§ 2. Метод разделения переменных.

1. Мы уже встретились в § 1 с простейшим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{1}$$

Мы можем также записать его при помощи дифференциалов:

$$dy=f(x)\,dx. \tag{2}$$

Уравнение вида (1) [или (2)] мы назовём *дифференциальным уравнением первого порядка, не содержащим* (явно) *искомой функции*. Мы предполагаем, что функция $f(x)$ определена в некотором интервале $a<x<b$ и непрерывна во всякой внутренней точке этого интервала. В частности, может быть $a=-\infty$ или $b=\infty$, или одновременно $a=-\infty$, $b=\infty$.

В интегральном исчислении доказывается, что искомая функция $y(x)$, как примитивная по отношению к функции $f(x)$, даётся неопределённым интегралом (или определённым интегралом с переменным верхним пределом); доказывается также, что любая примитивная отличается от какой-нибудь определённой примитивной только на постоянное слагаемое. Таким образом, решение уравнения (1) [или (2)] есть

$$y=\int f(x)\,dx+C. \tag{3}$$

C есть произвольное постоянное, оно может принимать все значения, $-\infty<C<+\infty$; давая ему всевозможные численные значения, мы получим, согласно сказанному, все функции y, удовлетворяющие данному уравнению. Таким образом, выражение (3) представляет *общее решение* уравнения (1). Задаваясь определённым численным значением C, мы получаем *частное решение*. Все частные решения являются непрерывными и дифференцируемыми функциями от x во всём интервале $a<x<b$.

Для выяснения смысла произвольной постоянной в формуле (3) целесообразно написать неопределённый интеграл в виде определённого с переменным верхним пределом:

$$y=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C, \tag{3_1}$$

где x_0 — любая внутренняя точка интервала (a, b). Если дать переменному x значение x_0, то мы получим:

$$y(x_0)=C.$$

Обозначая через y_0 значение искомой функции при $x=x_0$, получаем вместо формулы (3_1):

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{3_2}$$

Таким образом, частное решение вполне определится, если задать начальное значение искомой функции, т. е. то значение, которое она должна принимать при некотором определённом (начальном) значении x_0 независимого переменного.

Итак, *начальные данные* (x_0, y_0) *определяют единственное решение уравнения* (1) *во всём интервале непрерывности правой части* $f(x)$. С геометрической точки зрения задание начальных значений есть задание некоторой точки плоскости xOy. Мы можем дать такое истолкование полученному результату: *через каждую точку полосы* $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ *плоскости* xOy *проходит единственная интегральная кривая уравнения* (1). Наконец, заметим, что формулы (3_1), (3_2) показывают, что любая интегральная кривая может быть получена из одной определённой, например из $y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$, путём переноса параллельно оси y на (положительный или отрицательный) отрезок $C = y_0$.

Пример 3. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$. Правая часть непрерывна в открытых интервалах $(0, \infty)$ и $(-\infty, 0)$. Для первого интервала имеем (при $x_0 > 0$)

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} + y_0 = \ln\frac{x}{x_0} + y_0;$$

это решение определено для всех x в интервале $0 < x < \infty$. Для второго интервала при начальном значении $x_0 < 0$ получаем:

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} + y_0 = \ln|x| - \ln|x_0| + y_0 = \ln\frac{x}{x_0} + y_0$$

— решение, определённое для значений $-\infty < x < 0$.

Пример 4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x = 0$. Разрешая относительно производной, получим два уравнения:

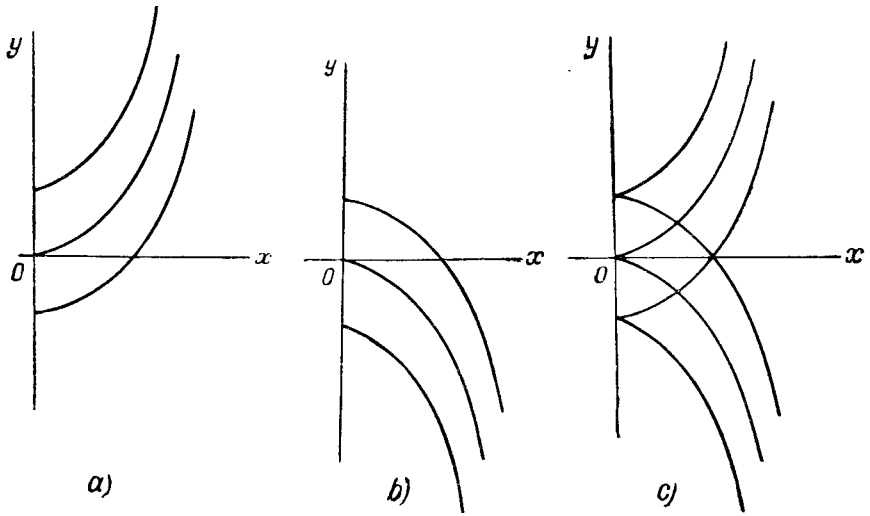
$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{x}, \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Интегрируем эти уравнения: $y = +\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$, $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$. Первое уравнение определяет семейство (от одного параметра) восходящих ветвей полукубической параболы, получаемых из одной, например $y = +\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, переносом параллельно оси y (черт. 2, *а*); аналогично второе уравнение определяет семейство нисходящих

