11. Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству R радия. Найти зависимость R от t; составить дифференциальное уравнение и определить коэффициент пропорциональности из опытных данных, утверждающих, что через 1600 лет останется половина начального количества радия.

12. Определить кривые, для которых площадь, ограниченная осью абсцисс, дугою кривой от пересечения с осью абсцисс до переменной ординаты и этою последней, пропорциональна n-й степени длины ординаты ($n > 1$). Каков геометрический смысл произвольной постоянной?

13. Найти кривые, у которых отрезок касательной от точки прикосновения до пересечения с осью x равен постоянной величине a.

14. Найти кривые, у которых отрезок нормали от точки кривой до оси x есть постоянная величина a.

Проинтегрировать уравнения:

15. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,\dfrac{dy}{dx}=0$. Начальные условия: $x=0$, $y=1$.

16. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\, dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x\, dy = 0$.

17. $\sqrt{1-x^2}\, dy + \sqrt{1-y^2}\, dx = 0$.

§ 3. Однородные уравнения.

Основным методом настоящей главы является разделение переменных; мы изучим несколько типов уравнений, которые искусственными приёмами можно привести к уравнениям с разделяющимися переменными. Первым из этих типов будут однородные уравнения.

1. Уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$$

называется *однородным*, если $f(x, y)$ есть однородная функция своих аргументов нулевого измерения, т. е. имеет место тождество:

$$f(tx,\ ty)=f(x,\ y)\ ^{1)}. \tag{28}$$

Полагая в (28) $t=\dfrac{1}{x}$, получаем тождество:

$$f(x,\ y)=f\left(1,\ \frac{y}{x}\right).$$

Замечая, что в правой части стоит функция только одного аргумента $\dfrac{y}{x}$, и обозначая её через $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, мы видим, что однородное уравнение всегда можно представить в виде:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{29}$$

---

[1]) По определению, $f(x, y)$ есть однородная функция n-го измерения, если выполняется тождество:

$$f(tx,\ ty)=t^n f(x,\ y);$$

при $n=0$ имеем:

$$f(tx,\ ty)=t^0 f(x,\ y)=f(x,\ y).$$

При произвольно заданной непрерывной функции φ переменные не разделяются. Но так как в правую часть переменные входят только в комбинации $\frac{y}{x}$, то можно ожидать, что уравнение упростится, если ввести новую искомую функцию

$$u = \frac{y}{x},$$

откуда

$$y = ux. \tag{30}$$

Вставляя выражение $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$ в уравнение (29), получаем:

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u), \text{ или } x\,du = [\varphi(u) - u]\,dx. \tag{30$_1$}$$

Переменные разделятся, если обе части разделить на $x[\varphi(u) - u]$; получим:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln x + C. \tag{31}$$

Если в этом выражении заменить u его значением $\frac{y}{x}$, то получим интеграл уравнения (29).

Примечание. При фактическом интегрировании однородного уравнения не обязательно приводить его к виду (29); достаточно убедиться в том, что уравнение принадлежит к рассматриваемому типу, и непосредственно применить подстановку (30); пользоваться готовой формулой (31) тоже нецелесообразно.

Если $\varphi(u) - u \equiv 0$, то уравнение имеет вид $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ и интегрируется разделением переменных (его общее решение: $y = Cx$). Если $\varphi(u) - u$ обращается в 0 при значении $u = u_0$, то кроме решений, даваемых формулой (31), существует также решение $u = u_0$ или $y = u_0 x$ (прямая, проходящая через начало координат).

Пример 8. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$. Уравнение однородное. Делаем подстановку: $y = ux$, $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$; уравнение примет вид:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{2u}{1 - u^2} \text{ или } x\frac{du}{dx} = \frac{u + u^3}{1 - u^2}.$$

Переменные разделяются:

$$\frac{dx}{x} + \frac{u^2 - 1}{u(u^2 + 1)}\,du = 0.$$

Разлагаем второе слагаемое на простые дроби и интегрируем обе части:

$$\ln x + \ln(u^2+1) - \ln u = \ln C, \text{ или } \frac{x(u^2+1)}{u} = C.$$

Подставляя значение $u = \frac{y}{x}$ и освобождаясь от знаменателя, находим: $x^2 + y^2 = Cy$ — семейство кругов, касающихся оси Ox в начале координат. Кроме того, решением является $y = 0$ [1]).

