируема. Таким образом, *B-почти все непрерывные функции B-почти всюду не дифференцируемы*. На языке кванторов: «($\exists L$, тощее в $C[0, 1]$) ($\forall \varphi \notin L$) ($\exists M$, тощее в $[0, 1]$) ($\forall x \notin M$): (φ не дифференцируема в x)». Здесь M зависит от φ; пространство $C[0, 1]$ можно заменить на $(\mathbb{C}^{\mathbb{R}})_c$.

Укажем другое применение теоремы 46. В теории тригонометрических рядов доказывается, что если f — непрерывная периодическая функция с периодом T, то ее ряд Фурье не обязательно сходится. С помощью той же цепочки рассуждений, использующих последовательно теорему 46 для бэровского пространства функций, непрерывных на окружности Γ, и для бэровского пространства Γ, можно показать, что для B-почти всех непрерывных периодических функций ряд Фурье B-почти всюду расходится (см. «Дополнение о ряде и интеграле Фурье»). Имеется множество других аналогичных приложений теоремы 46. Вот теорема, которую читатель может рассматривать как упражнение:

Пусть E — пространство Бэра и u_n — последовательность непрерывных отображений E в метрическое пространство F, *просто сходящаяся к некоторому пределу u. Тогда множество точек разрыва функции u тощее.*

Пусть, например, φ — вещественная дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$. Тогда последовательность функций $\varphi_n(x) = \frac{\varphi(x+1/n)-\varphi(x)}{1/n}$ просто сходится на $\mathbb{R}$ к φ'. Следовательно, *производная φ' непрерывна в B-почти всех точках $\mathbb{R}$.* Так что производная функция имеет «очень мало» точек разрыва!

Теорема 47 (третья теорема Асколи). *Пусть E — некоторое топологическое пространство, F — полуметрическое пространство, $\mathcal{F}$ — множество непрерывных отображений E в F. Для того чтобы $\mathcal{F}$ было относительно компактным*[1] *в пространстве $(F^E)_c$ (непрерывных отображений E в F, снабженном топологией компактной сходимости), достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *множество $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно;*

2) *для каждого $x \in E$ множество $\mathcal{F}(x) = \{f(x); f \in \mathcal{F}\}$ относительно компактно в F.*

Если E локально компактно, то эти условия также и необходимы.

Доказательство. 1°) Докажем достаточность условий 1) и 2). Предположим, что эти условия выполнены. Существует весьма общее и очень короткое доказательство достаточности, но, к сожалению, использующее теорему Тихонова, которой нет в нашем распоряжении. Согласно теореме Тихонова (конечное или бесконечное), произведение компактов является компактом. Ее доказательство опирается на понятие ультрафильтра и теорему Цорна. Для каждого $x \in E$ замыкание $\overline{\mathcal{F}(x)}$ множества $\mathcal{F}(x)$ в F по предположению компактно. Поэтому в силу теоремы Тихонова произведение $\prod_{x \in E} \overline{\mathcal{F}(x)}$ компактно. Это означает, что множество функций $f \in F^E$, таких, что $f(x)$ при любом $x \in E$ лежит в $\overline{\mathcal{F}(x)}$, компактно в F^E. Следовательно, наше множество $\mathcal{F}$, содержащееся в компакте, относительно компактно в F^E (без каких-либо предположений о равностепенной непрерывности), а его замыкание $\overline{\mathcal{F}}$ в F^E компактно. Однако множество $\overline{\mathcal{F}}$ равностепенно непрерывно (первая теорема

[1] Напомним (определение из общей топологии), что часть A топологического пространства X называется относительно компактной в X, если ее замыкание $\overline{A}$ в X компактно. Это равносильно тому, что A содержится в некоторой компактной части B пространства X, поскольку в этом случае множество $\overline{A}$ замкнуто в компакте B, а значит, компактно.

Асколи). Поэтому на $\overline{\mathcal{F}}$ топологии F^E и $(F^E)_c$ совпадают; значит, $\overline{\mathcal{F}}$ компактно в пространстве $(F^E)_c$, и, следовательно, множество $\mathcal{F}$ относительно компактно в $(F^E)_c$.

Поскольку мы хотим при доказательстве пользоваться только ранее доказанными теоремами, мы вынуждены дать другое, несколько более сложное доказательство, причем нам придется наложить на E и F дополнительные (но весьма общие) условия. Мы будем предполагать, что структура пространства F определена счетным множеством полурасстояний δ_j, $j=0, 1, 2, \ldots$, и что пространство E сепарабельно, т. е. содержит счетное плотное множество $E_0=\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$.

