

## § 6. Уравнение Риккати.

В заключение этой главы мы рассмотрим ещё один тип уравнений первого порядка. В противоположность ранее разобранным типам, в настоящем случае решение уравнения не может быть вообще выражено в квадратурах. Тем не менее, мы будем говорить о решениях этого уравнения, как о существующих, так как в следующей главе существование решений дифференциального уравнения будет доказано.

1. Общее *уравнение Риккати* имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \quad (48)$$

где  $P, Q, R$  — непрерывные функции от  $x$  при изменении  $x$  в интервале  $a < x < b$  ( $a \geq -\infty, b \leq \infty$ ). Уравнение (48) заключает в себе как частные случаи уже рассмотренные нами уравнения: при  $P \equiv 0$  получаем линейное уравнение, при  $R \equiv 0$  — уравнение Бернулли.

Уравнение Риккати сохраняет свой вид при следующих преобразованиях переменных:

1) Произвольное преобразование независимого переменного:

$$x = \varphi(x_1)$$

( $\varphi$  — дифференцируемая функция). В самом деле, производя в уравнении (48) эту замену переменного, получим опять уравнение Риккати:

$$\frac{dy}{dx_1} = P[\varphi(x_1)]\varphi'(x_1)y^2 + Q[\varphi(x_1)]\varphi'(x_1)y + R[\varphi(x_1)]\varphi'(x_1).$$

2) Произвольное дробно-линейное преобразование зависимого переменного:

$$y = \frac{\alpha y_1 + \beta}{\gamma y_1 + \delta},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — произвольные дифференцируемые функции от  $x$ , удовлетворяющие условию  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  в рассматриваемом интервале. В самом деле, дифференцируя, получаем (штрихи обозначают производные по  $x$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\left(\alpha \frac{dy_1}{dx} + \alpha' y_1 + \beta'\right)(\gamma y_1 + \delta) - \left(\gamma \frac{dy_1}{dx} + \gamma' y_1 + \delta'\right)(\alpha y_1 + \beta)}{(\gamma y_1 + \delta)^2} = \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{dy_1}{dx} + (\alpha'\gamma - \gamma'\alpha) y_1^2 + (\alpha'\delta + \beta'\gamma - \alpha\delta' - \beta\gamma') y_1 + (\beta'\delta - \delta'\beta)}{(\gamma y_1 + \delta)^2}. \end{aligned}$$

Подстановка же в правую часть уравнения (48) даёт дробь с тем же знаменателем и с квадратным многочленом по  $y_1$  в числителе. Очевидно, получается уравнение типа Риккати.

Этими преобразованиями можно воспользоваться для приведения уравнения к наиболее простому (каноническому) виду.

1) *Коэффициент при квадрате зависимого переменного можно сделать равным  $\pm 1$ .* Для этого в уравнении (48) произведём (линейную) замену искомой функции:

$$y = \omega(x)z,$$

где  $\omega$  — пока неизвестная функция. Подставляя в уравнение (48), получаем:

$$\omega \frac{dz}{dx} + z\omega' = P\omega^2 z^2 + Q\omega z + R,$$

или

$$\frac{dz}{dx} = P\omega z^2 + \left(Q - \frac{\omega'}{\omega}\right)z + \frac{R}{\omega}.$$

Если теперь взять  $\omega = \pm \frac{1}{P}$ , то уравнение примет вид:

$$\frac{dz}{dx} = \pm z^2 + \left(Q - \frac{P'}{P}\right)z \pm PR.$$

(Замена годится для интервала изменения  $x$ , в котором  $P$  не обращается в нуль.)

2) *Не изменяя коэффициента при квадрате зависимого переменного, можно коэффициент при первой степени зависимого переменного сделать равным 0.* Для этого введём в уравнение (48) новое зависимое переменное  $u$  и подстановкой:

$$y = u + \alpha(x).$$

Тогда преобразованное уравнение будет:

$$\frac{du}{dx} = Pu^2 + [Q + 2P\alpha(x)]u + R + P\alpha^2 + Q\alpha - \alpha'.$$

Достаточно выбрать  $\alpha(x) = -\frac{Q}{2P}$ , чтобы получить коэффициент при  $u$  равным 0. Комбинируя обе подстановки, мы всегда можем привести уравнение Риккати к виду:

$$\frac{dy}{dx} = \pm y^2 + R(x). \quad (48_1)$$

2. Как уже упомянуто, решение уравнения Риккати не сводится вообще говоря, к квадратурам. Но имеет место теорема:

*Если известно одно частное решение уравнения Риккати, полное решение получается двумя квадратурами.*

В самом деле, пусть известное частное решение уравнения (48) есть  $y = y_1(x)$ , т. е. мы имеем тождественно:

$$y'_1 = Py_1^2 + Qy_1 + R. \quad (48_2)$$

Делая замену зависимого переменного:

$$y = y_1 + z,$$

где  $z$  — новая искомая функция, получаем:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} = Py_1^2 + 2Py_1z + Pz^2 + Qy_1 + Qz + R,$$

или, в силу тождества (48<sub>2</sub>),

$$\frac{dz}{dx} = Pz^2 + (2Py_1 + Q)z. \quad (49)$$

Получилось уравнение Бернулли, которое, как мы видели, интегрируется двумя квадратурами. Для приведения уравнения (49) к линейному следует положить  $z = \frac{1}{u}$ , откуда  $u = \frac{1}{z} = \frac{1}{y - y_1}$ ; уравнение (линейное) для  $u$  будет:

$$\frac{du}{dx} + (2Py_1 + Q)u = -P. \quad (50)$$

Его общий интеграл имеет вид (§ 4, примечание 3):

$$u = C\varphi(x) + \psi(x),$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  — некоторые функции от  $x$ ; отсюда мы выводим форму общего решения уравнения (48):

$$y = y_1 + \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)} = \frac{Cy_1\varphi(x) + y_1\psi(x) + 1}{C\varphi(x) + \psi(x)}.$$

Итак, общее решение уравнения Риккати есть дробно-линейная функция от произвольной постоянной.

Покажем, что и обратно, если общее решение уравнения есть дробно-линейная функция от произвольной постоянной, то соответствующее дифференциальное уравнение есть уравнение Риккати.

Действительно, пусть общее решение дифференциального уравнения есть

$$y = \frac{C\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{C\psi_1(x) + \psi_2(x)},$$

разрешаем его относительно  $C$  и исключаем  $C$  дифференцированием;

$$C = \frac{\varphi_2 - y\psi_2}{y\psi_1 - \varphi_1};$$

$$(\varphi'_2 - y'\psi_2 - y\psi'_2)(y\psi_1 - \varphi_1) - (y'\psi_1 + y\psi'_1 - \varphi'_1)(\varphi_2 - y\psi_2) = 0,$$

или

$$y'(\varphi_1\psi_2 - \psi_1\varphi_2) + y^2(\psi'_1\psi_2 - \psi_1\psi'_2) + \\ + y(\varphi'_2\psi_1 - \varphi'_1\psi_2 - \psi'_1\varphi_2 + \psi'_2\varphi_1) + (\varphi'_1\varphi_2 - \varphi'_2\varphi_1) = 0,$$

т. е. мы действительно получили уравнение типа Риккати.

*Если известны два частных решения уравнения Риккати, то общее решение находится одной квадратурой.* В самом деле, если, кроме решения  $y = y_1$ , известно второе решение  $y_2$ , то для уравнения (50) известно одно частное решение  $u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$ , а в таком случае мы знаем, что решение его требует одной квадратуры.

Наконец, если известны три частных решения уравнения Риккати, то общее решение находится без квадратур. Пусть эти три решения уравнения (48) суть  $y_1, y_2, y_3$ ; как и в предыдущем случае, убеждаемся в том, что уравнение (50) имеет два известных частных решения:  $\frac{1}{y_2 - y_1}$  и  $\frac{1}{y_3 - y_1}$ ; в таком случае общее решение уравнения (50) напишется так:

$$u = \frac{1}{y_2 - y_1} + C \left( \frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1} \right),$$

или, заменяя  $u$  его значением  $\frac{1}{y - y_1}$ , перенося первый член правой части влево, умножая обе части на  $y_2 - y_1$  и разрешая относительно  $C$ :

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C.$$

Это и есть общий интеграл уравнения Риккати.

Заметим, что если вместо  $y$  подставить какое-нибудь четвёртое частное решение  $y_4$ , то получим:

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C,$$

т. е. *ангармоническое отношение любых четырёх частных решений уравнения Риккати равно постоянному*.

**3.** Уравнение Риккати специальное есть частный случай уравнения (48); оно имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = bx^\alpha, \quad (51)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $\alpha$  — постоянные; для определённости мы будем рассматривать интервал изменения для  $x$ :  $0 < x < +\infty$ . Легко усмотреть два случая, когда это уравнение интегрируется в элементарных функциях.

