ДОПОЛНЕНИЕ О ПРОСТОЙ И РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Каждая из приводимых ниже теорем состоит из двух частей: первая относится к одной функции и сходимости в точке, вторая — к множествам функций и равномерной сходимости на множествах точек. Последняя носит значительно более тонкий характер, и при первом чтении ее можно опускать, если она не связана с первой. Например, если читателя интересует лишь простая сходимость ряда Фурье (теорема 3), то достаточно прочитать часть теоремы 1, относящуюся только к одной функции $\vec{f}$, и так же поступить со следствием этой теоремы и с теоремой 2. Затем он может рассмотреть следствие теоремы 2 для случая одной функции $\vec{f}=\vec{g}$ при $\lambda=\mu$. После этого достаточно будет перейти к первой части доказательства теоремы 3 и завершить чтение следствием 1.

Сходимость интеграла Фурье

Теорема 1. *Пусть $\vec{f}$ — интегрируемая функция на $\mathbb{R}$ со значениями в банаховом пространстве $\vec{F}$. Тогда интеграл Фурье*

$$\vec{C}(\lambda;\vec{f})=\vec{C}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}\vec{f}(x)\,e^{-2i\pi\lambda x}\,dx \tag{1}$$

представляет собой непрерывную функцию λ, стремящуюся к $\vec{0}$ при $\lambda\to\pm\infty$ (Лебег). Кроме того, эта сходимость к $\vec{0}$ равномерна, когда $\vec{f}$ пробегает относительно компактную часть пространства $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$.

Доказательство. Непрерывность функции $\vec{C}$ очевидна (она вытекает из известной теоремы Лебега).

С другой стороны, так как $\|\vec{C}(\lambda)\|\leqslant\|\vec{f}\|_{L^1}$, то функция $\vec{C}$ ограничена. Покажем, что она стремится к $\vec{0}$ при $\lambda\to\infty$.

Если функция $\vec{f}$ принадлежит классу C^1 и интегрируема вместе со своей производной, то $\vec{C}(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}\vec{f}'(x)\dfrac{e^{-2i\pi\lambda x}}{2i\pi\lambda}dx$, а значит, $\|\vec{C}(\lambda)\|\leqslant\text{const}\dfrac{1}{|\lambda|}$, и утверждение доказано.

Согласно теореме 49 гл. IV, непрерывные функции с компактным носителем плотны в $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Далее, согласно теореме об аппроксимации, каждая непрерывная функция с компактным носителем и значениями в $\vec{F}$ является равномерным пределом [а следовательно, и пределом в $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$] последовательности бесконечно дифференцируемых функций с носителем в некотором фиксированном компакте, а следовательно, пространство $\mathscr{D}(\mathbb{R}; \vec{F})$ бесконечно дифференцируемых функций со значениями в $\vec{F}$ и компактными носителями в $\mathbb{R}$ плотно в $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Поэтому линейные отображения u_λ: $\vec{f} \to \vec{C}(\lambda; \vec{f})$ из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ в $\vec{F}$, зависящие от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ при λ, стремящемся к бесконечности, сходятся к нулевому отображению на плотном подмножестве $\mathscr{D}(\mathbb{R}; \vec{F})$ пространства $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Поскольку их норма $\leqslant 1$, то при λ, изменяющемся в $\mathbb{R}$, они равностепенно непрерывны. Из 2-й теоремы Асколи следует, что отображения u_λ сходятся просто к 0 на всем пространстве $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, т. е. интеграл $\vec{C}(\lambda; \vec{f})$ сходится к $\vec{0}$ при λ, стремящемся к бесконечности, для каждого $\vec{f} \in L(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, и сходимость равномерна на каждом компакте.

Следствие. *Если функция $\vec{f}$ периодична с периодом T на $\mathbb{R}$ и локально интегрируема, то ее коэффициенты Фурье $\vec{c}_k(\vec{f})$ при $|k|$, стремящемся к бесконечности, стремятся к $\vec{0}$, и сходимость равномерна, когда $\vec{f}$ пробегает относительно компактную часть пространства $L^1(\Gamma, dx; \vec{F})$* [1]).

В самом деле, обозначим через $\vec{g}$ функцию на $\mathbb{R}$, совпадающую с $\vec{f}$ на некотором отрезке длины T и равную нулю вне его. Тогда $\vec{c}_k(\vec{f}) = \vec{C}(\lambda; \vec{g}) = \int\limits_{\mathbb{R}} \vec{g}(x) e^{-2i\pi\lambda x}\, dx$ при $2\pi\lambda = k\omega$ (где $\omega = 2\pi/T$), и наше утверждение теперь вытекает из теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\vec{f}$ — функция, интегрируемая на $\mathbb{R}$, со значениями в $\vec{F}$ и $\vec{\sigma} \in \vec{F}$. Тогда интеграл Дирихле*

$$\vec{J}(\lambda; \vec{f}) = \vec{J}(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} \vec{f}(x) \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx, \qquad \lambda \geqslant 0, \tag{2}$$

[1]) См. примечание на стр. 512.

при $\lambda \to +\infty$[1]) *сходится к* $J\vec{\sigma}$, *где* $J = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$, *если выполнено одно из двух следующих условий*:

Условие 1). *Функция* $\frac{\vec{f}(x) - \vec{\sigma}}{x}$ *интегрируема в окрестности начала координат*[2]).

Это имеет место, в частности, если функция $\vec{f}$ *имеет в нуле предел справа* $\vec{f}(0+0)$ *и удовлетворяет в окрестности нуля условию Гёльдера* $|\vec{f}(x) - \vec{f}(0+0)| \leqslant Cx^{\alpha}$, C *и* $\alpha > 0$, *в частности, если* $\vec{f}$ *дифференцируема в начале координат.*

При этом сходимость интеграла $\vec{J}(\lambda; \vec{f})$ *к* $J\vec{\sigma}$ *будет равномерной при* $\lambda \to +\infty$, *если* $\vec{f}$ *и* $\vec{\sigma}$ *изменяются так, что условие* 1) *выполняется для каждой пары* $(\vec{f}, \vec{\sigma})$, *когда функция* $\vec{f}$ *пробегает относительно компактную часть из* $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, *а* $\vec{\sigma}$ — *ограниченную часть из* $\vec{F}$ *и интеграл* $\int\limits_0^{\delta} \left\| \frac{\vec{f}(x) - \vec{\sigma}}{x} \right\| dx$ *сходится к* 0 *при* δ, *стремящемся к* 0, *равномерно относительно* $\vec{f}$, $\vec{\sigma}$.

Условие 2). *Функция* $\vec{f}$ *имеет ограниченную вариацию в окрестности начала координат, пространство* $\vec{F}$ *конечномерно, а* $\vec{\sigma} = \vec{f}(0+0)$.

