

38. $y' - \frac{xy}{x^2 - 1} - \frac{x}{2y} = 0$. Найти интегральную кривую, проходящую через точку $x = 0, y = 1$.

39. $\frac{dy}{dx} (x^2 y^3 + xy) = 1$.

40. $(x - y^2) dx + 2xy dy = 0$.

§ 5. Уравнение Якоби.

К числу уравнений первого порядка, общее решение которых выражается в элементарных функциях, относится *уравнение Якоби*. Оно имеет вид:

$$(Ax + By + C) dx + (A'x + B'y + C') dy + (A''x + B''y + C'') (x dy - y dx) = 0, \quad (43)$$

где A, B, \dots, C'' — постоянные.

Если его написать в форме:

$$M dx + N dy = 0,$$

то M и N окажутся многочленами второго порядка по x, y , причём члены второго порядка в выражении для M имеют вид:

$$-A''xy - B''y^2,$$

а в выражении N они будут:

$$A''x^2 + B''xy.$$

Для исследования¹⁾ уравнения Якоби удобно ввести новые переменные, соответствующие однородным координатам аналитической геометрии:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Тогда

$$dx = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3^2}, \quad dy = \frac{x_3 dx_2 - x_2 dx_3}{x_3^2}, \quad x dy - y dx = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_3^2}.$$

Вставляя эти значения переменных и дифференциалов в уравнение (43), мы можем написать его в виде:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_x & b_x & c_x \end{vmatrix} = 0, \quad (44)$$

где

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad b_x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3, \quad c_x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

суть линейные формы относительно однородных координат.

Чтобы возвратиться к декартовым координатам, достаточно положить $x_3 = 1$.

¹⁾ Приводимый здесь метод исследования уравнения Якоби принадлежит Д. Ф. Егорову, неоднократно излагавшему этот метод на своих лекциях в Московском университете.

Введём новые координаты x'_1, x'_2, x'_3 , связанные с первоначальными координатами линейными преобразованиями:

$$\left. \begin{array}{l} \rho x'_1 = \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \gamma_{13}x_3, \\ \rho x'_2 = \gamma_{21}x_1 + \gamma_{22}x_2 + \gamma_{23}x_3, \\ \rho x'_3 = \gamma_{31}x_1 + \gamma_{32}x_2 + \gamma_{33}x_3, \end{array} \right\} \quad (45)$$

где γ_{ik} — постоянные с определителем $\neq 0$, а ρ — любая функция от x_i .

Преобразование (45) эквивалентно дробно-линейному преобразованию координат x и y в новые координаты $x' = \frac{x'_1}{x'_3}, y' = \frac{x'_2}{x'_3}$. Покажем, что при

таком преобразовании уравнение Якоби переходит в уравнение того же типа. Положим сначала $\rho = 1$. Умножая определитель, стоящий в левой части уравнения (44), на определитель из γ_{ik} (строки на строки), в первой строке определителя получим, очевидно, dx'_1, dx'_2, dx'_3 , во второй x'_1, x'_2, x'_3 , в третьей — три линейные формы от x_1, x_2, x_3 , которые преобразуются в линейные формы $a'_{x'}, b'_{x'}, c'_{x'}$ от x'_1, x'_2, x'_3 ; в результате получаем:

$$\begin{vmatrix} dx'_1 & dx'_2 & dx'_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ a'_{x'} & b'_{x'} & c'_{x'} \end{vmatrix} = 0, \quad (44')$$

т. е. опять уравнение типа Якоби. Если теперь заменить x'_1, x'_2, x'_3 на $\rho x'_1, \rho x'_2, \rho x'_3$, где $\rho \neq 0$ есть функция от x_i , то во второй и третьей строках ρ выйдет общим множителем, а в первой строке будем иметь:

$$\rho dx'_1 + x'_1 d\rho, \quad \rho dx'_2 + x'_2 d\rho, \quad \rho dx'_3 + x'_3 d\rho;$$

но если из членов первой строки вычесть члены второй, умноженные на $d\rho$, то вторые слагаемые исчезнут; ρ выйдет общим множителем, и мы опять получим уравнение (44'). Таким образом, уравнение (44') связывает не самые переменные x_1, x_2, x_3 , а их отношения, — оно эквивалентно уравнению (43).

Уравнение Якоби допускает частные линейные интегралы. Напишем линейное соотношение в однородных координатах:

$$\Sigma u_i x_i \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0 \quad (46)$$

и потребуем, чтобы оно удовлетворяло уравнению (44). Умножая первый и второй столбцы определителя в левой части (44) на u_1, u_2 и прибавляя к третьему, умноженному на u_3 , получаем:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & \Sigma u_i dx_i \\ x_1 & x_2 & \Sigma u_i x_i \\ a_x & b_x & u_1 a_x + u_2 b_x + u_3 c_x \end{vmatrix} = 0.$$

Замечая ещё, что, в силу равенства (46), $\Sigma u_i dx_i = 0$, мы приходим к условию:

$$(u_1 a_x + u_2 b_x + u_3 c_x) (x_2 dx_1 - x_1 dx_2) = 0.$$

Но так как x_1, x_2, x_3 совершенно равноправны, мы можем получить два таких же равенства со вторыми множителями: $x_3 dx_2 - x_2 dx_3, x_1 dx_3 - x_3 dx_1$. Замечая, что все эти множители одновременно не равны нулю, мы приходим

к заключению, что всякий раз, когда выполняется (46), $u_1a_x + u_2b_x + u_3c_x = 0$, а тогда, как легко видеть, обе линейные формы пропорциональны, т. е. имеем тождественно:

$$u_1a_x + u_2b_x + u_3c_x = \lambda(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)$$

(λ — множитель пропорциональности).