Даже не прибегая к теореме Тихонова, мы видим, что множество функций F^E, принимающих для каждого $x \in E$ значения в $\overline{\mathcal{F}(x)}$, замкнуто как пересечение замкнутых множеств. Оно содержит $\mathcal{F}$, а значит, и замыкание $\overline{\mathcal{F}}$ множества $\mathcal{F}$ в F^E. Следовательно, множество $\overline{\mathcal{F}}(x)=\{f(x);\ f \in \overline{\mathcal{F}}\}$ содержится в $\overline{\mathcal{F}(x)}$, а потому также относительно компактно в F. С другой стороны, множество $\overline{\mathcal{F}}$ равностепенно непрерывно. Следовательно, $\overline{\mathcal{F}}$ обладает теми же свойствами, что и $\mathcal{F}$, и, кроме того, замкнуто в F^E, а тем более в $(F^E)_c$. Мы сейчас докажем, что $\overline{\mathcal{F}}$ компактно в $(F^E)_c$; тем самым $\mathcal{F}$ будет относительно компактным.

Согласно теореме 45, топология, индуцированная на $\overline{\mathcal{F}}$ из $(F^E)_c$, совпадает с топологией, индуцированной из F^{E_0}, т. е. с топологией простой сходимости на множестве E_0, полурасстояния в которой задаются формулами (VII, 6; 25). Можно считать, что множество этих полурасстояний счетно (E_0 счетно, а потому счетным будет и множество его конечных частей). Следовательно, согласно теореме 40, *топология множества* $\overline{\mathcal{F}}$ *метризуема*. Для доказательства компактности $\overline{\mathcal{F}}$ можно теперь применить теорему Больцано — Вейерштрасса. Мы сейчас покажем, что из любой последовательности $f_0, f_1, f_2, \ldots$ в $\overline{\mathcal{F}}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Множество $\overline{\mathcal{F}(a_0)}$ компактно в метризуемом пространстве F. Следовательно, из последовательности f_n можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в точке a_0. Обозначим ее через S_0: $f_{(0,0)}, f_{(0,1)}, \ldots, f_{(0,n)}, \ldots$. Здесь $(0, n)$ означает некоторое целое число $\geqslant 0$, причем $(0, n) > (0, n-1)$. Множество $\overline{\mathcal{F}(a_1)}$ также компактно в метризуемом пространстве F. Следовательно, из построенной подпоследовательности можно извлечь новую подпоследовательность, сходящуюся в некоторой точке a_1, а значит, одновременно в точках a_0 и a_1. Обозначим эту последовательность через S_1: $f_{(1,0)}, f_{(1,1)}, \ldots, f_{(1,n)}, \ldots$. (Здесь снова

$(1, n)$ — целое число $\geqslant 0$ и $(1, n) > (1, n-1)$, а поскольку S_1 является подпоследовательностью S_0, то для любого n найдется такое $n' \geqslant n$, что $(0, n') = (1, n) \geqslant (0, n)$.) Это рассуждение можно продолжать далее шаг за шагом. Через S_m будем обозначать последовательность $f_{(m, 0)}, f_{(m, 1)}, \ldots, f_{(m, n)}, \ldots$, где (m, n) — целое число $> (m, n-1)$; S_m является подпоследовательностью последовательности S_{m-1}, т. е. для каждого n можно найти такое $n' \geqslant n$, что $(m-1, n') = (m, n) \geqslant (m-1, n)$. Последовательность S_m сходится в каждой из точек $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Эти последовательности, если угодно, можно расположить друг под другом:

$$
\begin{array}{l}
f_{(0, 0)}, \; f_{(0, 1)}, \; f_{(0, 2)}, \; \ldots, \; f_{(0, n)}, \; \ldots, \\
f_{(1, 0)}, \; f_{(1, 1)}, \; f_{(1, 2)}, \; \ldots, \; f_{(1, n)}, \; \ldots, \\
\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\
f_{(m, 0)}, \; f_{(m, 1)}, \; f_{(m, 2)}, \; \ldots, \; f_{(m, n)}, \; \ldots, \\
\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot
\end{array}
$$

Рассмотрим теперь диагональную последовательность S: $f_{(0, 0)}, f_{(1, 1)}, \ldots, f_{(n, n)}, \ldots$. Каждая из написанных выше последовательностей является подпоследовательностью предыдущей. Поэтому при заданном m для любого $n \geqslant m$ можно найти такое число $n' \geqslant n$, что $(m, n') = (n, n) \geqslant (m, n)$ и, кроме того, $(n, n) > (n, n-1) \geqslant (n-1, n-1)$, т. е. *начиная с $n \geqslant m$ функции $f_{(n, n)}$ образуют некоторую подпоследовательность последовательности S_m*, так что диагональная последовательность S сходится в точке a_m. Следовательно, последовательность S сходится в каждой точке множества E_0.