Это имеет место, в частности, если функция $\vec{f}$ *вещественна, монотонна и ограничена в окрестности* 0. *При этом сходимость интеграла* $\vec{J}(\lambda; \vec{f})$ *к* $J\vec{\sigma}$ *равномерна, если* $\vec{f}$ *и* $\vec{\sigma}$ *изменяются так, что* $\vec{f}$ *пробегает относительно компактную часть из* $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, $\vec{f}(0+0)$ — *ограниченную часть* $\vec{F}$, *а полная вариация* $V(\vec{f};]0; \delta[)$ *функции* $\vec{f}$ *в* $]0, \delta[$ *стремится к* 0 *при* δ, *стремящемся к* 0, *равномерно относительно* $\vec{f}$.

---

[1]) Мы берем $\lambda \geqslant 0$. При $\lambda \to -\infty$ интеграл стремится к $-J\vec{\sigma}$. Известно, что $J = \pi/2$ (формула (VI, 11; 51)), однако мы здесь докажем это заново.

[2]) Отсюда не следует, что функция $\vec{f}$ стремится к $\vec{\sigma}$ при $x \to 0$. Однако если функция $\vec{f}$ имеет предел, то им может быть только $\vec{\sigma}$. Поскольку функция $1/x$ не интегрируема в окрестности 0, то $\vec{f}$ определяет $\vec{\sigma}$.

Доказательство. Предположим сначала, что выполнено условие 1). Имеем

$$J(\lambda; \vec{f}) - J\vec{\sigma} = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin \lambda x \, dx +$$

$$+ \left(\int_0^{\delta} \frac{\sin \lambda x}{x} dx - J \right) \vec{\sigma} + \int_0^{\delta} \frac{\vec{f}(x) - \vec{\sigma}}{x} \sin \lambda x \, dx. \quad (3)$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$; выберем δ так, чтобы третье слагаемое в (3) при всех $\vec{f}$ и $\vec{\sigma}$, удовлетворяющих заданным условиям, было равномерно ограничено по норме числом $\varepsilon/3$. Зафиксировав такое δ, запишем второе слагаемое в виде

$$\left(\int_0^{\lambda\delta} \frac{\sin x}{x} dx - J \right) \vec{\sigma} = \vec{\sigma} \int_{\lambda\delta}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Поскольку вектор $\vec{\sigma}$ ограничен в $\vec{F}$, можно выбрать λ настолько большим, чтобы это слагаемое было по норме ограничено числом $\varepsilon/3$. Поскольку отношение $\vec{f}(x)/x$ интегрируемо на $[\delta, +\infty[$, к нему можно применить теорему 1 $\left(\text{положив } \sin \lambda x = \frac{e^{i\lambda x} - e^{-i\lambda x}}{2i}\right)$. Кроме того, отображение $(\vec{f}$ на $[0, +\infty[) \to \to (\vec{f}(x)/x$ на $[\delta, +\infty[)$ является линейным непрерывным отображением $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ в $L^1([\delta, +\infty[\,, dx; \vec{F})$ (с нормой $\leqslant 1/\delta$). Следовательно, если $\vec{f}$ пробегает компакт из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, то функция $\vec{f}(x)/x$ пробегает компакт в $L^1([\delta, +\infty[\,, dx; \vec{F})$, и для достаточно больших значений λ и всех функций $\vec{f}$, удовлетворяющих указанным условиям, первое слагаемое будет равномерно ограничено по норме числом $\varepsilon/3$. Этим доказывается утверждение теоремы для случая, когда выполнено условие 1).

Перейдем теперь к случаю, когда выполнено условие 2).

Пусть функция $\vec{f}$ имеет ограниченную вариацию в $[0, \delta]$, пространство $\vec{F}$ конечномерно, а $\vec{\sigma} = \vec{f}(0+0)$. Можно считать, что функция $\vec{f}$ непрерывна в нуле, так что $\vec{f}(0) = \vec{f}(0+0)$. (Значение $\vec{f}(0)$ не играет в доказательстве никакой роли.) Можно предполагать также, что функция $\vec{f}$ непрерывна слева, заменяя $\vec{f}(x)$ на $\vec{f}(x-0)$ там, где эти значения различаются.

Это касается только не более чем счетного множества точек, что не меняет значений интегралов и может только уменьшить полную вариацию функции $\vec{f}$.

Согласно теореме 88 гл. IV, при этих условиях функция $\vec{f}$ является неопределенным интегралом некоторой меры $\vec{\mu}$ с базой $\geqslant 0$. Кроме того, возможно интегрирование по частям (теорема 92 гл. IV).

Положим $T_\lambda(x) = \int\limits_0^\delta \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \int\limits_0^{\lambda\delta} \frac{\sin t}{t} dt$. Тогда $T_\lambda(0) = 0$. Если $x \neq 0$, то при $\lambda \to +\infty$ интеграл $T_\lambda(x)$ стремится к J, оставаясь ограниченным. Имеем

$$J(\lambda; \vec{f}) - J\vec{f}(0) = \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin \lambda x\, dx + \int\limits_0^\delta \vec{f}(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx - J\vec{f}(0) =$$

$$= \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin \lambda x\, dx + T_\lambda(\delta)\vec{f}(\delta) - J\vec{f}(0) - \int\limits_0^\delta T_\lambda(x)\, d\vec{\mu}(x) =$$

$$= \int\limits_\delta^{+\infty} \frac{\vec{f}(x)}{x} \sin \lambda x\, dx + T_\lambda(\delta)(\vec{f}(\delta) - \vec{f}(0)) +$$

$$+ (T_\lambda(\delta) - J)\vec{f}(0) - \int\limits_0^\delta T_\lambda(x)\, d\vec{\mu}(x). \qquad (3_2)$$

Полная вариация функции $\vec{f}$ в $[0, \delta[$ (или в $]0, \delta[$, поскольку она предполагалась непрерывной) равна $\int\limits_0^\delta d|\vec{\mu}|$ и $\geqslant \|\vec{f}(\delta) - \vec{f}(0)\|$. Поскольку функция T_λ ограничена, то $\delta > 0$ можно выбрать так, чтобы второе и четвертое слагаемые в последней части формулы (3_2) были по норме ограничены числом $\varepsilon/4$ равномерно для всех функций $\vec{f}$, удовлетворяющих указанным выше условиям. Далее, поскольку все значения $\vec{f}(0)$ ограничены, то можно выбрать λ настолько большим, чтобы третье слагаемое было $\leqslant \varepsilon/4$ равномерно относительно $\vec{f}$. Если воспользоваться теоремой 1, то же самое можно утверждать и для первого слагаемого. Тем самым теорема доказана и при выполнении условия 2).