ветвей (черт. 2, *b*). Очевидно, что через каждую точку полуплоскости $x \geqslant 0$, $-\infty < y < +\infty$ проходит одна и только одна интегральная кривая каждого уравнения.

Если бы мы интегрировали заданное уравнение, не разбивая его на два уравнения с однозначными правыми частями, мы получили бы семейство полных полукубических парабол; но тогда через каждую точку рассматриваемой области проходило бы по две интегральные кривые (черт. 2, *c*).

В очень многих случаях при заданной функции $f(x)$ мы не сумеем выразить входящий в решение (3) интеграл через элементарные функции. Тем не менее, мы будем считать, что задача интегрирования



Черт. 2.

уравнения (1) решена — «решение выражено в квадратурах». Эту «формальную» точку зрения мы будем проводить в значительной части настоящего курса — мы *будем считать, что умеем решать дифференциальное уравнение, если сумеем выразить общее решение при помощи квадратур*. Точно так же, *если решение получается в виде соотношения, определяющего y как неявную функцию x, мы будем считать решение известным, хотя бы и не умели в элементарных функциях явно выразить зависимость y от x*. Эта точка зрения, считающая задачу решённой, если она сведена к задаче одного из предшествующих отделов математики, хотя бы там не существовало элементарного решения соответствующей задачи, имеет, кроме чисто формального характера, и практическое обоснование: если не удаётся найти общего решения дифференциального уравнения, выраженного в знакомых нам элементарных функциях, то

приходится применять методы приближённого интегрирования этих уравнений. И оказывается, что приближённое нахождение квадратуры и приближённое решение конечного (т. е. не содержащего дифференциалов) уравнения, хотя бы не алгебраического, а трансцендентного, являются более лёгкими задачами, чем приближённое решение дифференциального уравнения.

2. Переходим ко второму типу уравнений первого порядка, тоже интегрируемых в квадратурах:

$$\frac{dy}{dx}=f(y) \tag{22}$$

или

$$dy=f(y)\,dx. \tag{22_1}$$

Говорят, что это *уравнение первого порядка, не содержащее* (явно) *независимого переменного.*

Мы опять предполагаем функцию $f(y)$ непрерывной в интервале $a<y<b$, где $a\geqslant-\infty$, $b\leqslant+\infty$. Для нахождения искомой функции $y=\varphi(x)$ допускаем, что для неё существует обратная функция $x=\psi(y)$ (мы, далее, докажем законность этого допущения). Принимая, таким образом, y за независимое переменное, а x — за искомую функцию, мы по свойству производной от обратной функции имеем:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(y)}. \tag{22_2}$$

Мы привели уравнение к уже рассмотренному типу. Но функция в правой части перестаёт быть непрерывной для тех значений y, которые обращают знаменатель в нуль. Поэтому ограничимся сначала рассмотрением интервала $\alpha<y<\beta$, внутри которого $f(y)$ не обращается в нуль. Выписав уравнение (22_2) в виде:

$$dx=\frac{dy}{f(y)},$$

мы имеем внутри указанного интервала:

$$x=\int\frac{dy}{f(y)}+C. \tag{23}$$

Вводя начальные значения x_0, y_0 ($-\infty<x_0<+\infty$, $\alpha<y_0<\beta$), мы решение (23) можем переписать в виде:

$$x=x_0+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{dy}{f(y)}. \tag{23_1}$$

Формулы (23) или (23_1) определяют x как функцию от y; теперь легко убедиться, что эта функция допускает обратную. В самом деле, в интервале (α, β) непрерывная функция $f(y)$ не обращается в нуль,

следовательно, сохраняет постоянный знак; тогда из формулы (23_1) видно, что $x-x_0$ есть монотонная функция от y, а непрерывная монотонная функция (не постоянная ни в каком интервале) всегда имеет (непрерывную и однозначную) обратную функцию. Итак, сделанное нами допущение оправдано.