Пусть f_0 — ее предел, отображение E_0 в F. Тогда отображение f_0 продолжимо до непрерывного отображения f пространства E в F, а последовательность S сходится к f в каждой точке E и притом равномерно на каждом компакте из E. Это вытекает из следствия 3 теоремы 45. Оно применимо, поскольку каждая часть $\overline{\mathscr{F}}(x)$ содержится в компактном, а следовательно, секвенциально полном множестве $\overline{\mathscr{F}(x)}$. В теореме 41 гл. II мы доказали, что каждый метрический компакт секвенциально полон. С помощью такого же рассуждения можно установить тот же результат для любого компактного полуметрического пространства со счетным множеством полурасстояний. В самом деле, это пространство метризуемо (теорема 40), и если x_n — последовательность Коши, то, согласно теореме Больцано—Вейерштрасса, из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, а значит, по теореме 40 гл. II и сама последовательность сходится. Поскольку $\overline{\overline{\mathscr{F}}}$ замкнуто в F^E, предел f последовательности S из $\overline{\mathscr{F}}$ необходимо лежит в $\overline{\mathscr{F}}$. Из заданной последовательности f_n в $\overline{\mathscr{F}}$ мы извлекли подпоследовательность S, сходящуюся в $(F^E)_c$ к элементу f из $\overline{\mathscr{F}}$. Следовательно, $\overline{\mathscr{F}}$ компактно в топологии, индуцированной пространством $(F^E)_c$, а $\mathscr{F}$ относительно компактно в $(F^E)_c$.

2°) Обратно, предположим, что множество $\mathscr{F}$ относительно компактно в $(F^E)_c$, а следовательно, его замыкание $\overline{\mathscr{F}}_c$[1]) компактно. Его образ $\overline{\mathscr{F}}_c(x)$ при непрерывном отображении $\delta_{(x)}$: $f \to f(x)$ пространства $(F^E)_c$ (или F^E) в F будет также компактным, а следовательно, $\mathscr{F}(x)$ $(\subset \overline{\mathscr{F}}_c(x))$ относительно компактно в F. Для этого не нужны никакие специальные условия на E или F. Пусть теперь K — некоторый компакт из E. Обозначим через f_K сужение функции f на компакт K. Отображение $f \to f_K$ множества $(F^E)_c$ в $(F^K)_c$, очевидно, непрерывно (и даже липшицево). [Полурасстояния в $(F^K)_c$ обозначим через $\delta_{j,K}$, $j \in J$.] Образ $\overline{\mathscr{F}}_{c,K}$ множества $\overline{\mathscr{F}}_c$ при этом отображении является компактной частью $(F^K)_c$. Зададим теперь $j \in J$ и $\varepsilon > 0$. Имеется конечное множество таких элементов $f_{\nu,K}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, из $\overline{\mathscr{F}}_{c,K}$, что шары $B_{j,K}\left(f_{\nu,K}; \frac{\varepsilon}{3}\right)$ покрывают $\overline{\mathscr{F}}_{c,K}$. Другими словами, для каждой функции $f_K \in \overline{\mathscr{F}}_{c,K}$ найдется такое ν, что $\delta_{j,K}(f_{\nu,K}; f_K) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Однако конечное множество непрерывных функций $f_{\nu,K}$ всегда равностепенно непрерывно. Следовательно, для каждой точки $a \in E$ найдется такая ее окрестность $\mathscr{U}$ в K, что для любой точки $x \in \mathscr{U}$ и любого ν будет выполняться неравенство $\delta_j(f_{\nu,K}(a), f_{\nu,K}(x)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Следовательно, для каждой точки $x \in \mathscr{U}$ и каждой функции $f \in \overline{\mathscr{F}}_c$ имеем

$$\delta_j(f(a), f(x)) \leqslant$$
$$\leqslant \delta_j(f(a), f_\nu(a)) + \delta_j(f_\nu(a), f_\nu(x)) + \delta_j(f_\nu(x), f(x)) \leqslant \varepsilon. \quad \text{(VII, 6; 30)}$$

---

[1]) Мы пишем $\overline{\mathscr{F}}_c$, а не $\overline{\mathscr{F}}$, как выше; $\overline{\mathscr{F}}$ — это замыкание множества $\mathscr{F}$ в F^E, а $\overline{\mathscr{F}}_c$ — его замыкание в $(F^E)_c$. A priori они различны. Однако, с одной стороны, очевидно, $\overline{\mathscr{F}} \supset \overline{\mathscr{F}}_c$; с другой стороны, инъекция $(F^E)_c$ в F^E непрерывна, так что множество $\overline{\mathscr{F}}_c$, компактное в $(F^E)_c$, является также компактным в топологии F^E (теорема 28 гл. II) и, следовательно, замкнуто в F^E, а значит, $\overline{\mathscr{F}}_c \supset \overline{\mathscr{F}}$. Мы получили, что $\overline{\mathscr{F}}_c = \overline{\mathscr{F}}$, так что новое обозначение можно было и не вводить.

Мы видим, кроме того, что множества $\overline{\mathscr{F}}(x)$ и $\overline{\mathscr{F}(x)}$, которые мы ранее различали, совпадают. Действительно, $\overline{\mathscr{F}}(x) \subset \overline{\mathscr{F}(x)}$. Однако множество $\overline{\mathscr{F}}(x)$ должно быть компактным, а следовательно, замкнутым в F и содержать $\mathscr{F}(x)$, а значит, и $\overline{\mathscr{F}(x)}$. Отсюда и следует высказанное утверждение.