Следствие. *Пусть $\vec{f}$ и $\vec{g}$ — интегрируемые на $\mathbb{R}$ функции, совпадающие в некоторой окрестности 0. Пусть α — комплекс-*

ная функция на $\mathbb{R}$, измеримая, ограниченная снизу вне любой окрестности 0, дважды дифференцируемая в окрестности 0 и такая, что $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)=1$. Положим

$$\vec{K}(\mu;\vec{g})=\int_0^{+\infty}\vec{g}(x)\frac{\sin\mu x}{\alpha(x)}\,dx,\qquad \mu\geqslant 0. \tag{3_3}$$

Тогда всякий раз, когда $\vec{J}(\lambda;\vec{f})$ имеет предел $\vec{Js}$ при $\lambda\to+\infty$, интеграл $\vec{K}(\mu;\vec{g})$ имеет тот же предел $\vec{Js}$ при $\mu\to+\infty$. Более того, независимо от существования этих пределов, если функции $\vec{f}$ и $\vec{g}$ пробегают относительно компактные части из $L^1(\mathbb{R}, dx;\vec{F})$, совпадая в одной и той же окрестности точки 0, то при λ и μ, стремящихся к $+\infty$, разность $\vec{K}(\mu;\vec{f})-\vec{J}(\lambda;\vec{f})$ стремится к $\vec{0}$ равномерно относительно $\vec{f}$ и $\vec{g}$ при условии, что остается ограниченной величина $|\lambda-\mu|$.

Доказательство. По существу речь идет, собственно, о следствиии из теоремы 1, а не теоремы 2. Однако мы его помещаем здесь потому, что теорема 2 с помощью условий вида 1) или 2) позволяет найти предел $\vec{Js}$ интеграла $\vec{J}(\lambda;\vec{f})$, а настоящее следствие дает предел функции $\vec{K}(\mu;\vec{g})$, также равный $\vec{Js}$. Достаточно доказать лишь второе утверждение следствия.

Имеем

$$\begin{aligned}
&\vec{K}(\mu;\vec{g})-\vec{J}(\lambda;\vec{f})=\\
&\quad=(\vec{K}(\mu;\vec{g})-\vec{J}(\mu;\vec{g}))+(\vec{J}(\mu;\vec{g})-\vec{J}(\mu;\vec{f}))+(\vec{J}(\mu;\vec{f})-\vec{J}(\lambda;\vec{f}))=\\
&\quad=\int_0^{+\infty}\vec{g}(x)\left(\frac{1}{\alpha(x)}-\frac{1}{x}\right)\sin\mu x\,dx+\int_0^{\infty}\frac{\vec{g}(x)-\vec{f}(x)}{x}\sin\mu x\,dx+\\
&\qquad\qquad+2\int_0^{+\infty}\frac{\vec{f}(x)\sin\frac{\mu-\lambda}{2}x}{x}\cos\frac{\mu+\lambda}{2}x\,dx.
\end{aligned}\tag{3_4}$$

Функция $\frac{1}{\alpha(x)}-\frac{1}{x}$ измерима и ограничена на $\mathbb{R}$. В самом деле, эта функция ограничена вне любой окрестности 0. В окрестности начала координат, согласно формуле Тейлора, $\alpha(x)-x=\alpha(x)-\alpha(0)-x\alpha'(0)\sim\frac{x^2}{2}\alpha''(0)$ при $x\to 0$ (теорема 21 гл. II), так что $\frac{1}{\alpha(x)}-\frac{1}{x}=\frac{x-\alpha(x)}{x\alpha(x)}$ стремится к $-\frac{1}{2}\alpha''(0)$ при $x\to 0$. Следовательно, эта функция ограничена и в окрестности 0. Согласно теореме 1, первый интеграл стремится к $\vec{0}$ при $\mu\to+\infty$. Кроме того, если $\vec{f}$ пробегает компакт из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, то же самое верно и для функции $\vec{f}(x)\left(\frac{1}{\alpha(x)}-\frac{1}{x}\right)$, поскольку $\vec{f}\to\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{x}\right)\vec{f}$ является непрерывным отображением пространства $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ в себя. Следовательно, сходимость равномерна относительно $\vec{f}$. Этим доказательство следствия заканчивается, если ограничиться случаем $\vec{f}=\vec{g}$ и $\lambda=\mu$.

Так как разность $\vec{g}-\vec{f}$ обращается в нуль в некоторой окрестности 0, то отношение $\frac{\vec{g}(x)-\vec{f}(x)}{x}$ интегрируемо. Поэтому по теореме 1 при $\mu\to\infty$ второй интеграл стремится к $\vec{0}$. Кроме того, когда $\vec{f}$ и $\vec{g}$ пробегают компакты из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, функция $\frac{\vec{g}-\vec{f}}{x}$ пробегает некоторый компакт из $L^1([\delta, +\infty[\,, dx; \vec{F})$, и, поскольку $\vec{f}$ и $\vec{g}$ совпадают в $[0, \delta]$, второе слагаемое сводится к интегралу по $[\delta, +\infty[$. Следовательно, при $\mu\to+\infty$ второе слагаемое стремится к нулю равномерно относительно $\vec{f}$ и $\vec{g}$, удовлетворяющих указанным выше условиям.

Если ограничиться случаем $\lambda=\mu$, то на этом доказательство заканчивается. Предположим теперь, что величина $|\mu-\lambda|$ всего лишь ограничена. Отображение $(\vec{f}, g)\to\vec{f}g$ является билинейным непрерывным отображением $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})\times(\mathbb{C}^{\mathbb{R}})_{cb}$ в $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ с нормой $\leqslant 1$. Поскольку

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{\sin\tau''x}{x}-\frac{\sin\tau'x}{x}\right|=\sup_{x\in\mathbb{R}}2\left|\frac{\sin\frac{\tau''-\tau'}{2}x}{x}\cos\frac{\tau''+\tau'}{2}x\right|\leqslant|\tau''-\tau'|,$$

отображение $\tau\to\left(\text{функция } \frac{\sin\tau x}{x}\right)$ пространства $\mathbb{R}$ в пространство $(\mathbb{C}^{\mathbb{R}})_{cb}$ непрерывно и даже удовлетворяет условию Липшица, а следовательно, $(\vec{f}, \tau)\to\left(\text{функция } \vec{f}(x)\frac{\sin\tau x}{x}\right)$ является непрерывным отображением $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})\times\mathbb{R}$ в $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Если теперь функция $\vec{f}$ пробегает относительный компакт из

$L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$, а τ — относительный компакт из $\mathbb{R}$, то функция $\vec{f}(x)\frac{\sin\tau x}{x}$ пробегает относительный компакт из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. Следовательно, если функция $\vec{f}$ пробегает относительный компакт из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$ и если разность $\lambda-\mu$ остается ограниченной, то функция $f(x)\frac{\sin\frac{\mu-\lambda}{2}x}{x}$ пробегает относительный компакт из $L^1(\mathbb{R}, dx; \vec{F})$. В силу теоремы 2 при $\mu+\lambda\to+\infty$ последний интеграл в (3_4) равномерно сходится к $\vec{0}$, чем и заканчивается доказательство следствия.

