

привели однородное уравнение к виду:

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{du} = \psi(u)$$

с разделяющимися переменными.

Уравнения, приводимые к однородным, рассмотренные в п. 2, тоже допускают группу преобразований подобия, и центр подобия находится в точке пересечения прямых $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. И во многих других случаях знание непрерывной группы, допускаемой дифференциальным уравнением, позволяет привести это уравнение к квадратурам.

§ 4. Линейные уравнения.

1. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно искомой функции и её производной. Оно имеет вид:

$$A \frac{dy}{dx} + By + C = 0,$$

где коэффициенты A , B , C — заданные непрерывные функции от x . Предполагая, что в некотором интервале изменения x коэффициент A не обращается в нуль, мы можем разделить все члены уравнения на этот коэффициент. Обыкновенно линейное уравнение пишут в виде:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad (37)$$

(P , Q — заданные функции от x). Если, в частности, $Q \equiv 0$, то уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0. \quad (38)$$

Уравнение (38) называется *линейным однородным* (или без правой части), уравнение (37) — *неоднородным*. Однородное линейное уравнение (38) легко интегрируется разделением переменных и одной квадратурой:

$$\frac{dy}{y} = -P dx, \quad \ln|y| = - \int P dx + \ln|C|;$$

его общее решение¹⁾ —

$$y = Ce^{-\int P dx}. \quad (39)$$

¹⁾ Заметим, что частное решение $y = 0$, соответствующее нулевому значению постоянного C , не получается из квадратуры.

Чтобы найти общее решение уравнения (37), в котором P обозначает ту же функцию, что и в уравнении (38), мы применим приём, называемый *вариацией постоянного*. Мы будем пытаться удовлетворить неоднородному уравнению (37) решением того же вида (39), но будем в этой формуле считать C не постоянным, а неизвестной функцией от x . Подставляя в этом предположении правую часть выражения (39) в уравнение (37), получаем:

$$\frac{dC}{dx} e^{-\int P dx} - CP e^{-\int P dx} + CP e^{-\int P dx} = Q,$$

или

$$\frac{dC}{dx} = Q e^{\int P dx}.$$

C найдётся из этого уравнения квадратурой:

$$C = \int Q e^{\int P dx} dx + C_1$$

(C_1 — произвольное постоянное).

Подставляя найденное значение C в выражение (39), получаем общее решение неоднородного линейного уравнения (37):

$$y = e^{-\int P dx} \left(C_1 + \int Q e^{\int P dx} dx \right). \quad (40)$$

Итак, *общее решение линейного уравнения первого порядка находится двумя квадратурами*.

Заметим, что решение (40) представляет сумму двух слагаемых: $C_1 e^{-\int P dx}$ есть общее решение однородного уравнения (38), соответствующего данному уравнению (37), т. е. получаемого из данного заменой правой части нулем; второе слагаемое, $e^{-\int P dx} \int Q e^{\int P dx} dx$, есть частное решение неоднородного уравнения (оно получается из общего, если положить $C_1 = 0$).

Покажем, что *знание одного частного решения линейного неоднородного уравнения позволяет привести его к однородному*. Пусть Y есть известное нам частное решение уравнения (37); введём новую искомую функцию z , связанную с y соотношением:

$$y = Y + z.$$

Подставляя в уравнение (37), находим:

$$\frac{dY}{dx} + \frac{dz}{dx} + PY + Pz = Q.$$

Но так как Y есть, по предположению, решение уравнения (37), мы имеем тождество: $\frac{dY}{dx} + PY = Q$; в силу этого тождества последнее уравнение примет вид:

$$\frac{dz}{dx} + Pz = 0.$$

Это — однородное линейное уравнение относительно z .

Таким образом, если известно одно частное решение неоднородного линейного уравнения, то общее решение находится одной квадратурой.

Если известно одно частное решение y_1 однородного линейного уравнения (38), то выражение Cy_1 также будет решением; оно содержит произвольное постоянное C , следовательно, это — общее решение. Итак, общее решение в этом случае находится без квадратур.

Посмотрим, что нам даёт знание двух частных решений неоднородного уравнения. Пусть эти решения будут Y_1 и Y_2 . Имеем тождества:

$$\frac{dY_1}{dx} + PY_1 = Q, \quad \frac{dY_2}{dx} + PY_2 = Q.$$

Вычитая их почленно, получим:

$$\frac{d(Y_2 - Y_1)}{dx} + P(Y_2 - Y_1) = 0.$$

Следовательно, $Y_2 - Y_1$ является частным решением линейного уравнения без правой части. Из предыдущего вытекает, что общее решение уравнения (37) напишется так:

$$y = Y_1 + C(Y_2 - Y_1).$$

При знании двух частных решений линейного уравнения с правой частью общее решение находится без квадратур.