Этим доказано, что множество $\overline{\mathscr{F}}_{K,c}$ непрерывных функций на K равностепенно непрерывно. Однако это вовсе не означает, что множество $\overline{\mathscr{F}}_c$ равностепенно непрерывно на E. Если же мы предположим, что пространство E локально компактно, то для любой точки $a \in E$ найдется компактная ее окрестность K в E. Поэтому найденная выше окрестность $\mathscr{U}$ точки a в K является окрестностью этой точки и в E (теорема 6 гл. II), и из неравенства (VII, 6; 30) вытекает, что $\overline{\mathscr{F}}_c$, а следовательно, и $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывны в точке a. Следовательно, условия 1) и 2) действительно необходимы в случае, когда пространство E локально компактно.

Следствие 1. *Пусть E — локально компактное пространство (например, конечномерное топологическое векторное пространство), и пусть $\vec{F}$ — конечномерное топологическое векторное пространство (например, $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$). Для того чтобы часть $\mathscr{F}$ пространства $(\vec{F}^E)_c$ была относительно компактной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *подмножество $\mathscr{F}$ равностепенно непрерывно;*

2) *для каждого $x \in E$ множество $\mathscr{F}(x) = \{f(x);\ f \in \mathscr{F}\}$ ограничено в $\vec{F}$.*

В самом деле, относительно компактные части пространства $\vec{F}$ — это его ограниченные части. Это условие уже не выполняется, если $\vec{F}$ бесконечномерно.

Следствие 2. *Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{R}^n$ и $\vec{F}$ — конечномерное банахово пространство. Для того чтобы часть $\mathscr{F}$ множества $\mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F})$ была относительно компактной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:*

1) *для каждого индекса дифференцирования p порядка $|p| \leqslant m$ множество $\mathscr{F}_p$ производных $D^p\vec{f}$, где $\vec{f} \in \mathscr{F}$ — множество функций на Ω со значениями в $\vec{F}$, — равностепенно непрерывно;*

2) *для каждого индекса p порядка $|p| \leqslant m$ и любой точки $x \in \Omega$ множество $\mathscr{F}_p(x) = \{D^p\vec{f}(x);\ \vec{f} \in \mathscr{F}\}$ ограничено в $\vec{F}$.*

Доказательство. При $m = 0$ это частный случай предыдущего следствия. Пусть m произвольно. Предположим сначала, что множество $\mathscr{F}$ относительно компактно в $\mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F})$. Линейное отображение D^p: $\vec{f} \to D^p\vec{f}$ из $\mathscr{E}^m(\Omega;\ \vec{F})$ в $\mathscr{E}^0(\Omega;\ \vec{F})$ непрерывно. В самом деле, если рассмотреть полунорму $\|\|\ \|\|_{0,K}$

в $\mathscr{E}^0(\Omega; \vec{F})$ и ввести полунорму $|||\ |||_{m,K}$ в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, то будет справедливым неравенство

$$|||D^p\vec{f}|||_{0,K} \leqslant |||\vec{f}|||_{m,K}.$$

Образ $D^p\overline{\mathscr{F}}$ компакта $\overline{\mathscr{F}}$ в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ является поэтому компактом $\mathscr{E}^0(\Omega; \vec{F})$. Этот образ содержит множество $D^p\mathscr{F} = \mathscr{F}_p$, которое тем самым оказывается относительно компактным. Следовательно, оно должно удовлетворять условиям следствия 1, чем доказаны утверждения 1) и 2) относительно p. Таким образом, эти условия необходимы.

Обратно, предположим, что условия 1) и 2) выполнены. Пусть $\overline{\mathscr{F}}$ — замыкание $\mathscr{F}$ в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$. Множество $\overline{\mathscr{F}}$ удовлетворяет условиям 1) и 2). В самом деле, множество функций $\vec{f}$, для которых $D^p\vec{f} \in \vec{\overline{\mathscr{F}}}_p$ при всех p порядка $|p| \leqslant m$, замкнуто и содержит $\mathscr{F}$. Тем самым оно содержит $\overline{\mathscr{F}}$, и, следовательно, $D^p\overline{\mathscr{F}} \subset \overline{\mathscr{F}}_p$, или $(\overline{\mathscr{F}})_p \subset \overline{\mathscr{F}}_p$. Если множество $\mathscr{F}_p$ равностепенно непрерывно, то таким же будет по теореме 44 множество $\overline{\mathscr{F}}_p$ и тем более $(\overline{\mathscr{F}})_p$. С другой стороны, если множество $\mathscr{F}_p(x)$ ограничено, то ограничено и его замыкание $\overline{\mathscr{F}_p(x)}$; тем более ограничено множество $\overline{\mathscr{F}}_p(x)$, а следовательно, и $(\overline{\mathscr{F}})_p(x)$.