Очевидно, что эта обратная функция $y=\varphi(x-x_0)$ удовлетворяет исходному уравнению (22). В силу доказанного для уравнений, не содержащих явно искомой функции, мы заключаем, что через каждую точку полосы $-\infty<x<+\infty$, $\alpha<y<\beta$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

Примечание. Если решение задаётся конечным уравнением, определяющим y как неявную функцию x, то такое уравнение называется *интегралом дифференциального уравнения*. Итак, соотношение (23) есть интеграл уравнения (22) или (22_2). Интеграл, как и решение, может быть общим и частным. Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка может быть записан в виде:

$$F(x,\ y,\ C)=0,$$

где C — произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь значения y, обращающие в нуль правую часть уравнения (22). Пусть уравнение

$$f(y)=0 \tag{24}$$

имеет корень y_0.

Мы непосредственно убеждаемся, что, подставляя $y=y_0$ в обе части уравнения (22), мы обращаем его в тождество. Следовательно, кроме решений, даваемых формулами (23) или (23_1), имеются ещё решения вида $y=y_0$ (интегральные кривые здесь суть прямые, параллельные оси Ox), где y_0 — любое значение, удовлетворяющее уравнению (24).

Через точки этих прямых $x=x_0$, $y=y_0$ иногда проходит только одна интегральная кривая — сама прямая $y=y_0$, иногда также и отличные от этой прямой интегральные кривые, — в последнем случае говорят, что в точке $(x_0,\ y_0)$ нарушается свойство единственности. Анализ этого вопроса мы проведём в главе III.

Пример 5. $\frac{dy}{dx}=y^2$. Имеем $dx=\frac{dy}{y^2}$; далее, по формуле (23_1)

$$x=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y^2}+x_0,\quad x-x_0=-\frac{1}{y}+\frac{1}{y_0},$$

$$y=\frac{1}{\frac{1}{y_0}-x+x_0}.$$

Это — общее решение; кроме того, существует частное решение $y=0$. Его можно получить при $y_0=0$ из преобразованной формулы

общего решения: $y=\frac{y_0}{1-y_0(x-x_0)}$, но легко видеть, что при $y_0=0$ промежуточные выкладки незаконны. Если применять формулу (23), то получим: $x=-\frac{1}{y}+C$, $y=-\frac{1}{x+C}$. Частное решение $y=0$ не получается из этого общего решения ни при каком значении C; можно было бы заметить, что это решение получается в пределе при $C\to\infty$; но C, как постоянная интеграции, есть определенное число; следовательно, и в этой форме решение $y=0$ не получается из формулы (23), дающей общее решение.

3. Уравнения вида:

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y), \tag{25}$$

в которых правая часть есть произведение функции только от x на функцию только от y, интегрируются следующим образом: мы «разделяем переменные», т. е. при помощи умножения и деления приводим уравнение к такой форме, чтобы в одну часть входила только функция от x и дифференциал x, а в другую часть — функция от y и dy. В данном случае надо умножить обе части уравнения на dx и разделить на $\varphi(y)$; мы получим:

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)\,dx. \tag{25_1}$$

Переменные разделены. Теперь рассуждаем так: вообразим, что нам известен y как функция x, являющаяся решением уравнения (25); тогда в обеих частях уравнения (25_1) стоят тождественно равные между собой дифференциалы; только в правой части этот дифференциал выражен непосредственно через независимое переменное x, а в левой части — через посредство y, являющегося функцией от x. Если дифференциалы равны, то их неопределённые интегралы могут различаться только постоянным слагаемым; мы можем интегрировать левую часть по y, а правую по x. Получим:

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)\,dx+C, \tag{26}$$

где C — произвольная постоянная.

Итак, в предположении, что y есть решение уравнения (25), мы получили соотношение (26), связывающее это решение y и независимое переменное x, т. е. получили общий интеграл уравнения (25). Если удаётся разрешить его относительно y, то получим (в явном виде) общее решение данного уравнения.

Посмотрим, при каких условиях формула (26) действительно определяет y как функцию (однозначную) от x в окрестности

точки $x=x_0$, $y=y_0$. Напишем интеграл в виде:

$$0=\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)}-\int_{x_0}^{x}f(x)\,dx\equiv\Psi(x,\,y;\,x_0,\,y_0)\text{ [1]}.$$

Очевидно, $\Psi(x_0,\,y_0;\,x_0,\,y_0)=0$. Далее

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=\frac{1}{\varphi(y_0)}.$$

Это выражение не обращается в 0; оно имеет смысл, если $\varphi(y_0)\neq 0$, — мы получили то же условие, что в разделе 2. Если для некоторого значения $y=y_0$ мы имеем $\varphi(y_0)=0$, то решением уравнения (25), кроме решений, данных формулой (26), будет также $y=y_0$.