1)  $\alpha = 0$ ;  $\frac{dy}{dx} + ay^2 = b$ ; тогда переменные разделяются:

$$\frac{dy}{b - ay^2} = dx.$$

2)  $\alpha = -2$ ; уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} + ay^2 = \frac{b}{x^2}. \quad (52)$$

Сделаем в (52) замену зависимого переменного:

$$y = \frac{1}{z}.$$

Преобразованное уравнение будет:

$$-\frac{1}{z^2} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{a}{z^2} = \frac{b}{x^2}, \quad \text{или } \frac{dz}{dx} = a - b \left( \frac{z}{x} \right)^2.$$

Получилось однородное уравнение; оно интегрируется в квадратурах.

П р и м е ч а н и е. К виду (52) приводится более общее уравнение:

$$\frac{dy}{dx} + ay^3 = \frac{ly}{x} + \frac{b}{x^3}$$

( $a$ ,  $l$ ,  $b$  — постоянные) разобранной выше подстановкой, уничтожающей член с  $y$  в первой степени.

Кроме  $\alpha = 0$  и  $\alpha = -2$ , существует ёщё бесконечное множество других значений  $\alpha$ , при которых уравнение Риккати (51) интегрируется в элементарных функциях. Для нахождения этих значений, преобразуя в уравнении (51) зависимое переменное линейной подстановкой

$$y = u\bar{y} + v,$$

подберём функции  $u$  и  $v$  от  $x$  так, чтобы преобразованное уравнение не содержало члена с первой степенью искомой функции и чтобы свободный член не изменился. Имеем:

$$u \frac{d\bar{y}}{dx} + u' \bar{y} + v' + au^2 \bar{y}^2 + 2auv \bar{y} + av^2 = bx^2.$$

Поставленные условия дают два уравнения для определения  $u$  и  $v$ :

$$u' + 2auv = 0, \quad v' + av^2 = 0.$$

Из второго уравнения находим:

$$\frac{dv}{v^2} = -a dx, \quad v = \frac{1}{ax} \text{ (частное решение).}$$

После этого из первого уравнения получаем:

$$\frac{u'}{u} = -\frac{2}{x}, \quad u = \frac{1}{x^2} \text{ (частное решение).}$$

Искомая подстановка имеет вид:  $y = \frac{\bar{y}}{x^2} + \frac{1}{ax}$ , и преобразованное уравнение напишется так:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} + \frac{a}{x^2} \bar{y}^2 = bx^{\alpha+2}.$$

Далее, делаем подстановку (дробно-линейную):

$$\bar{y} = \frac{1}{y_1},$$

при этом  $y_1$  связан с  $y$  соотношением:

$$y = \frac{1}{y_1 x^2} + \frac{1}{ax}; \quad (53)$$

новое уравнение будет:

$$\frac{dy_1}{dx} + bx^{\alpha+2} y_1^2 = \frac{a}{x^2}. \quad !$$

Деля обе части на  $x^{\alpha+2}$ , преобразуем, наконец, независимое переменное так, чтобы член с  $y_1^2$  имел постоянный коэффициент:

$$\frac{dy_1}{x^{\alpha+2} dx} + by_1^2 = ax^{-(\alpha+4)}.$$

Очевидно, что для приведения уравнения к виду (51) достаточно положить:

$$x^{\alpha+3} = x_1, \quad dx_1 = (\alpha+3)x^{\alpha+2}dx, \quad x = x_1^{\frac{1}{\alpha+3}}, \quad (54)$$

и мы получаем окончательно:

$$\frac{dy_1}{dx_1} + \frac{b}{\alpha+3} y_1^2 = \frac{a}{\alpha+3} x_1^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}. \quad (55)$$

Это есть уравнение вида (51), где новые коэффициенты имеют значения  $a_1 = \frac{b}{\alpha+3}$ ,  $b_1 = \frac{a}{\alpha+3}$ , и показатель  $\alpha$  заменился через

$$\alpha_1 = -\frac{\alpha+4}{\alpha+3}.$$

Последнюю дробно-линейную подстановку, связывающую  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , приводим к следующему «каноническому виду»:

$$\frac{1}{\alpha_1+2} = \frac{1}{2 - \frac{\alpha+4}{\alpha+3}} = \frac{\alpha+3}{\alpha+2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\alpha_1+2} = 1 + \frac{1}{\alpha+2}.$$

Применяя к уравнению (55) с новыми  $a_1, b_1$  и  $\alpha_1$  те же преобразования (53), (54), придём опять к уравнению того же типа, в котором показатель  $\alpha_2$  при  $x$  связан с  $x_1$  и с  $\alpha$  соотношениями:

$$\frac{1}{\alpha_2 + 2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + 2} = 2 + \frac{1}{\alpha + 2}.$$