Докажем теперь, что множество $\overline{\mathscr{F}}$ является компактом в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$. Поскольку это множество метризуемо, достаточно проверить выполнение условий Больцано—Вейерштрасса. Пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n, \ldots$ — последовательность в $\overline{\mathscr{F}}$. Для каждого индекса p порядка $|p| \leqslant m$ множество $\overline{\mathscr{F}}_p$ удовлетворяет условиям следствия 1, а потому относительно компактно в $\mathscr{E}^0(\Omega; \vec{F})$. Значит, из этой последовательности можно извлечь такую подпоследовательность S_p, что соответствующие функции $D^p\vec{f}_n$ сходятся равномерно на каждом компакте, т. е. локально равномерно, к некоторому непрерывному пределу $\vec{g}_p$. Пусть $\vec{g}$ соответствует $p = 0$. С помощью того же способа, который был применен при доказательстве теоремы, можно при произвольном фиксированном упорядочении индексов p, $|p| \leqslant m$, выбрать последовательности S_p так, чтобы каждая из них была подпоследовательностью предыдущей. Тогда последняя из этих подпоследовательностей (их имеется лишь конечное число) является подпоследовательностью S, для которой при всех p порядка $|p| \leqslant m$ соответствующие функции $D^p\vec{f}_n$ имеют локально равномерный предел $\vec{g}_p$. Согласно следствию 1 теоремы 111 гл. IV, функция $\vec{g}$ принадлежит классу C^m и $\vec{g}_p = D^p\vec{g}$. Поэтому последовательность S сходится к $\vec{g}$ в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$. Поскольку множество $\overline{\mathscr{F}}$ замкнуто в $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$, функция $\vec{g}$ лежит в $\overline{\mathscr{F}}$. Таким образом, множество $\overline{\mathscr{F}}$ компактно, а следовательно, множество $\mathscr{F}$ относительно компактно.

Следствие 3. *Если пространство $\vec{F}$ конечномерно, то каждая ограниченная часть из $\mathscr{E}^m(\Omega; \vec{F})$ относительно компактна в $\mathscr{E}^{m-1}(\Omega; \vec{F})$.*

В самом деле, эта часть ограничена в $\mathscr{E}^{m-1}(\Omega; \vec{F})$, а следовательно, условие 2) выполнено. В силу свойств ограниченных частей (VII, 6; 19), $\mathscr{F}_p$ для каждого индекса p порядка $|p| \leqslant m-1$ есть множество функций на Ω со значениями в $\vec{F}$, ограниченное в $\mathscr{E}^1(\Omega; \vec{F})$, а следовательно, равностепенно непрерывное (см. стр. 479); тем самым условие 1) также выполнено.

Свойство Монтеля

В конечномерном топологическом векторном пространстве понятия компактной части и замкнутой ограниченной части или (поскольку замыкание ограниченной части ограничено) понятия относительно компактной части и ограниченной части (теорема 23, гл. II) совпадают. В произвольном топологическом векторном пространстве компактные части всегда замкнуты и ограничены. [Замкнутость здесь обуславливается теоремой 23 гл. II. Ограниченность очевидна в случае полунормированных пространств, так как каждая полунорма, определяющая структуру, непрерывна, а значит, и ограничена на компакте. Это же справедливо и для не полунормированных топологических векторных пространств.] Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Мы уже видели, что оно неверно в бесконечномерном нормированном векторном пространстве, единичный шар которого не компактен (теорема 45_2 гл. II). Тем не менее в *не нормированном* топологическом векторном пространстве может случиться, что обратное утверждение окажется и справедливым, поскольку это не противоречит теореме 45_2 гл. II, ибо ни одна из окрестностей 0 не ограничена (см. стр. 477). Говорят, что топологическое векторное пространство обладает *свойством Монтеля*, если в нем понятия компактной части и замкнутой ограниченной части, или, что то же самое, относительно компактной части и ограниченной части совпадают.

Следствие 4. *Если* Ω — *открытое множество из* $\mathbb{R}^n$ *и* $\vec{F}$ — *конечномерное банахово пространство, то пространство* $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F}) = \mathscr{E}^\infty(\Omega; \vec{F})$ *обладает свойством Монтеля.*

Доказательство. Нам надо доказать, что каждая *замкнутая* ограниченная часть $\mathscr{F}$ пространства $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$ компактна. Поскольку это пространство метризуемо, мы можем применить теорему Больцано — Вейерштрасса. Итак, пусть $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ — некоторая последовательность в $\mathscr{F}$. Для каждого индекса p множество $\mathscr{F}_p = D^p\mathscr{F}$ ограничено в $\mathscr{E}^1(\Omega; \vec{F})$. Следовательно, выполняются условия 1) и 2) следствия 1, а значит, согласно следствию 1, это множество относительно компактно в $\mathscr{E}^0(\Omega; \vec{F})$. Из рассматриваемой последовательности можно извлечь подпоследовательность S_p, локально равномерно сходящуюся к некоторой функции $\vec{g}_p$. Обозначим через $\vec{g}$ функцию, соответствующую $p = 0$. Как и в следствии 2, множество индексов p есть $\mathbb{N}^n$ и, значит, счетно. Следовательно, мы можем его вполне упорядочить, поставив в биективное соответствие с $\mathbb{N}$. Далее можно каждую последовательность S_p выбрать как подпоследовательность предыдущей и точно так же, как при доказательстве теоремы, взять диагональную последовательность S. Тогда S будет такой подпоследовательностью исходной последовательности, что соответствующие функции $D^p\vec{f}_n$ локально равномерно сходятся к $\vec{g}_p$. Из теоремы 111 гл. IV следует, что $\vec{g}$ принадлежит классу C^∞ и что $D^p\vec{g} = \vec{g}_p$. Последовательность S сходится поэтому к $\vec{g}$ в $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$, и, поскольку множество $\mathscr{F}$ замкнуто в $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$, $\vec{g}$ лежит в множестве $\mathscr{F}$, которое тем самым оказывается компактным.