Сходимость ряда Фурье

Теорема 3. *Пусть $\vec{f}$ — периодическая функция на $\mathbb{R}$ с периодом T и $\omega=2\pi/T$. Предположим, что функция $\vec{f}$ интегрируема на некотором интервале длины T.*

Пусть $\vec{s}\in\vec{F}$ и выполняется одно из следующих двух условий:

1) *четная функция* $t\to\frac{\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)-2\vec{s}}{t}$ *интегрируема в некоторой окрестности* 0;

2) *четная функция* $t\to\frac{\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)}{2}$ *имеет в окрестности* 0 *ограниченную вариацию, ее предел справа (и слева) при* $t=0$ *равен* $\vec{s}$, *а пространство* $\vec{F}$ *конечномерно.*

Тогда ряд Фурье функции $\vec{f}$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\vec{c}_k(\vec{f})\,e^{ik\omega x},\quad \text{где}\quad \vec{c}_k(\vec{f})=\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}}\vec{f}(\xi)\,e^{-ik\omega\xi}\,\frac{d\xi}{T},\tag{4}$$

при $x=a$ сходится в смысле главного значения Коши к $\vec{s}$:

$$\lim_{N\to+\infty}\vec{S}_N(a;\vec{f})=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N}\vec{c}_k(\vec{f})\,e^{ik\omega a}=\vec{s}.\tag{5}$$

Кроме того, интеграл $J=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ *равен* $\pi/2$[1].

[1]) Это будет новым доказательством формулы (IV, 11; 51).

Пусть A — замкнутое множество из $\mathbb{R}$, функция $\vec{f}$ непрерывна на $\mathbb{R}$ в каждой точке A[1]*) и выполнено одно из двух следующих условий:*

Условие 1′). *Функция $\vec{f}$ в некоторой окрестности A' множества A удовлетворяет условию Гёльдера*

$$\|\vec{f}(x)-\vec{f}(y)\|\leqslant C|x-y|^{\alpha} \quad \text{при} \quad x\in A;\quad y\in A',$$

где C и $\alpha>0$.

Условие 2′). *Функция $\vec{f}$ имеет локально ограниченную вариацию в некоторой окрестности A' множества A, и пространство $\vec{F}$ конечномерно.*

Тогда сходимость $\vec{S}_N(\vec{f})$ к $\vec{f}$ при N, стремящемся к бесконечности, равномерна на A.

Доказательство. Так как

$$\vec{c}_k(\vec{f})\,e^{ik\omega a}=\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}}\vec{f}(\xi)\,e^{ik\omega(a-\xi)}\frac{d\xi}{T}, \tag{6}$$

то

$$\vec{S}_N(a;\vec{f})=\int_{a-\frac{T}{2}}^{a+\frac{T}{2}}\vec{f}(\xi)\,R_N(a-\xi)\frac{d\xi}{T}, \quad \text{где} \quad R_N(t)=\sum_{k=-N}^{N}e^{ik\omega t}. \tag{7}$$

Функцию R_N можно вычислить как сумму членов геометрической прогрессии:

$$R_N(t)=\frac{e^{i(N+1)\omega t}-e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t}-1}=\frac{e^{i\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}-e^{-i\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}}{e^{\frac{i\omega t}{2}}-e^{-\frac{i\omega t}{2}}}=$$

$$=\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\sin\frac{\omega t}{2}}. \tag{8}$$

---

[1]) Это условие предполагает большее, чем непрерывность сужения $\vec{f}$ на A. С другой стороны, оно не предполагает непрерывности $\vec{f}$ в окрестности множества A.

Поэтому

$$\vec{S}_N(a;\ \vec{f}) = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \vec{f}(a-t)\,R_N(t)\frac{dt}{T} = \int\limits_{-T/2}^{T/2} \vec{f}(a-t)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\sin\frac{\omega t}{2}}\frac{dt}{T} =$$

$$= \int\limits_0^{T/2} \frac{1}{\pi}(\vec{f}(a+t)-\vec{f}(a-t))\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega t}{\left(\sin\frac{\omega t}{2}\right)\Big/\frac{\omega}{2}}\,dt. \qquad (9)$$

Введем функцию $\vec{\Phi}_a(t)$, равную

$$\vec{\Phi}_a(t) = \frac{1}{\pi}(\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)) \qquad (9_2)$$

в $[0,\ T/2]$ и нулю вне этого отрезка. Положим $\mu = \left(N+\frac{1}{2}\right)\omega$ и введем функцию $\alpha(t)$, равную $\left(\sin\frac{\omega t}{2}\right)\Big/\frac{\omega}{2}$ на отрезке $[0,\ T/2]$ и любому постоянному числу $\neq 0$ вне его. Функция α ограничена снизу вне любой окрестности нуля и $\alpha(0)=0$, $\alpha'(0)=1$. Тогда из (9) мы получим интеграл (3_3).

Так как при $\vec{\sigma} = \frac{2}{\pi}\vec{s}$

$$\vec{\Phi}_a(t) - \vec{\sigma} = \frac{1}{\pi}(\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)-2\vec{s}) \qquad (9_3)$$

и

$$\Phi_a(0+0) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}(\vec{f}(a+0)+\vec{f}(a-0)) = \frac{2}{\pi}\vec{s},$$

то, если функция $\vec{f}$ удовлетворяет условию 1) или 2) теоремы 3, функция $\vec{\Phi}_a$ удовлетворяет условию 1) или 2) теоремы 2 $\left(\text{где } \vec{\sigma} = \frac{2}{\pi}\vec{s}\right)$.

Из теоремы 2 и ее следствия вытекает, что $\vec{S}_N(a;\ \vec{f})$ при N, стремящемся к бесконечности, сходится к $J\vec{\sigma} = J\frac{2}{\pi}\vec{s}$, где $J = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. Поэтому если мы покажем, что $J=\pi/2$, то будет доказан результат, относящийся к сходимости в точке a. Но для этого достаточно применить полученное выше к постоянной функции $f=1$. Тогда все $c_k(f)$ будут равны 0, кроме $c_0(f)=1$, и сумма $S_N(a;\ 1)=1$ заведомо будет стремиться к 1. Но так как она должна стремиться к $J\cdot\frac{2}{\pi}\cdot 1$, то получаем, что $J=\pi/2$.