В результате  $k$  подобных преобразований придём к показателю  $\alpha_k$ , связанному с исходным показателем  $\alpha$  соотношением:

$$\frac{1}{\alpha_k + 2} = k + \frac{1}{\alpha + 2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Если, отправляясь от показателя  $\alpha$ , мы проведём в обратном порядке вышеуказанные последовательные преобразования переменных, мы придём к уравнениям с показателями  $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \dots, \alpha_{-k}, \dots$ , связанными с  $\alpha$  соотношениями:

$$\frac{1}{\alpha_{-k} + 2} = -k + \frac{1}{\alpha + 2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Если в результате преобразований мы придём к показателю, для которого уравнение Риккати интегрируется в квадратурах, то и начальное уравнение обладает тем же свойством. Как легко видеть из первоначальной формулы, связывающей  $\alpha$  и  $\alpha_1$ , при  $\alpha = -2$  мы имеем  $\alpha_1 = -2$ , т. е. показатель  $-2$  не изменяется при рассматриваемых преобразованиях и, следовательно, не может произойти в результате этих преобразований от другого показателя. Поэтому нас будут интересовать лишь те случаи, когда для некоторого натурального  $k$  мы имеем:  $\alpha_k = 0$  или  $\alpha_{-k} = 0$ .

Предполагая теперь  $k$  любым целым числом (положительным или отрицательным), мы в обоих этих случаях имеем:

$$\frac{i}{\alpha + 2} = -k + \frac{1}{2}, \text{ откуда } \alpha = \frac{4k}{-2k + 1} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Мы получили две бесконечные последовательности показателей, для которых уравнение Риккати сводится путём ряда преобразований к случаю  $\alpha = 0$ ; это будут:

$$k = 1, 2, 3, \dots; \quad \alpha = -4, -\frac{8}{3}, -\frac{12}{5}, \dots;$$

$$k = -1, -2, -3, \dots; \quad \alpha = -\frac{4}{3}, -\frac{8}{5}, -\frac{12}{7}, \dots$$

Обе последовательности имеют пределом  $-2$ . Разрешая найденную для  $\alpha$  формулу относительно  $k$ , получаем:  $\frac{\alpha}{2\alpha + 4}$  равно целому числу; это — признак того, что  $\alpha$  принадлежит к одной из указанных последовательностей.

При  $\alpha = 0$ , как легко убедиться,  $y$  выражается через показательные и тригонометрические функции от  $x$ ; последовательные преобразования вводят съё дробные степени  $x$ ; в результате  $y$  выражается через  $x$  в элементарных функциях.

Как показал Лиувилль (1841 г.), при всех других значениях  $\alpha$  решение специального уравнения Риккати не может быть выражено квадратурами от элементарных функций.

Уравнение Риккати имеет то общее свойство с линейными уравнениями, что знание некоторого числа частных решений позволяет найти общее решение или привести его отыскание к квадратурам. Дарбу исследовал широкий класс уравнений, обладающих тем свойством, что, зная достаточное количество их частных решений, можно получить общее решение без квадратур или с помощью одной квадратуры; это — так называемые «уравнения Дарбу»; частным случаем этого класса является уравнение Якоби.

Пример 14.  $\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{1}{2x^2}$ . Подстановка  $y = \frac{1}{z}$  даёт:

$$\frac{dz}{dx} = -1 - \frac{1}{2} \left( \frac{z}{x} \right)^2.$$

Далее,

$$z = ux.$$

$$u + x \frac{du}{dx} = -1 - \frac{1}{2} u^2, \quad \frac{du}{u^2 + 2u + 2} = -\frac{dx}{2x},$$

$$\frac{du}{1 + (u+1)^2} = -\frac{dx}{2x}, \quad u + 1 = \operatorname{tg} \left( C - \frac{1}{2} \ln x \right),$$

$$z = x \left[ -1 + \operatorname{tg} \left( C - \frac{1}{2} \ln z \right) \right]$$

и, наконец,

$$y = \frac{1}{x \left[ -1 + \operatorname{tg} \left( C - \frac{1}{2} \ln x \right) \right]}.$$