Следствие 5. *Пусть выполнены условия следствия 4. Тогда если множество* K *является компактом в* Ω, *то пространство* $\mathscr{D}_K(\Omega; \vec{F})$ *обладает свойством Монтеля.*

В самом деле, множество $\mathscr{D}_K(\Omega; \vec{F})$ является замкнутым подпространством в $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$; следовательно, любая замкнутая ограниченная часть множества $\mathscr{D}_K(\Omega; \vec{F})$ замкнута и ограничена в $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$, а значит, компактна.

Следствие 6 (теорема Монтеля). *Если Ω — открытое множество из $\mathbb{C}^n$ и если $\vec{F}$ — конечномерное комплексное банахово пространство, то пространство $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ голоморфных функций на Ω со значениями в $\vec{F}$, снабженное топологией компактной сходимости (или топологией компактной сходимости для всех производных), обладает свойством Монтеля: понятия компактной части и замкнутой ограниченной части совпадают, или, что то же самое, совпадают понятия относительно компактной части и ограниченной части.*

Доказательство. Согласно теореме Вейерштрасса и следствию 1 теоремы 15, $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ является замкнутым подпространством пространства $\mathscr{E}(\Omega; \vec{F})$, так что это утверждение столь же тривиально, как и следствие 5.

Замечание. Как мы отмечали на стр. 473, из доказанного следует, что пространства $\mathscr{D}_K(\Omega; \vec{F})$ и $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$ ненормируемы, ибо нормируемое пространство обладает свойством Монтеля только тогда, когда оно конечномерно.

Следствие 6 — основное в теории функций комплексных переменных. В предыдущем доказательстве оно получилось как результат целой цепи следствий. Небесполезно убедиться непосредственно, что оно является тривиальным следствием теорем Асколи. Пусть $\mathscr{F}$ — ограниченная часть множества $\mathscr{H}(\Omega; \vec{F})$. Для любого $\vec{x} \in \Omega$ множество $\mathscr{F}(\vec{x})$ ограничено, а следовательно, относительно компактно в конечномерном пространстве $\vec{F}$. С другой стороны, так как множество $\mathscr{F}$ ограничено, то для шара $B(\vec{a}, R)$ с центром $\vec{a}$, содержащегося в замкнутом, а значит, компактном множестве Ω, можно найти такое число $M \geqslant 0$, для которого выполняется неравенство

$$\|\vec{f}(\vec{x})\| \leqslant M \quad \text{для} \quad \vec{x} \in B(\vec{a}, R), \ \vec{f} \in \mathscr{F}. \qquad \text{(VII, 6; 31)}$$

Согласно неравенству Коши,

$$\|\vec{f}'(\vec{x})\| \leqslant \frac{2}{R} nM \quad \text{для} \quad \vec{x} \in B\left(\vec{a}, \frac{R}{2}\right), \ \vec{f} \in \mathscr{F}, \qquad \text{(VII, 6; 32)}$$

откуда по формуле конечных приращений вытекает неравенство

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{a})\| \leqslant nM \quad \text{для} \quad \vec{x} \in B\left(\vec{a}, \frac{R}{2}\right), \ \vec{f} \in \mathscr{F}.$$

Этим доказана равностепенная непрерывность в точке a множества $\mathcal{F}$ функций на Ω. Множество $\mathcal{F}$ удовлетворяет условиям третьей теоремы Асколи 44, а значит, относительно компактно в $(\vec{F}^{\Omega})_c$. Однако поскольку по теореме Вейерштрасса (следствие 1 теоремы 15) множество $\mathcal{H}(\Omega; \vec{F})$ замкнуто в $(\vec{F}^{\Omega})_c$, то (компактное) замыкание $\overline{\mathcal{F}}$ множества $\mathcal{F}$ в $(\vec{F}^{\Omega})_c$ лежит в $\mathcal{H}(\Omega; \vec{F})$ и, следовательно, $\mathcal{F}$ относительно компактно в $\mathcal{H}(\Omega; \vec{F})$.

Последнее следствие можно обобщить:

Следствие 7. *Если V — голоморфное многообразие, а $\vec{F}$ — конечномерное банахово пространство, то пространство $\mathcal{H}(V; \vec{F})$ голоморфных функций на V со значениями в $\vec{F}$, снабженное топологией компактной сходимости (индуцированной из $(\vec{F}^V)_c$), обладает свойством Монтеля.*

Доказательство. Пусть множество $\mathcal{F}$ ограничено в $\mathcal{H}(V; \vec{F})$. Тогда для каждой точки $x \in V$ множество $\mathcal{F}(x)$ ограничено в $\vec{F}$, а следовательно, относительно компактно. Пусть далее $a \in V$ и $\mathcal{V}$ — некоторая окрестность точки a в V, представляющая собой область карты $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n \xrightarrow{\Phi} \mathcal{V} = \Phi(\mathcal{O}) \subset V$. Пусть $\Phi(\alpha) = a$.