Прежде чем доказывать ту часть, которая относится к равномерной сходимости, приведем очевидное следствие утверждения, относящегося к простой сходимости.

Следствие 1. *Пусть функция* $\vec{f}$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1′) *Функция* $\vec{f}$ *имеет предел справа* $\vec{f}(a+0)$ *и предел слева* $\vec{f}(a-0)$ *в точке* a, *а функции* $t \to \frac{\vec{f}(a+t)-\vec{f}(a+0)}{t}$ *и* $t \to \frac{\vec{f}(a-t)-\vec{f}(a-0)}{t}$ *интегрируемы на* $\mathbb{R}_+$ *в окрестности точки* 0. *Так будет, в частности, в том случае, когда функция* $\vec{f}$ *удовлетворяет условиям Гёльдера* $\|\vec{f}(x)-\vec{f}(a+0)\| \leqslant C|x-a|^\alpha$ *при* $x \geqslant a$ *и* $\|\vec{f}(x)-\vec{f}(a-0)\| \leqslant C|x-a|^\alpha$ *при* $x \leqslant a$. *Последнее справедливо, например, если функция* $\vec{f}$ *дифференцируема в точке* a.

2′) *Функция* $\vec{f}$ *имеет ограниченную вариацию в окрестности точки* a, *а пространство* $\vec{F}$ *конечномерно. Так будет, в частности, тогда, когда функция* $\vec{f}$ *вещественна, монотонна и ограничена в окрестности точки* a.

Тогда ряд Фурье функции $\vec{f}$ *при* $x=a$ *сходится в смысле главного значения Коши к* $\frac{1}{2}(\vec{f}(a+0)+\vec{f}(a-0))$.

Перейдем теперь к случаю равномерной сходимости. При рассматриваемых условиях сумма $\vec{S}_N(a;\vec{f})$ при N, стремящемся к бесконечности, сходится к $\vec{f}(a)$ в каждой точке $a \in A$, и нам нужно показать, что эта сходимость равномерна относительно $a \in A$. Для этого достаточно показать, что функция $\vec{\Phi}_a$ удовлетворяет условиям теоремы 2, позволяющим утверждать, что сходимость интеграла $\int_0^\infty \vec{\Phi}_a(t)\frac{\sin \mu t}{\alpha(t)}dt$ к $J\vec{\sigma}=\vec{f}(a)$ при $\lambda \to +\infty$ равномерна относительно $a \in A$.

Покажем сначала, что при фиксированной функции $\vec{f}$ и переменной точке a на Γ[1]) функции $\vec{\Phi}_a$ образуют некоторый компакт в $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Обозначим через u_a непрерывное линей-

---

[1]) Мы систематически отождествляем функции на окружности с периодическими функциями на $\mathbb{R}$ периода T. Это приводит к некоторой вольности изложения, однако не мешает пониманию.

ное отображение $\vec{f} \to \vec{\Phi}_a$ пространства $L^1(\Gamma, dt; \vec{F})$ в пространство $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Норма этого отображения ограничена числом $1/\pi$. Если $\vec{f}$ — непрерывная функция, то при a, стремящемся к a_0, функция $u_a\vec{f}$ стремится к $u_{a_0}\vec{f}$ в $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$, поскольку она сходится к $u_{a_0}\vec{f}$ равномерно на отрезке $[0, T/2]$ и остается равной нулю вне этого отрезка. Значит, u_a сходится просто к u_{a_0} на плотном подмножестве $\mathscr{C}(\Gamma; \vec{F})$ из $L^1(\Gamma; dt; \vec{F})$. Согласно 2-й теоремы Асколи, $u_a\vec{f}$ также сходится к $u_{a_0}\vec{f}$ для любой функции $\vec{f}$ из $L^1(\Gamma, dt; \vec{F})$. Это означает, что отображение $a \to u_a\vec{f} = \vec{\Phi}_a$ для фиксированной функции $\vec{f}$ в $L^1(\Gamma, dt; \vec{F})$ является непрерывным отображением Γ в $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Следовательно, образ компакта Γ является снова компактом в $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Это вытекает из одной только интегрируемости $\vec{f}$ на Γ.

Допустим теперь, что выполнено условие 1′). Пусть δ_0 — наименьшее расстояние от A до $\complement A'$ (см. гл. II, стр. 83). Для $\delta \leqslant \delta_0$ при $a \in A$ имеет место следующая оценка:

$$\int_0^\delta \left\| \frac{\vec{\Phi}_a(t) - \frac{2}{\pi}\vec{f}(a)}{t} \right\| dt \leqslant \frac{1}{\pi} 2C \frac{\delta^\alpha}{\alpha}, \tag{10}$$

так что при δ, стремящемся к 0, левая часть будет стремиться к 0 равномерно относительно $a \in A$. Из следствия теоремы 2 теперь вытекает, что последовательность $\vec{S}_N(\vec{f})$ сходится к $\vec{f}$ равномерно на A.

Предположим, наконец, что выполнено условие 2′). Покажем, что если условие 2) теоремы 2 считать не выполняющимся, то мы придем к противоречию. В самом деле, в этом случае нашлись бы такая последовательность точек a_n из A и такое число $\varepsilon > 0$, при которых

$$V(\vec{\Phi}_{a_n};\ ]0, 1/n[) \geqslant \varepsilon. \tag{10_2}$$

Однако, поскольку множество A является компактом на Γ, из последовательности a_n можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке a в A. Точки $a_n \pm 1/n$ при этом будут также стремиться к a. Функция $\vec{f}$ по предположению имеет ограниченную вариацию в окрестности точки a и непрерывна в этой точке. Следовательно, вариация функции $\vec{f}$ в отрезке $[a-\eta, a+\eta]$ стремится к 0 вместе с η (теорема 84_2

гл. IV), а значит, ее вариация в отрезке $[a_n - 1/n,\ a_n + 1/n]$ стремится к 0 при n, стремящемся к бесконечности. Отсюда $V(\vec{\Phi}_{a_n};\ [0;\ 1/n])$ при n, стремящемся к бесконечности, стремится к 0, что противоречит неравенству (10_2).

Таким образом, вариация функции $\vec{\Phi}_a$ в отрезке $|0, \delta|$ при δ, стремящемся к 0, стремится к 0 равномерно относительно $a \in A$. Тем самым выполняется условие 2) теоремы 2, и последовательность $\vec{S}_N(\vec{f})$ сходится к $\vec{f}$ равномерно на A при N, стремящемся к бесконечности.