Подставляя вместо a_x , b_x , c_x их выражения через x_1 , x_2 , x_3 и приравнивая в получающемся тождестве коэффициенты при x_1 , x_2 , x_3 , получаем три однородных уравнения для определения u_1 , u_2 , u_3 :

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda)u_1 + b_1u_2 + c_1u_3 = 0, \\ a_2u_1 + (b_2 - \lambda)u_2 + c_2u_3 = 0, \\ a_3u_1 + b_3u_2 + (c_3 - \lambda)u_3 = 0. \end{cases} \quad (47)$$

Чтобы система (47) имела отличные от нуля решения, определитель этой системы должен быть равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Мы получили для λ кубическое уравнение. Если оно имеет три различных действительных корня λ_1 , λ_2 , λ_3 , то из уравнения (47) получится три различных решения u_1 , u_2 , u_3 , т. е. уравнение Якоби допускает в качестве интегральных три прямые. Пусть их уравнения будут:

$$\begin{aligned} u_x &\equiv u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \\ v_x &\equiv v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0, \\ w_x &\equiv w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 = 0. \end{aligned}$$

Возьмём эти прямые за оси новой трилинейной системы координат, новые координаты опять будем обозначать через x_1 , x_2 , x_3 . Уравнение (44) допускает, по предположению, решения: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Подставляя в (44) первое решение и требуя, чтобы оно обращало уравнение (44) в тождество, найдём:

$$a_2 = a_3 = 0.$$

Аналогично учитывая, что $x_2 = 0$ есть решение, получим $b_1 = b_3 = 0$, а из решения $x_3 = 0$ получим $c_1 = c_2 = 0$ (здесь a_1, \dots, c_3 — соответствующие коэффициенты в новых координатах).

Уравнение Якоби приведётся тогда к виду:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1x_1 & b_2x_2 & c_3x_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{x_1} & \frac{dx_2}{x_2} & \frac{dx_3}{x_3} \\ 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(c_3 - b_2) \frac{dx_1}{x_1} + (a_1 - c_3) \frac{dx_2}{x_2} + (b_2 - a_1) \frac{dx_3}{x_3} = 0.$$

Общий его интеграл в однородных координатах, очевидно, есть

$$x_1^{c_3 - b_2} x_2^{a_1 - c_3} x_3^{b_2 - a_1} = C,$$

или, переходя к старым трилинейным координатам,

$$(u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3)^\alpha (v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3)^\beta (w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3)^\gamma = C,$$

причём

$$\alpha + \beta + \gamma = (c_3 - b_2) + (a_1 - c_3) + (b_2 - a_1) = 0.$$

Поэтому в декартовых координатах общее решение будет иметь вид:

$$(u_1x + u_2y + u_3)^\alpha (v_1x + v_2y + v_3)^\beta (w_1x + w_2y + w_3)^\gamma = C.$$

Можно аналогично исследовать все остальные случаи — один действительный и два мнимых корня, и ряд случаев для кратных корней. Не останавливаясь на этом, дадим метод, который позволяет всегда проинтегрировать уравнение Якоби. Кубическое уравнение для λ имеет всегда один действительный корень; следовательно, уравнение Якоби имеет, по крайней мере, одну интегральную прямую. Пусть её уравнение будет:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Сделаем замену переменных:

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3;$$

если $u_3 \neq 0$, то определитель этой подстановки не равен 0 (если бы было $u_3 = 0$, а, например $u_1 \neq 0$, то мы положили бы $x'_1 = u_x$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$). Преобразуем уравнение (44), умножая первый и второй столбцы на u_1 , u_2 и складывая с третьим, умноженным на u_3 ; новое уравнение будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} dx'_1 & dx'_2 & dx'_3 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ a'_{x'} & b'_{x'} & c'_{x'} \end{vmatrix} = 0.$$

Подобно предыдущему, убеждаемся, что $c'_{x'} = c'_3 x'_3$. Затем переходим к декартовым координатам, полагая $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$, $x'_3 = 1$; геометрически это значит, что мы совершаем преобразование, переводящее интегральную прямую $u_x = 0$ в бесконечно удалённую прямую плоскости $x'y'$. Уравнение Якоби примет вид:

$$dx' (c'_3 y' - b'_1 x' - b'_2 y' - b'_3) - dy' (c'_3 x' - a'_1 x' - a'_2 y' - a'_3) = 0,$$

т. е. мы получили уравнение, приводимое к однородному, которое интегрируется в квадратурах.