Примечание 1. Уравнение (38) допускает группу преобразований $x_1 = x, y_1 = Cy$ (аффинная группа); все его интегральные кривые получаются из одной какой-нибудь растяжением или сжатием всех ординат в одном и том же отношении. Неоднородное уравнение (37) допускает преобразования $y_1 = y + Cz$, где z — частное решение однородного линейного уравнения; в самом деле,

$$\frac{dy_1}{dx} + Py_1 = \frac{dy}{dx} + Py + C\left(\frac{dz}{dx} + Pz\right) = \frac{dy}{dx} + Py.$$

Таким образом, если взять за новую функцию $u = \frac{y}{z}$, то группа преобразований уравнения (37) будет:

$$x_1 = x, u_1 = \frac{y_1}{z} = \frac{y + Cz}{z} = u + C.$$

Отсюда видно, что дифференциальное уравнение между u и x не будет содержать явно u и, следовательно, интеграция его приведётся к квадратуре. Если сравнить эту замену переменных с приведёнными выше выкладками, то окажется, что новая искомая функция u есть не что иное, как C , рассматриваемое как функция от x .

Примечание 2. К тем же вычислениям для интегрирования линейного неоднородного уравнения приводит такое рассуждение. Делаем в уравнении (37) замену искомой функции:

$$y = uv,$$

где u и v суть функции от x ; получаем:

$$u \frac{dv}{dx} + \left(Pu + \frac{du}{dx} \right) v = Q.$$

Определяем u таким образом, чтобы обратился в нуль коэффициент при v :

$$\frac{du}{dx} + Pu = 0, \text{ откуда } u = e^{-\int P dx}$$

(нам достаточно взять частное решение, поэтому мы положили $C = 1$). После этого v определяется квадратурой из уравнения: $u \frac{dv}{dx} = Q$; получается

$$v = \int u^{-1} Q dx + C.$$

Примечание 3. Общее решение линейного уравнения, как видно из формулы (40), имеет вид:

$$y = C\varphi(x) + \psi(x), \quad (40_1)$$

где C — произвольное постоянное, φ и ψ — определённые функции от x . Легко показать, исключая постоянное C , что всякое уравнение имеющее общее решение вида (40₁), есть линейное.

Примечание 4. Линейное уравнение (37) сохраняет свой вид при следующих преобразованиях переменных:

1) любое преобразование независимого переменного $x = \varphi(\xi)$, где φ — дифференцируемая функция; в самом деле, подставляя в уравнение (37), получаем:

$$\frac{dy}{d\xi} + P[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi)y = Q[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi)$$

— опять линейное уравнение;

2) любое линейное преобразование зависимого переменного $y = \alpha(x)z + \beta(x)$, где α и β — произвольные дифференцируемые функции от x , $\alpha(x) \neq 0$, в рассматриваемом интервале. В самом деле, совершив преобразование, получаем:

$$\frac{dz}{dx} + \left(\frac{\alpha'}{\alpha} + P \right) z = \frac{Q - P\beta - \beta'}{\alpha},$$

т. е. снова линейное уравнение.

2. К линейному уравнению преобразованием искомой функции легко приводится *уравнение Бернулли*¹⁾:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n. \quad (41)$$

Здесь P, Q — заданные непрерывные функции x , а n — некоторое постоянное число. При $n = 0$ имеем неоднородное линейное уравнение, при $n = 1$ имеем:

$$\frac{dy}{dx} + (P - Q)y = 0$$

— однородное линейное дифференциальное уравнение. Итак, будем предполагать $n \neq 0, \neq 1$. Разделив обе части уравнения (41) на y^{n-2} , получим:

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + Py^{-n+1} = Q.$$

Легко заметить, что первый член с точностью до постоянного коэффициента равен производной от множителя при P , т. е. от y^{-n+1} ; поэтому введём новую функцию:

$$z = y^{-n+1},$$

тогда

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n} \frac{dy}{dx}.$$

Умножая обе части уравнения на $(-n+1)$ и вводя значения z и $\frac{dz}{dx}$, получим для z линейное уравнение (неоднородное):

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)Pz = (-n+1)Q.$$

Подставив в него общее решение вместо z выражение y^{-n+1} , получим общий интеграл уравнения Бернулли; он легко разрешается относительно y . При $n > 0$ мы имеем ещё решение $y = 0$.

ЗАДАЧА.

80. Написать формулы общего интеграла и общего решения уравнения Бернулли.

Пример 10. Проинтегрировать уравнение Бернулли:

$$x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 \sqrt{-y}.$$

¹⁾ Уравнение это предложено Яковом Бернулли в 1695 г., метод решения опубликован Иваном Бернулли в 1697 г.

²⁾ Мы предполагаем, что $y \neq 0$.