Из этой равномерной сходимости вытекает

Следствие 2. *Если функция $\vec{f}$ имеет локально ограниченную вариацию на $\mathbb{R}$ и пространство $\vec{F}$ конечномерно, то сходимость последовательности $\vec{S}_N(\vec{f})$ к функции $\vec{f}$ при N, стремящемся к бесконечности, равномерна на множестве A точек непрерывности функции $\vec{f}$. Если функция $\vec{f}$ удовлетворяет условию Гёльдера (а следовательно, непрерывна) на $\mathbb{R}$, т. е. выполняется неравенство*

$$\|\vec{f}(x) - \vec{f}(y)\| \leqslant C|x-y|^{\alpha}, \quad C \text{ и } \alpha > 0, \tag{10_3}$$

или если она имеет локально ограниченную вариацию и всюду непрерывна, а пространство $\vec{F}$ конечномерно, то последовательность $\vec{S}_N(\vec{f})$ при N, стремящемся к бесконечности, сходится к функции $\vec{f}$ равномерно на $\mathbb{R}$.

Замечания. 1°) Условия 1) и 2) относительно $\vec{f}(a+t) + \vec{f}(a-t)$ не так ограничительны, как раздельные условия для $\vec{f}(a+t)$ и $\vec{f}(a-t)$, указанные в следствии 1. Возьмем, к примеру, $a=0$ и нечетную функцию $\vec{f}$. Тогда $\vec{f}(t) + \vec{f}(-t)$ тождественно равна нулю, а следовательно, 1) и 2) выполняются и $\vec{s} = \vec{0}$. Ряд Фурье состоит из синусов, все суммы $\vec{S}_N(0;\ \vec{f})$ равны нулю, и сходимость к $\vec{0}$ очевидна. Было бы смешно налагать на $\vec{f}$ такие условия, как интегрируемость $\vec{f}(t)/t$ или ограниченность вариации функции $\vec{f}$.

2°) Мы подчеркивали, что ряд сходится в смысле *главного значения Коши*, т. е. к $\vec{s}$ сходится $\sum\limits_{k=-N}^{N}$, в то время как ряды

$\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}$ и $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ могут расходиться. Выберем, например, в качестве f нечетную функцию, равную -1 в $]-T/2,\ 0[$ и равую $+1$ в $]0,\ +T/2[$. Ее коэффициенты равны

$$c_k(f)=0 \quad \text{для четных } k, \quad c_{2l+1}(f)=+\frac{2}{(2l+1)\,i\pi}. \tag{11}$$

Ряд Фурье представляет собой ряд из синусов

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\,\frac{\sin(2l+1)\,\omega x}{2l+1}. \tag{11_2}$$

Как и в замечании 1°), сходимость к 0 при $x=0$ очевидна. Однако сумма $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f)\,e^{ik\omega x}$ равна $\frac{2}{i\pi}\sum\limits_{l=0}^{+\infty}\frac{e^{(2l+1)\,i\omega x}}{2l+1}$ и оба ряда $\sum\limits_{k=-1}^{-\infty}$ и $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}$ при $x=0$ расходятся.

3°) Рассмотрим последовательность функций $\frac{1}{T}R_N(x)$ на окружности Г.

Посмотрим, будет ли эта последовательность $\frac{1}{T}R_N$ широко сходиться к δ-функции? И вообще, всегда ли ряд Фурье непрерывной функции просто сходится к этой функции?

Покажем, что *непрерывность функции* $\vec{f}$ *не является ни необходимым, ни достаточным условием для того, чтобы ряд Фурье этой функции сходился просто к функции* $\vec{f}$.

Прежде всего если на отрезке, длина которого равна периоду, функция $\vec{f}$ имеет ограниченную вариацию и $\vec{f}(a)=\frac{1}{2}(\vec{f}(a+0)+\vec{f}(a-0))$ в каждой точке a, то ряд Фурье функции $\vec{f}$, несмотря на наличие разрывов, просто сходится к этой функции $\vec{f}$. Поэтому непрерывность функции $\vec{f}$ не является необходимым условием такой сходимости.

Она не является также и достаточным условием. Привести пример непрерывной функции, ряд Фурье которой не сходится, не легко. Однако теорема Банаха — Штейнгауза позволяет установить этот результат, не прибегая к построению контрпримера.

Предположим, что для любой непрерывной на Г функции φ ряд Фурье этой функции сходится в точке 0, т. е. что $\frac{1}{T}R_N$ *широко* сходится к δ-функции при N, стремящемся к бесконечности. Тогда из теоремы Банаха — Штейнгауза следовало бы, что нормы мер $\frac{1}{T}R_N\,dx$ были бы ограничены некоторым фиксированным числом $M>0$:

$$\left\|\frac{1}{T}R_N\,dx\right\|=\int_{-T/2}^{T/2}|R_N(x)|\frac{dx}{T}\leqslant M. \tag{12}$$

Имеем

$$\int_{-T/2}^{T/2}\left|R_N(x)\frac{dx}{T}\right|=\int_{-T/2}^{T/2}\left|\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega x}{\sin\omega x/2}\right|\frac{dx}{T}=$$

$$=\int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{T}{2}}^{+\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{T}{2}}\left|\frac{\sin\omega\xi}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\omega\xi}{2\left(N+\frac{1}{2}\right)}}\right|\frac{d\xi}{T}. \tag{13}$$

Подинтегральную функцию f_N можно рассматривать на $\mathbb{R}$ как произведение функции $\frac{1}{T}\left|\frac{\sin\omega\xi}{\left(N+\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\omega\xi}{2\left(N+\frac{1}{2}\right)}}\right|$ на характеристическую функцию интервала $\left[-\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{T}{2},\ +\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{T}{2}\right]$. При N, стремящемся к бесконечности, она стремится к функции $\frac{2}{T}\left|\frac{\sin\omega\xi}{\omega\xi}\right|$, *интеграл от которой на* $\mathbb{R}$ *равен* $+\infty$. Положим $g_{m,n}=\inf(f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n)$, $n\geqslant m$, и $g_m=\lim_{n\to\infty}g_{m,n}$ (предел убывающей последовательности). Тогда $\lim_{m\to\infty}g_m=\frac{2}{T}\left|\frac{\sin\omega\xi}{\omega\xi}\right|$ — предел возрастающей последовательности. Согласно теореме Фату (теорема 36 гл. VI), интеграл $\int g_m$ при m, стремящемся к бесконечности, стремится к $+\infty$. Поскольку $f_n\geqslant g_m$ при $n\geqslant m$, то $\int f_n$ также стремится к $+\infty$, что противоречит неравенству (12). Таким образом, непрерывность функции φ не достаточна для обеспечения простой сходимости ряда Фурье.