Примечание. Иногда уравнение можно привести к однородному заменой переменного $y = z^\alpha$ (α — постоянное). Это имеет место в том случае, когда в уравнении все члены оказываются одинакового измерения, если переменному x приписать измерение 1, переменному y — измерение α и производной $\frac{dy}{dx}$ — измерение $\alpha - 1$.

Пример 9. $9y\frac{dy}{dx} - 18xy + 4x^3 = 0$. Уравнение станет однородным, если положить $y = z^2$. Производя эту подстановку, получаем однородное уравнение:

$$9z^3\frac{dz}{dx} - 9xz^2 + 2x^3 = 0.$$

Обычная подстановка $z = ux$ даёт:

$$9u^3(u\,dx + x\,du) - 9u^2\,dx + 2\,dx = 0,$$

или

$$\frac{9u^3\,du}{9u^4 - 9u^2 + 2} + \frac{dx}{x} = 0;$$

ещё раз производим замену переменных $u^2 = v$; имеем:

$$\frac{9v\,dv}{9v^2 - 9v + 2} + \frac{2\,dx}{x} = 0, \text{ или } \frac{6\,dv}{3v-2} - \frac{3\,dv}{3v-1} + \frac{2\,dx}{x} = 0,$$

откуда $\frac{(3v-2)^2x^2}{3v-1} = C$, или, возвращаясь постепенно к начальным переменным,

$$\frac{(3u^2-2)^2x^2}{3u^2-1} = C, \quad \frac{(3z^2-2x^2)^2}{3z^2-x^2} = C, \quad \frac{(3y-2x^2)^2}{3y-x^2} = C.$$

---

[1]) Заметим, что в точках геометрического места $x^2 - y^2 = 0$ правая часть данного уравнения имеет разрыв; поскольку нас интересует геометрическая задача — расположение на плоскости интегральных кривых, мы можем в этих точках рассматривать уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-y^2}{2xy}$, у которого правая часть обращается в 0 на паре прямых $x^2 - y^2 = 0$. Таким образом, мы вправе считать, что данное уравнение определяет поле направлений и на этих прямых; направление касательных в точках этих прямых параллельно оси Oy. Поле направлений является неопределённым лишь в точке $x = 0$, $y = 0$.

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать уравнения:

18. $\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

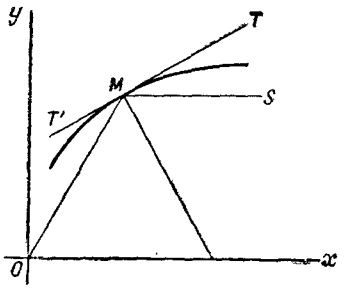
19. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x)$.

20. $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$.

21. $(y+x)\,dy=(y-x)\,dx$; начертить интегральные кривые.

22. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0$.

23. Составить (в декартовых координатах) уравнение кривых, касательная к которым образует постоянный угол α с радиус-вектором из начала координат; проинтегрировать это уравнение, в интеграл ввести полярные координаты.



Черт. 5.

24. Найти форму зеркала, собирающего параллельные лучи в одну точку.

Указание. Пусть лучи падают параллельно оси Ox справа (черт. 5); из соображений симметрии легко убедиться, что форма поверхности зеркала есть поверхность вращения. Примем плоскость xOy за меридианную плоскость этой поверхности; в сечении находится искомая кривая $y=f(x)$; дифференциальное уравнение получится, если приравняем тангенсы углов SMT и $T'MO$, выраженные через x, y, y' (угол падения равен углу отражения).

2. Уравнения, приводимые к однородным. Рассмотрим сначала уравнение:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1} \tag{32}$$

(a, b, ..., c_1 — данные постоянные).