Здесь $n = \frac{1}{2}$. Делим обе части на $x\sqrt{y}$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} \sqrt{y} = x.$$

Вводим новое переменное:

$$z = \sqrt{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx}.$$

Представляем в уравнение:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Решаем однородное линейное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x}, \quad \ln z = 2 \ln x + \ln C, \quad z = Cx^2.$$

Применяем вариацию постоянной:

$$\frac{dz}{dx} = 2Cx + x^2 \frac{dC}{dx};$$

вставляем в неоднородное уравнение:

$$2Cx + x^2 \frac{dC}{dx} - \frac{2Cx^2}{x} = \frac{x}{2},$$

или

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{2x}, \quad C = \frac{1}{2} \ln x + C_1.$$

Следовательно,

$$z = x^2 \left(C_1 + \frac{1}{2} \ln x \right)$$

и, наконец,

$$y = x^4 \left(C_1 + \frac{1}{2} \ln x \right)^2.$$

Пример 11. В физике устанавливается следующая связь между силой тока i и электродвижущей силой E в цепи, имеющей сопротивление R и самоиндукцию L (R и L — постоянные):

$$E = Ri + L \frac{di}{dt}.$$

Если рассматривать E как заданную функцию от t , то это — линейное дифференциальное уравнение для силы тока i . Напишем его в виде:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L}. \tag{42}$$

Проинтегрируем уравнение (42) в предположении $E = \text{const.}$, при начальном условии $i = 0$ при $t = 0$ (включение в цепь, в которой не было тока, постоянной электродвижущей силы). Интеграция однородного линейного уравнения даёт:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt, \quad i = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Вместо вариации постоянной перейдём к общему решению уравнения (42), угадав его частное решение в виде некоторой постоянной A ; подставив её в уравнение, получим:

$$\frac{R}{L}A = \frac{E}{L}, \quad A = \frac{E}{R}.$$

Итак, общее решение уравнения (42) в нашем предположении есть

$$i = \frac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Определим C из начального условия при $t = 0$:

$$0 = \frac{E}{R} + C, \quad C = -\frac{E}{R}.$$

Искомое частное решение будет:

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right).$$

При $t = 0$ сила тока равна 0, а затем быстро приближается к постоянному значению $\frac{E}{R}$ (процесс установления постоянного тока).

ЗАДАЧИ.

31. Проинтегрировать уравнение (42) в случае периодически изменяющейся электродвижущей силы:

$$E = E_0 \sin \omega t \quad (\text{переменный ток}).$$

Проинтегрировать уравнения:

32. $\cos x \frac{dy}{dx} = y \sin x + \cos^2 x.$

33. $\frac{dy}{dx} + y \frac{d\varphi}{dx} = \varphi(x) \frac{d\varphi}{dx}$ (φ — данная функция x).

34. $\frac{dy}{dx} = 2xy - x^3 + x.$

35. $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{1}{x(1+x^2)}.$

36. $(x - 2yx - y^2) dy + y^2 dx = 0.$

37. $xy' + y = xy^2 \ln x.$

38. $y' - \frac{xy}{x^2 - 1} - \frac{x}{2y} = 0$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку $x = 0, y = 1$.

39. $\frac{dy}{dx} (x^2 y^3 + xy) = 1$.

40. $(x - y^2) dx + 2xy dy = 0$.

§ 5. Уравнение Якоби.

К числу уравнений первого порядка, общее решение которых выражается в элементарных функциях, относится *уравнение Якоби*. Оно имеет вид:

$$(Ax + By + C) dx + (A'x + B'y + C') dy + (A''x + B''y + C'') (x dy - y dx) = 0, \quad (43)$$

где A, B, \dots, C'' — постоянные.

Если его написать в форме:

$$M dx + N dy = 0,$$

то M и N окажутся многочленами второго порядка по x, y , причём члены второго порядка в выражении для M имеют вид:

$$-A''xy - B''y^2,$$

а в выражении N они будут:

$$A''x^2 + B''xy.$$

Для исследования¹⁾ уравнения Якоби удобно ввести новые переменные, соответствующие однородным координатам аналитической геометрии:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Тогда

$$dx = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3^2}, \quad dy = \frac{x_3 dx_2 - x_2 dx_3}{x_3^2}, \quad x dy - y dx = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_3^2}.$$

Вставляя эти значения переменных и дифференциалов в уравнение (43), мы можем написать его в виде:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} = 0, \quad (44)$$

где

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad b_x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \quad c_x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

суть линейные формы относительно однородных координат.

Чтобы возвратиться к декартовым координатам, достаточно положить $x_3 = 1$.

¹⁾ Приводимый здесь метод исследования уравнения Якоби принадлежит Д. Ф. Егорову, неоднократно излагавшему этот метод на своих лекциях в Московском университете.