Если уравнение задано в виде:

$$M(x)\,N(y)\,dx+P(x)\,Q(y)\,dy=0, \tag{27}$$

то для разделения переменных не нужно приводить его к виду (25), а достаточно разделить обе части на произведение тех множителей, которые содержат не то переменное, на дифференциал которого они умножаются, именно на $N(y)P(x)$. Разделяем переменные:

$$\frac{M(x)\,dx}{P(x)}+\frac{Q(y)\,dy}{N(y)}=0,$$

откуда получится общий интеграл:

$$\int\frac{M(x)\,dx}{P(x)}+\int\frac{Q(y)\,dy}{N(y)}=C.$$

Примечание. К этому виду уравнения применимо то же указание относительно значений, обращающих в нуль $N(y)$, что и в конце п. 2 (стр. 22); кроме того, функции $x=x_0$, соответствующие значениям x_0, обращающим в 0 функцию $P(x)$, удовлетворяют уравнению, заданному в дифференциальной форме (27), так как $dx_0=0$, $P(x_0)=0$. Если в уравнении (27) считать x и y равноправными, то прямые $x=x_0$ тоже следует причислить к решениям; если же строго придерживаться условия, что y есть искомая функция, а x — независимое переменное, то, конечно, равенство $x=x_0$ не даёт решения. В геометрических вопросах выгоднее считать x и y равноправными, т. е. при случае считать за независимое переменное то x, то y; в исследованиях теоретико-функционального характера (доказательство существования — см. в главе II), наоборот, всегда надо рассматривать y как функцию от x.

---

[1]) Знаком тождества мы пользуемся для введения нового обозначения рассматриваемой функции.

Пример 6. $x(y^2-1)\,dx+y(x^2-1)\,dy=0$. Разделяем переменные, для чего делим обе части уравнения на $(y^2-1)\,(x^2-1)$; получаем:

$$\frac{x\,dx}{x^2-1}+\frac{y\,dy}{y^2-1}=0.$$

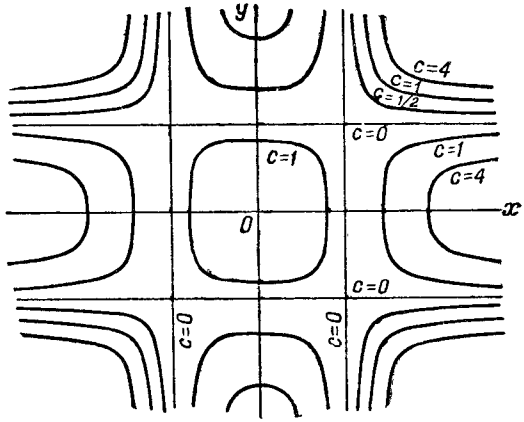
Интегрируем сумму двух дифференциалов:

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|C|,$$

или, потенцируя,

$$(x^2-1)(y^2-1)=C$$

(для простоты записи окончательного результата нам было удобно написать постоянную интеграции в виде $\ln|C|$). Общий вид семейства кривых, представляемого общим интегралом, показан на черт. 3. В частности, при $C=0$ получим 4 прямые: $x=\pm1$, $y=\pm1$, о которых шла речь в последнем примечании (значения $x=\pm1$ и $y=\pm1$ обращают в 0 знаменатели после разделения переменных); они не могли получиться из квадратуры, так как в ней получилась постоянная интеграции $\ln|C|$, так что $C\neq0$.



Черт. 3.

Рассмотрим теперь один пример на составление дифференциального уравнения.

Пример 7. Истечение жидкости из сосуда. В гидравлике выводится закон, по которому скорость v истечения воды из отверстия, находящегося на глубине h от свободной поверхности, даётся формулой:

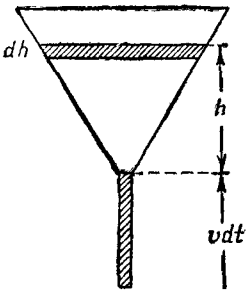
$$v=0{,}6\sqrt{2gh}\ \textit{см/сек},$$

где g — ускорение силы тяжести.

Пусть мы имеем коническую воронку, наполненную водой, высотой 10 *см*, с углом при вершине $\alpha=60°$; внизу находится отверстие площадью 0,5 *см*^{2} (черт. 4). Найти закон вытекания воды.