Если $c=c_1=0$, то уравнение является однородным, и мы умеем его интегрировать. В общем случае постараемся свести это уравнение к однородному. Вводим новые переменные:

$$x=\xi+h,\quad y=\eta+k,$$

где h и k — пока ещё неопределённые постоянные; мы имеем:

$$dx=d\xi,\qquad dy=d\eta;$$

подставляем в уравнение (32):

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a\xi+b\eta+ah+bk+c}{a_1\xi+b_1\eta+a_1h+b_1k+c_1}.$$

Если теперь выбрать h и k как решения системы линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} ah+bk+c&=0,\\ a_1h+b_1k+c_1&=0,\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

то мы получим однородное уравнение:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{a\xi+b\eta}{a_1\xi+b_1\eta}.$$

В его интеграле надо заменить ξ через $x-h$, η через $y-k$, где h и k имеют вышеуказанные значения, и мы получим интеграл уравнения (32).

Система (33) не имеет решения, если определитель из коэффициентов при неизвестных равен нулю: $ab_1-a_1b=0$. Тогда изложенный здесь метод неприменим. Но, замечая, что в этом случае $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$ и, следовательно, уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}, \tag{34}$$

мы легко приведём его к виду с разделяющимися переменными, если введём новое переменное

$$z=ax+by;$$

тогда $\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}$, и уравнение (34) примет вид:

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx}-\frac{a}{b}=\frac{z+c}{\lambda z+c_1},$$

т. е. мы получаем уравнение, не содержащее явно x,— переменные разделяются.

ЗАДАЧА.

25. Проинтегрировать это уравнение до конца с буквенными коэффициентами.

Изложенный метод можно интерпретировать геометрически: в случае однородного уравнения числитель и знаменатель правой части уравнения (32), приравненные нулю, представляют две прямые, проходящие через начало координат; в общем случае эти прямые через начало координат не проходят. Подстановка состоит в том, что мы переносим начало координат в точку их пересечения; особый случай (34) соответствует параллельности этих прямых.

Примечание. Тот же метод, очевидно, применяется к значительно более общему классу уравнений:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),$$

где f — некоторая непрерывная функция своего аргумента.

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать уравнения:

26. $3y-7x+7=(3x-7y-3)\frac{dy}{dx}$.

27. $(x+2y+1)\dfrac{dy}{dx}=2x+4y+3.$

28. $\dfrac{dy}{dx}=2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

29. $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=a^2.$

3. Геометрические свойства семейства интегральных кривых. Рассмотрим уравнение, не содержащее явно y:

$$\frac{dy}{dx}=f(x). \tag{1}$$

Если в нём сделать замену переменного:

$$x_1=x, \quad y_1=y+C \tag{35}$$

(C — постоянное), то, так как $dx=dx_1$, $dy=dy_1$, уравнение перейдёт само в себя. Следовательно, если $F(x, y)=0$ есть частный интеграл уравнения (1), то $F(x_1, y_1)=0$, или

$$F(x, y+C)=0 \tag{36}$$

тоже будет интегралом при любом C.

Легко видеть, что, обратно, если общий интеграл дифференциального уравнения имеет вид (36), то исключение произвольного постоянного приведёт к уравнению вида (1). Преобразование (35) состоит геометрически в том, что все точки плоскости (x, y) переносятся на равную величину C параллельно оси y (*перенос*). Дифференциальное уравнение (1) допускает преобразование (35), т. е. поле направлений после такого переноса совпадает с первоначальным [так как линии $x=x_0$, параллельные оси Oy, являются изоклинами; в самом деле, угловой коэффициент $\dfrac{dy}{dx}$ на такой прямой имеет постоянное значение $f(x_0)$]. Ясно, что и семейство интегральных кривых переходит при переносе (35) само в себя, причём, однако, каждая отдельная кривая $F(x, y, C')=0$ переходит в другую кривую:

$$F(x, y, C'+C)=0\ ^{1)}.$$

---

[1]) Преобразования переноса образуют *группу преобразований*: совокупность преобразований образует группу, если результат двух последовательных преобразований данной совокупности представляет преобразование этой же совокупности. В нашем случае пусть первое преобразование будет $x_1=x$, $y_1=y+C_1$, второе преобразование $x_2=x_1$, $y_2=y_1+C_2$; их результат $x_2=x$, $y_2=y+C_1+C_2$ есть опять перенос на величину C_1+C_2. Указанный нами в отношении уравнения (1) факт можно сформулировать в общем случае так: если дифференциальное уравнение допускает группу преобразований, то семейство интегральных кривых допускает ту же группу. Преобразования переноса являются примером непрерывной однопараметрической группы преобразований.

Аналогично обстоит дело с уравнением типа

$$\frac{dy}{dx} = f(y). \tag{22}$$

Это уравнение допускает группу преобразований:

$$x_1 = x + C, \quad y_1 = y$$

(группа переносов параллельно оси x); ту же группу допускает семейство интегральных кривых; общий интеграл получается из частного заменой x на $x + C$.

Рассмотрим с этой точки зрения однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{29}$$

Оно допускает группу преобразований $x_1 = Cx$, $y_1 = Cy$, так как, очевидно, $\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x}$. Это — *преобразования подобия* (гомотетия) с центром подобия в начале координат; таким образом, все направления касательных поля одинаковы на каждой прямой, проходящей через начало; эти прямые являются изоклинами. Очевидно, что если частным интегралом уравнения (29) является $F(x, y) = 0$, то $F(Cx, Cy) = 0$ тоже будет интегралом (общим). Семейство интегральных кривых состоит из подобных и подобно расположенных кривых.

Далее, мы можем с новой точки зрения подойти к уже полученному методу интегрирования уравнения (29). Если за новые переменные взять $u = \frac{y}{x}$ и x, то группа преобразований напишется так:

$$u_1 = u,$$
$$x_1 = Cx,$$

или, наконец, вводя ещё переменное $\xi = \ln x$,

$$u_1 = u,$$
$$\xi_1 = \xi + C'$$

(мы положили $\ln C = C'$).

Мы получили в переменных u, ξ группу переносов (35), а это означает, что в новых переменных уравнение будет иметь вид:

$$\frac{d\xi}{du} = f(u);$$

оно не содержит явно ξ.

Так как нашей задачей в п. 1 было только разделить переменные, то замена $\xi = \ln x$ нам не понадобилась; мы в переменных x, u

привели однородное уравнение к виду:

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{du}=\psi(u)$$

с разделяющимися переменными.

Уравнения, приводимые к однородным, рассмотренные в п. 2, тоже допускают группу преобразований подобия, и центр подобия находится в точке пересечения прямых $ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$. И во многих других случаях знание непрерывной группы, допускаемой дифференциальным уравнением, позволяет привести это уравнение к квадратурам.

§ 4. Линейные уравнения.

1. *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение, линейное относительно искомой функции и её производной. Оно имеет вид:

$$A\frac{dy}{dx}+By+C=0,$$

где коэффициенты A, B, C — заданные непрерывные функции от x. Предполагая, что в некотором интервале изменения x коэффициент A не обращается в нуль, мы можем разделить все члены уравнения на этот коэффициент. Обыкновенно линейное уравнение пишут в виде:

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \tag{37}$$

(P, Q — заданные функции от x). Если, в частности, $Q\equiv 0$, то уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx}+Py=0. \tag{38}$$

Уравнение (38) называется *линейным однородным* (или без правой части), уравнение (37) — *неоднородным*. Однородное линейное уравнение (38) легко интегрируется разделением переменных и одной квадратурой:

$$\frac{dy}{y}=-P\,dx,\quad \ln|y|=-\int P\,dx+\ln|C|;$$

его общее решение[1]) —

$$y=Ce^{-\int P\,dx}. \tag{39}$$

---

[1]) Заметим, что частное решение $y=0$, соответствующее нулевому значению постоянного C, не получается из квадратуры.