Пример 15.  $\frac{dy}{dx} + y^2 = x^{-\frac{4}{3}}$ . Показатель соответствует значению  $k = -1$ , следовательно, надо все подстановки вести в обратном порядке. Для удобства сравнения с соответствующими формулами обозначим исходные переменные через  $x_1, y_1$ . Итак, имеем:

$$\frac{dy_1}{dx_1} + y_1^2 = x_1^{-\frac{4}{3}},$$

здесь  $a_1 = -\frac{4}{3} = -\frac{\alpha + 4}{\alpha + 3}$ , т. е.  $\alpha = 0$ . Делаем замену независимого переменного:  $x^3 = x_1$ ,  $dx_1 = 3x^2 dx$ . Получаем:

$$\frac{dy_1}{dx} + 3x^2 y_1^2 = \frac{3}{x^2}.$$

Переходя к переменному  $\bar{y} = \frac{1}{y_1}$ , находим:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} + \frac{3}{x^2} \bar{y}^2 = 3x^2.$$

Мы имеем  $a = 3$ ,  $b = 3$ . Разрешая относительно  $\bar{y}$  формулу преобразования  $y = \frac{\bar{y}}{x^2} + \frac{1}{3x}$ , имеем:

$$\bar{y} = x^2y - \frac{x}{3};$$

подставляем в последнее уравнение:

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy - \frac{1}{3} + 3x^2y^2 - 2xy + \frac{1}{3} = 3x^2$$

или, упрощая,

$$\frac{dy}{dx} + 3y^2 = 3.$$

Интегрируем, разделяя переменные:

$$\frac{dy}{1-y^2} = 3dx, \quad \frac{dy}{1-y} + \frac{dy}{1+y} = 6dx, \quad \frac{1+y}{1-y} = Ce^{6x}, \quad y = \frac{Ce^{6x}-1}{Ce^{6x}+1}.$$

Возвращаемся постепенно к первоначальным переменным:

$$\bar{y} = \frac{x^2(Ce^{6x}-1)}{Ce^{6x}+1} - \frac{x}{3} = \frac{(3x^2-x)Ce^{6x}-(3x^2+x)}{3(Ce^{6x}+1)},$$

$$y_1 = \frac{3(Ce^{6x}+1)}{(3x^2-x)Ce^{6x}-(3x^2+x)}$$

и, наконец,

$$y_1 = \frac{3(Ce^{\frac{6x^{\frac{2}{3}}}{1}}+1)}{(3x_1^{\frac{2}{3}}-x_1^{\frac{1}{3}})Ce^{\frac{6x^{\frac{1}{3}}}{1}}-(3x_1^{\frac{2}{3}}+x_1^{\frac{1}{3}})}.$$

### ЗАДАЧИ.

41.  $y' = \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3x^2}.$

42.  $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0.$

43.  $xy' - 3y + y^2 = 4x^2 - 4x$ ; угадать сначала частное решение.

44.  $y' = y^2 + x^{-4}.$

Мы изучили главнейшие типы уравнений первого порядка, которые в конечном счёте интегрируются методом разделения переменных. Этими типами не исчерпываются все уравнения, которые могут быть приведены к разделяющимся переменным. Во многих случаях соответственным образом подобранная подстановка приводит дифференциальное уравнение к одному из известных типов. Ряд таких «нешаблонных» уравнений приведён ниже.

### РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ.

45. Решить функциональное уравнение  $[f(x) — известная]$

$$f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}.$$

**Указания.** 1) Можно заранее предполагать функцию  $f$  дифференцируемой, и тогда способ решения: дифференцировать по  $y$  и затем положить  $y = 0$ . 2) Достаточно допустить существование  $f'(0)$ ; способ решения: вычислить  $f'(x)$  как  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y}$ .

$$46. (y-x) \sqrt{1+x^2} \frac{dy}{dx} = (1+y^2)^{3/2}.$$

**Указание.** Ввести переменные  $x = \operatorname{tg} \varphi$ ,  $y = \operatorname{tg} \psi$ .

$$47. \frac{dy}{dx} (x^2 + y^2 + 3) = 2x \left( 2y - \frac{x^2}{y} \right).$$

$$48. \frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2}{2y(x + y^2)}.$$

$$49. [x(x+y) + a^2] \frac{dy}{dx} = y(x+y) + b^2.$$

**Указание.** Ввести новые переменные  $x = u+v$ ,  $y = ku-v$ , где постоянное  $k$  подобрать так, чтобы переменные разделялись. Можно заметить также, что это уравнение — типа Якоби.

50. Дано уравнение:  $\frac{dy}{dx} = ky + f(x)$ , где  $k$  — постоянное, а  $f(x)$  — периодическая функция периода  $\omega$ ; доказать, что это уравнение имеет одно частное решение, периодическое с тем же периодом, и найти это решение (Ляпунов).