С помощью теоремы Банаха — Штейнгауза в ее общей форме, приведенной в § 6 гл. VII (теорема 46), можно углубить этот результат. Теорема утверждает, что для B-почти каждой непрерывной комплексной функции f на Γ частные суммы $S_N(0;\,f)$ ряда Фурье неограничены. То же самое верно и для любой другой точки a из Γ. Но тогда, поскольку объединение счетного множества тощих множеств является тощим множеством, для счетного множества A из Γ для B-почти каждой непрерывной функции f на Γ суммы $S_N(a;\ f)$ не ограничены ни в одной точке a из A. A fortiori B-почти все функции f имеют расходящиеся ряды Фурье в каждой точке a множества A. Однако *вовсе не так просто привести пример функции f, обладающей этим свойством.* Если множество A плотно, то метод, указанный после теоремы 46 гл. VII, позволяет проверить, что каждая функция f, для которой суммы $S_N(a;\ f)$ не ограничены ни в одной точке a из A, будет также иметь неограниченные суммы $S_N(a;\ f)$ в B-почти каждой точке a из Γ: *B-почти все непрерывные функции имеют B-почти всюду расходящиеся ряды Фурье.* Запишем этот факт через кванторы: ($\exists\mathscr{F}$ — тощее множество в $C(\Gamma)$) ($\forall f \notin \mathscr{F}$) ($\exists B$ — тощее множество из $\mathbb{R}$): (ряд Фурье функции f расходится в каждой точке $\complement B$).

Поскольку каждое «B-почти всюду» множество из Γ имеет мощность континуума, существуют непрерывные периодические функции, множество точек расходимости ряда Фурье которых имеет мощность континуума. Однако это не означает, что множество точек расходимости имеет меру Лебега >0, поскольку «B-почти всюду» множество может иметь меру Лебега, равную нулю.

Неизвестно, существует ли непрерывная функция, ряд Фурье которой был бы всюду или почти всюду расходящимся.

Тот факт, что $\frac{1}{T}R_N$ сходятся к δ-функции, но не сходятся широко, является своего рода математической «осечкой» — более слабым результатом, чем можно было ожидать. Однако он явился источником многочисленных работ, способствовавших развитию многих ветвей анализа.

4°) Имеются примеры непрерывных функций, ряды Фурье которых сходятся всюду, но не равномерно.

5°) Мы видели, что если $f \in L^2(\Gamma;\ dx)$, то ряд Фурье функции f сходится к f в L^2[1]. Этот же результат сохраняется и для $f \in L^p$, $1 < p < +\infty$, но его доказательство не просто. Напротив, это утверждение не верно, если $p = 1$ или $+\infty$. Это следует из предыдущего для $p = \infty$ (поскольку если функция f непрерывна, то она принадлежит пространству L^∞, а суммы $S_N(f)$ не сходятся к f равномерно и, следовательно, не сходятся к f в L^∞).

Покажем это для случая $p = 1$. Согласно теореме Банаха—Штейнгауза, если для всякой функции $f \in L^1(\Gamma)$ суммы $S_N(f) = \frac{1}{T}R_N * f$ сходятся в L^1 к f, то операторы $\frac{1}{T}R_N *$, действую-

[1]) Это утверждение можно распространить на случай функций $\vec{f} \in L^2(\Gamma,\ dx;\ \vec{F})$, если только пространство $\vec{F}$ конечномерно. Для произвольного пространства $\vec{F}$ этого сделать нельзя.

щие из L^1 в L^1: $f \to \frac{1}{T} R_N * f$, имеют ограниченные в совокупности нормы $\left\|\frac{1}{T} R_N *\right\|$. Фиксируем N. Пусть ρ_j — последовательность непрерывных функций $\geqslant 0$ на Г, носители которых стягиваются к началу и интегралы от которых равны 1. Согласно примеру 1, приведенному после теоремы 67 гл. IV, меры $\rho_j\,dx$ широко сходятся при $j \to \infty$ к δ-функции на Г. Поэтому в силу следствия 3 теоремы 66 гл. IV, функции $\frac{1}{T} R_N * \rho_j$, определенные по формуле $x \to \frac{1}{T} \int\limits_\Gamma R_N(x-\xi)\,\rho_j(\xi)\,d\xi$, сходятся при $j \to \infty$ к $\frac{1}{T} R_N$ равномерно на Г. Тогда интеграл $\int\limits_\Gamma \left|\frac{1}{T} R_N * \rho_j\right|$ сходится к интегралу $\int\limits_\Gamma \left|\frac{1}{T} R_N\right|$. Далее,

$$\left\|\frac{1}{T} R_N *\right\| \geqslant \frac{\left\|\frac{1}{T} R_N * \rho_j\right\|_{L^1}}{\|\rho_j\|_{L^1}} = \int\limits_\Gamma \left|\frac{1}{T} R_N * \rho_j\right| \geqslant \int\limits_\Gamma \left|\frac{1}{T} R_N\right|. \tag{13_2}$$

Так как, согласно рассуждениям, приведенным после формулы (13), интегралы $\int\limits_\Gamma \left|\frac{1}{T} R_N\right|$ стремятся к $+\infty$ при $N \to \infty$, то мы приходим к противоречию. Здесь также, пользуясь понятием тощих множеств, можно показать, что B-почти все функции из $L^1(\Gamma)$ имеют ряд Фурье, расходящийся в L^1. Известен пример функции из $L^1(\Gamma)$, для которой ряд Фурье расходится в каждой точке.

Однако если функция $|f|\ln(1+|f|)$ интегрируема на Г, то можно показать, что ряд Фурье функции f сходится к f в $L^1(\Gamma;\ dx)$.

Локальное поведение функции и сравнение сходимости ряда Фурье и интеграла Фурье

Пусть $\vec{f}$ — интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция. Ее интеграл Фурье определяется по формуле (1). Вопрос о сходимости ряда Фурье к функции $\vec{f}$ заменяется здесь вопросом о справедливости формулы обращения Фурье в смысле главного значения Коши:

$$\vec{f}(a) = \lim_{L \to \infty} \int\limits_{-L}^{L} \vec{C}(\lambda;\ \vec{f})\, e^{2i\pi\lambda a}\, d\lambda. \tag{14}$$

Функция $\vec{C}$ непрерывна и, согласно теореме 1, на бесконечности стремится к $\vec{0}$, так что правая часть, вообще говоря, не обязательно имеет смысл. Если же она имеет смысл, то речь идет, вообще говоря, о неабсолютной сходимости. Здесь имеет место лишь сходимость в смысле главного значения Коши, поскольку мы рассматриваем $\lim\limits_{L\to\infty}\int\limits_{-L}^{+L}$, а не $\lim\limits_{A,\,B\to+\infty}\int\limits_{-A}^{+B}$. [Возможно, что равенство (14) справедливо, в то время как интегралы $\int\limits_{-\infty}^{0}$ и $\int\limits_{0}^{+\infty}$ расходятся.]