Для функции $\vec{f} \in \mathcal{F}$ обозначим через $\vec{f}^*$ ее прообраз $\Phi^*\vec{f} = \vec{f} \circ \Phi$ — голоморфную функцию на $\mathcal{O}$ со значениями в $\vec{F}$, а через $\mathcal{F}^*$ обозначим множество функций f^*, где $f \in \mathcal{F}$.

Проведенные выше рассуждения [неравенства (VII, 6; 31) и (VII, 6; 32)] показывают, что множество $\mathcal{F}^*$ равностепенно непрерывно на $\mathcal{O}$ в точке α. Следовательно, множество $\mathcal{F}$ равностепенно непрерывно на Ω в точке a. Значит, множество $\mathcal{F}$ относительно компактно в $(\vec{F}^V)_c$, а следовательно, в подпространстве $\mathcal{H}(V; \vec{F})$, замкнутом в $(\vec{F}^V)_c$.

Замечание. Во всех предыдущих следствиях предположение конечномерности $\vec{F}$ было, очевидно, существенным. Пусть $\vec{F}$ — бесконечномерное банахово пространство. Мы знаем, что в нем единичный шар некомпактен. Поэтому можно найти последовательность $\vec{f}_0, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots$ векторов единичной нормы, не содержащую никакой сходящейся подпоследовательности. Последовательность голоморфных функций на $\mathbb{C}$: $z \to z\vec{f}_n$ ограничена в $\mathscr{H}(\mathbb{C}; \vec{F})$, но не содержит никакой сходящейся подпоследовательности; $\mathscr{H}(\mathbb{C}; \vec{F})$ свойством Монтеля не обладает.

Приложения теоремы Монтеля. Эта теорема служит для доказательства ограниченности некоторых величин, связанных с функциями комплексных переменных. Приведем один постоянно используемый пример.

Теорема 48. *Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{C}$ и K — некоторый компакт из Ω. Если каждой голоморфный комплексной функции f на Ω поставить в соответствие число $N(f; K) \leqslant +\infty$ ее нулей на компакте K с учетом их кратности, то функция $f \to N(f; K)$ (со значениями в $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup (+\infty)$) будет полунепрерывна сверху на пространстве $\mathscr{H}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть функция $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Если число ее нулей на компакте K бесконечно (в этом случае она тождественно равна нулю на некоторой связной компоненте Ω), то доказывать нечего. Предположим поэтому, что на K она имеет $p < +\infty$ нулей с учетом их кратности. Пусть a_i, $i \in I$, — нули f на K, и пусть Δ_{a_i} — такие открытые круги с центрами a_i, что круги $\overline{\Delta}_{a_i}$ не пересекаются. Их объединение, вообще говоря, компакт K не покрывает. Однако если для каждой точки b из K, не являющейся нулем функции f, мы рассмотрим такой открытый круг Δ_b с центром в точке b, что $\overline{\Delta}_b$ не содержит нулей функции f, то компакт K будет покрыт кругами Δ_{a_i} и Δ_b и можно выбрать конечное число кругов Δ_{a_i} и Δ_{b_j}, $j \in J$ (конечное множество), покрывающих K. Пусть H — объединение кругов $\overline{\Delta}_{a_i}$, $i \in I$, и, $\overline{\Delta}_{b_j}$, $j \in J$. Это компактная окрестность K. По следствию 2 теоремы 25 можно найти такое $\eta > 0$, что при выполнении неравенства $\sup\limits_{z \in H} |g(z) - f(z)| \leqslant \eta$

1) функция g не имеет нулей в кругах $\overline{\Delta}_{b_j}$, $j \in J$;

2) в каждом круге $\overline{\Delta}_{a_i}$, $i \in I$, число нулей функции g равно числу нулей функции f, т. е. кратности p_{a_i} нуля a_i функции f.

Поскольку круги $\overline{\Delta}_{a_i}$ не пересекаются, число нулей функции g на H равно $\sum\limits_i p_{a_i} = p$ и, следовательно, число нулей функции g на $K \subset H$ не больше p. Поскольку множество $\{g; \sup\limits_{z \in H} |g(z) - f(z)| \leqslant \eta\}$ является окрестностью точки f в пространстве $\mathscr{H}(\Omega) \subset (\mathbb{C}^\Omega)_c$, то тем самым доказана полунепрерывность сверху функции $f \to N(f; K)$.