Если не переходить к однородным координатам, то правило интегрирования уравнения Якоби можно сформулировать так: находим один линейный интеграл уравнения (44):

$$u_1x + u_2y + u_3 = 0;$$

вводим новые переменные:

$$x' = \frac{x}{u_1x + u_2y + u_3}, \quad y' = \frac{y}{u_1x + u_2y + u_3};$$

преобразованное уравнение в переменных x' , y' будет вида, приводимого к однородному.

Пример 12.

$$(14x + 13y + 6)dx + (4x + 5y + 3)dy + (7x + 5y)(ydx - xdy) = 0.$$

Вводим однородные координаты:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}, \quad dx = \frac{x_3 dx_1 - x_1 dx_3}{x_3^2}, \quad dy = \frac{x_3 dx_2 - x_2 dx_3}{x_3^2},$$

$$ydx - xdy = \frac{x_2 dx_1 - x_1 dx_2}{x_3^2}.$$

Уравнение в форме определителя напишется так:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 & -14x_1 - 13x_2 - 6x_3 & 7x_1 + 5x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение для определения λ будет:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -14 & 7 \\ 5 & -13 - \lambda & 5 \\ 3 & -6 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27 = 0.$$

Все его корни равны: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$.

Уравнения (47) для определения u_1 , u_2 , u_3 примут вид:

$$7u_1 - 14u_2 + 7u_3 = 0, \quad 5u_1 - 10u_2 + 5u_3 = 0, \quad 3u_1 - 6u_2 + 3u_3 = 0,$$

т. е. все сводятся к одному:

$$u_1 - 2u_2 + u_3 = 0.$$

Вместо одной интегральной прямой мы получаем целый пучок интегральных прямых, так как одного уравнения недостаточно для определения двух отношений $\frac{u_1}{u_3}$, $\frac{u_2}{u_3}$. Выражая u_3 через u_1 и u_2 и вставляя в уравнение $u_x = 0$, мы получим уравнение пучка:

$$u_1(x_1 - x_3) + u_2(x_2 + 2x_3) = 0$$

(u_1 , u_2 — однородные параметры пучка).

Здесь нет необходимости делать дальнейшие подстановки, так как уравнение пучка содержит одно (существенное) постоянное (за которое можно принять $-\frac{u_2}{u_1}$) и, следовательно, является общим интегралом уравнения. В декартовых координатах этот интеграл имеет вид:

$$x - 1 = C(y + 2).$$

Пример 13.

$$(7x + 8y + 5)dx - (7x + 8y)dy + 5(x - y)(ydx - xdy) = 0.$$

Вводим однородные координаты и приводим к виду:

$$\begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ -7x_1 - 8x_2 & -7x_1 - 8x_2 - 5x_3 & 5x_1 - 5x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение для λ будет:

$$\begin{vmatrix} -7 - \lambda & -7 & 5 \\ -8 & -8 - \lambda & -5 \\ 0 & -5 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^3 + 15\lambda^2 - 25\lambda - 375 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = -15$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = 5$. Находим формы u_x , v_x , w_x . Имеем для u_1 , u_2 , u_3 уравнения (соответствующие λ_1):

$$8u_1 - 7u_2 + 5u_3 = 0, \quad -8u_1 + 7u_2 - 5u_3 = 0, \quad -5u_2 + 15u_3 = 0,$$

из которых только два независимых; одной из систем их решений будет

$$u_1 = 2, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 1.$$

Аналогично для v_1 , v_2 , v_3 имеем (корень λ_2):

$$-2v_1 - 7v_2 + 5v_3 = 0, \quad -8v_1 - 3v_2 - 5v_3 = 0, \quad -5v_2 + 5v_3 = 0;$$

система решений:

$$v_1 = -1, \quad v_2 = 1, \quad v_3 = 1;$$

наконец, для w_1 , w_2 , w_3 имеем:

$$-12w_1 - 7w_2 + 5w_3 = 0, \quad -8w_1 - 13w_2 - 5w_3 = 0, \quad -5w_2 - 5w_3 = 0,$$

откуда решения:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = -1, \quad w_3 = 1.$$

Итак,

$$u_x = 2x_1 + 3x_2 + x_3, \quad v_x = -x_1 + x_2 + x_3, \quad w_x = x_1 - x_2 + x_3.$$

Вводя в уравнение переменные u , v , w , определённые этими формулами, получаем:

$$\begin{vmatrix} du & dv & dw \\ u & v & w \\ -15u & -5v & 5w \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\frac{du}{u} (5 + 5) + \frac{dv}{v} (-15 - 5) + \frac{dw}{w} (-5 + 15) = 0$$

и интегрируя:

$$uw = Cv^2,$$

или, возвращаясь к первоначальным переменным,

$$(2x + 3y + 1)(x - y + 1) = C(-x + y + 1)^2.$$