Вычисление правой части (14) несложно:

$$\sum_L(a;\vec{f})=\int\limits_{-L}^{+L}\vec{C}(\lambda;\vec{f})e^{2i\pi\lambda a}\,d\lambda=\int\limits_{-L}^{+L}e^{2i\pi\lambda a}\,d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{f}(x)e^{-2i\pi\lambda x}\,dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{f}(x)\,dx\int\limits_{-L}^{+L}e^{2i\pi\lambda(a-x)}\,d\lambda=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi L(a-x)}{a-x}\vec{f}(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi Lt}{t}\vec{f}(a-t)\,dt=\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{\pi}[\vec{f}(a+t)+\vec{f}(a-t)]\frac{\sin 2\pi Lt}{t}\,dt\,^{1)}. \tag{15}$$

Таким образом, мы пришли к интегралу Дирихле и теореме 2, но при условиях, еще более простых, чем в случае ряда Фурье, поскольку здесь нет множителя $\alpha(t)=\frac{\sin(\omega t/2)}{\omega/2}$, обязывавшего в формуле (9) применять вместо самой теоремы 2 следствие этой теоремы. Отсюда сразу вытекают следующие аналоги предыдущих теорем:

Теорема 4. *Если функция $\vec{f}$ интегрируема на $\mathbb{R}$, то сохраняется теорема 3 и оба ее следствия, где следует лишь заменить сходимость $\vec{S}_N$ сходимостью $\vec{\Sigma}_L$, равномерную сходи-*

---

[1]) Перестановка интегралов допустима, поскольку норма $\|\vec{f}(x)\|$ $(dx\otimes d\lambda)$-интегрируема на $\mathbb{R}\times[-L,+L]$ (теорема Фубини). (Напротив, эта норма не интегрируема на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Поэтому для интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{2i\pi\lambda(a-x)}\,d\lambda$ перестановка была бы необоснованной, и в общем случае, как мы уже говорили, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\vec{C}(\lambda)e^{2i\pi\lambda a}\,d\lambda$ как интеграл Лебега не имеет смысла, поскольку функция $\vec{C}$ не является $d\lambda$-интегрируемой.)

мость на A или $\mathbb{R}$ равномерной сходимостью на каждом компакте из A или из $\mathbb{R}$ [1]).

Кроме того, следствие теоремы 2 позволяет сравнивать ряды и интегралы Фурье от различных функций, совпадающих на некотором открытом множестве.

Теорема 5. *Пусть $\vec{f}$ — локально интегрируемая периодическая функция на $\mathbb{R}$ с периодом 1, и пусть $\vec{g}$ — интегрируемая функция на $\mathbb{R}$. Предположим, что функции $\vec{f}$ и $\vec{g}$ совпадают на окрестности A' некоторого компакта A из $\mathbb{R}$. Тогда разность $\vec{S}_N(\vec{f}) - \vec{\Sigma}_L(\vec{g})$ сходится к $\vec{0}$ равномерно на A при L и N, стремящихся к $+\infty$ так, что разность $|L-N|$ остается ограниченной.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \vec{S}_N(a; \vec{f}) &= \int_0^{1/2} \frac{1}{\pi} (\vec{f}(a+t) + \vec{f}(a-t)) \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)2\pi t}{(\sin \pi t)/\pi}\, dt, \\ \vec{\Sigma}_L(a; \vec{g}) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} (\vec{g}(a+t) + \vec{g}(a-t)) \frac{\sin 2\pi L t}{t}\, dt. \end{aligned} \tag{16}$$

Мы уже видели, что при a, изменяющемся на компакте, произведение функции $\frac{1}{\pi}(\vec{f}(a+t) + \vec{f}(a-t))$ на характеристическую функцию отрезка $[0, 1/2]$ и функция $(\vec{g}(a+t) + \vec{g}(a-t))/\pi$ пробегают компакты из $L^1(\mathbb{R}, dt; \vec{F})$. Если δ_0 — наименьшее расстояние между множествами A и $\complement A'$, то для каждого $a \in A$ они совпадают на отрезке $[0, \delta_0]$. Теперь достаточно применить следствие теоремы 2 при $\lambda = 2\pi L$, $\mu = 2\pi(N + 1/2)$ и функции $\alpha(t) = (\sin \pi t)/\pi$ на отрезке $[0, 1/2]$ и $\alpha(t) = \mathrm{const} \neq 0$ вне этого отрезка.

Замечание 1. Мы взяли функцию $\vec{f}$ периодической с периодом 1 потому, что в определении $\vec{\mathscr{C}}(\lambda; \vec{f})$ брались функ-

---

[1]) Это небольшое различие между рядом и интегралом Фурье вполне понятно. Если замкнутое множество A компактно на Γ или если замкнутое множество A периодически повторяется на $\mathbb{R}$, то равномерная сходимость периодических функций на каждом компакте из A влечет за собой их равномерную сходимость на A.

ции $e^{-2\pi i\lambda x}$ или $e^{-i\lambda\omega x}$ при $\omega=2\pi$, $2\pi/\omega=1$. Если же взять $\vec{f}$ с произвольным периодом T, то надо будет или изменить интеграл Фурье для функции $\vec{g}$, или же сохранить все по-прежнему, но считать, что разность $N-TL$ ограничена так, чтобы оставалась ограниченной величина $|\lambda-\mu|$ при $\lambda=\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega$ и $\mu=2\pi L$.

Замечание 2. Поскольку простая сходимость ряда или интеграла Фурье получалась из теоремы с не простым доказательством, то из нее почти всегда вытекают очень интересные формулы.

Например, формула $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$, играющая всюду весьма существенную роль, была получена в ходе доказательства теоремы 3 с использованием очевидной сходимости ряда Фурье для постоянной функции $f=1$. Теперь эту формулу можно рассматривать как формулу обращения Фурье, когда f представляет собой характеристическую функцию отрезка $\left[-\frac{1}{2\pi},\ +\frac{1}{2\pi}\right]$:

$$C(\lambda)=\int\limits_{-1/2\pi}^{+1/2\pi}e^{-2i\pi\lambda x}\,dx=\frac{\sin\lambda}{\pi\lambda}. \tag{17}$$

Формула обращения (14) при $a=0$ дает

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\pi\lambda}\,d\lambda \quad \text{или} \quad \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}\,d\lambda=\frac{\pi}{2}. \tag{18}$$