Замечание. Непосредственно видно, что если H — такая произвольная компактная окрестность K, что функция f имеет в H только нули, принадлежащие K, то найдется такое число $\eta > 0$, для которого неравенство $\max_{z \in H} |g(z) - f(z)| \leqslant \eta$ влечет за собой равенство $N(g; H) = N(f; H) = N(f; K)$. Отсюда вытекает, что $N(g; K) \leqslant N(f; K)$. Это означает, что имеет место именно полунепрерывность сверху, а не непрерывность. Предположим, например, что K сводится к единственной точке a и что эта точка a является простым нулем функции f: $N(f; \{a\}) = 1$. Если H — произвольный замкнутый круг с центром в точке a, не содержащий, кроме a, никаких других нулей функции f, то для функции g, достаточно близкой на H к функции f, $N(g; H) = 1$. Однако нуль функции g в круге H вовсе не обязан совпадать с самой точкой a, так что мы имеем лишь $N(f; \{a\}) \leqslant 1$.

Приведем другой, быть может, более показательный пример. Пусть K — круг. Предположим сначала, что все нули функции f в K лежат во внутренней части $\mathring{K}$ круга K. Тогда найдется строго меньший круг K', такой, что $N(f; K') = N(f; K)$. Далее рассуждения можно вести на круге K' и для него положить $H' = K$. Для функции g, достаточно близкой к функции f на K, будут справедливы равенства $N(g; K) = N(f; K') = N(f; K)$, а следовательно, будет иметь место непрерывность рассматриваемого отображения в точке f пространства $\mathscr{H}(\Omega)$. Однако если некоторые из нулей функции f на K лежат на границе $\dot{K}$ круга K, то положение изменится. В этом случае приходится вернуться к общим рассуждениям, с помощью которых можно получить соотношения $N(g; K) \leqslant N(g; H) = N(f; K)$. И действительно, функции, близкие к f, могут иметь некоторые из своих нулей в H возле границы $\dot{K}$ круга K, но вне этого круга.

Если F является всего лишь замкнутым множеством, то функция $f \to N(f; F)$ никакими свойствами полунепрерывности уже не обладает.

Пусть теперь $\mathcal{O}$ — открытое множество $\subset \Omega$. Предположим, что функция f имеет в $\mathcal{O}$ только изолированные нули в конечном или бесконечном числе p. Пусть q — произвольное конечное число, если $p = +\infty$, и $q = p$, если p конечно. Пусть a_i, $i \in I$, где I конечно, — нули функции f в $\mathcal{O}$, сумма кратностей которых p_{a_i} не менее q; Δ_{a_i} — такие открытые круги с центрами в точках a_i, что замкнутые круги $\overline{\Delta}_{a_i}$ не пересекаются, и H — компакт $\bigcup_{i \in I} \overline{\Delta}_{a_i}$. Для достаточно малых $\eta > 0$ из $\max_{z \in H} |g(z) - f(z)| \leqslant \eta$ следует, что функция g имеет в точности

p_{a_i} нулей в $\overline{\Delta}_{a_i}$, так что $N(g;\ \mathcal{O}) \geqslant q$. Значит, функция $q \to N(g;\ \mathcal{O})$ полунепрерывна снизу на $\mathscr{H}(\Omega)$ в точке f. Предположим, что функция f тождественно равна нулю на некоторой связной компоненте $\mathcal{O}_1$ множества $\mathcal{O}$. Среди функций, близких к функции f в $\mathcal{O}_1$, имеются постоянные $\neq 0$. Они не имеют нулей в $\mathcal{O}_1$. Поэтому в такой точке f функция $g \to N(g;\ \mathcal{O})$ не является более полунепрерывной снизу на $\mathscr{H}(\mathcal{O})$. Можно лишь сказать, что функция $f \to N(f;\ \mathcal{O})$ полунепрерывна снизу на подмножестве в $\mathscr{H}(\Omega)$, состоящем из функций, не постоянных ни на какой связной компоненте множества $\mathcal{O}$.

Следствие (Монтель). *Пусть Ω — открытое связное множество из $\mathbb{C}$, M — некоторое число $\geqslant 0$, K — компакт множества Ω, a — точка из Ω, α — некоторое вещественное число > 0. Тогда существует целое конечное число $N(\Omega,\ M,\ K,\ a,\ \alpha)$, такое, что для любой голоморфной функции на Ω, ограниченной по модулю числом M и удовлетворяющей условию $|f'(a)| \geqslant \alpha$, выполняется неравенство $N(f;\ K) \leqslant N(\Omega,\ M,\ K,\ a,\ \alpha)$.*

Доказательство. Множество голоморфных функций на Ω, ограниченных по модулю числом M и удовлетворяющих условию $|f'(a)| \geqslant \alpha$, замкнуто и ограничено в $\mathscr{H}(\Omega)$, а значит, компактно (следствие 6 теоремы 47). Следовательно, функция $f \to N(f;\ K)$ на этом множестве имеет максимум. Этот максимум конечен. В самом деле, если этот максимум достигается на функции f и эта функция имеет бесконечное множество нулей на K, то из этого множества можно извлечь сходящуюся последовательность, а тогда функция f окажется тождественно равной нулю на связном множестве Ω (следствие 6 теоремы 11), что невозможно, поскольку $|f'(a)| \geqslant \alpha > 0$.