Искомая функция — высота воды h в любой момент времени t. Скорость истечения v всё время меняется вместе с h; но если взять бесконечно малый промежуток времени dt, то её можно считать

постоянной (мы отбрасываем бесконечно малое высшего порядка, отношение которого к dt стремится к нулю при $dt \to 0$). Подсчитаем двумя способами объём воды, вытекающей в промежуток времени от t до $t+dt$. С одной стороны, через отверстие вытечет объём, занимающий цилиндр с основанием 0,5 *см*² и высотой $v\,dt$; таким образом, искомый объём есть



Черт. 4.

$$-dV = -0{,}5v\,dt = -0{,}3\sqrt{2gh}\,dt.$$

С другой стороны, вследствие утечки воды высота h получит отрицательное приращение dh, дифференциал объёма вытекшей воды выразится так:

$$-dV = \pi r^2\,dh = \pi\,(h\,\mathrm{tg}\,30^\circ)^2\,dh = \frac{\pi}{3}h^2\,dh.$$

Приравнивая оба найденных выражения для $-dV$, получим дифференциальное уравнение, связывающее h и t:

$$\frac{\pi}{3}h^2\,dh = -0{,}3\sqrt{2g}\,h^{\frac{1}{2}}\,dt.$$

Это уравнение не содержит явно независимого переменного t, т. е. оно принадлежит ко второму типу; переменные разделяются:

$$dt = -\frac{\pi}{0{,}9\sqrt{2g}}\,h^{\frac{3}{2}}\,dh,$$

$$t = -\frac{\pi}{0{,}9\sqrt{2g}}\,\frac{2}{5}\,h^{\frac{5}{2}} + C \approx -0{,}0314\,h^{\frac{5}{2}} + C.$$

Произвольное постоянное C определится из начальных условий: при $t=0$ имеем $h=10$, отсюда $C \approx 0{,}0314 \cdot 10^{\frac{5}{2}}$, и искомое частное решение будет (разрешённое относительно t):

$$t \approx 0{,}0314\,(10^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}).$$

Если требуется узнать время t_1, в течение которого вытечет вся вода, то надо положить $h=0$; получим:

$$t_1 = 10^{\frac{5}{2}} \cdot 0{,}0314 \approx 10 \text{ сек.}$$

ЗАДАЧИ.

9. Исследовать закон истечения воды из полусферического сосуда высотой 1 *м*, с отверстием внизу площадью 1 *см*².

10. То же для цилиндрического резервуара с горизонтальной осью диаметра 1,5 *м*, длины 2 *м*; отверстие внизу имеет площадь 10 *см*².

11. Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству R радия. Найти зависимость R от t; составить дифференциальное уравнение и определить коэффициент пропорциональности из опытных данных, утверждающих, что через 1600 лет останется половина начального количества радия.

12. Определить кривые, для которых площадь, ограниченная осью абсцисс, дугою кривой от пересечения с осью абсцисс до переменной ординаты и этою последней, пропорциональна n-й степени длины ординаты ($n > 1$). Каков геометрический смысл произвольной постоянной?

13. Найти кривые, у которых отрезок касательной от точки прикосновения до пересечения с осью x равен постоянной величине a.

14. Найти кривые, у которых отрезок нормали от точки кривой до оси x есть постоянная величина a.

Проинтегрировать уравнения:

15. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,\dfrac{dy}{dx}=0$. Начальные условия: $x=0$, $y=1$.

16. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x\, dy = 0$.

17. $\sqrt{1-x^2}\, dy + \sqrt{1-y^2}\, dx = 0$.

§ 3. Однородные уравнения.

Основным методом настоящей главы является разделение переменных; мы изучим несколько типов уравнений, которые искусственными приёмами можно привести к уравнениям с разделяющимися переменными. Первым из этих типов будут однородные уравнения.

1. Уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

называется *однородным*, если $f(x, y)$ есть однородная функция своих аргументов нулевого измерения, т. е. имеет место тождество:

$$f(tx,\ ty)=f(x,\ y)\ ^{1)}. \tag{28}$$

Полагая в (28) $t=\dfrac{1}{x}$, получаем тождество:

$$f(x,\ y)=f\left(1,\ \frac{y}{x}\right).$$

Замечая, что в правой части стоит функция только одного аргумента $\dfrac{y}{x}$, и обозначая её через $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, мы видим, что однородное уравнение всегда можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{29}$$

---

[1]) По определению, $f(x, y)$ есть однородная функция n-го измерения, если выполняется тождество:

$$f(tx,\ ty)=t^n f(x,\ y);$$

при $n=0$ имеем:

$$f(tx,\ ty)=t^0 f(x,\ y)=f(x,\ y).$$