ГЛАВА II.

ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЁННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

§ 1. Теорема существования (Коши и Пеано).

В главе I рассмотрены различные типы дифференциальных уравнений первого порядка, для которых мы умеем находить общий интеграл; этот интеграл заключал одно произвольное постоянное. С другой стороны, геометрические соображения (построение кривых по данному полю направлений) давали нам основание ожидать, что произвольное дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесконечное множество решений и что через каждую точку (x_0, y_0) проходит одна интегральная кривая. В настоящем параграфе мы, наложив определённые ограничения на правую часть дифференциального уравнения (первого порядка), докажем существование и единственность решения, определяемого начальными данными (x_0, y_0). Первое доказательство существования решения дифференциальных уравнений принадлежит Коши; приводимое нами доказательство дано Пикаром; оно производится при помощи *метода последовательных приближений*, который не только устанавливает, что решение существует, но и даёт возможность приближённо вычислять это решение.

1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

и даны начальные значения (x_0, y_0). Относительно функции $f(x, y)$ мы предположим следующее:

А) *$f(x, y)$ есть непрерывная функция двух переменных в замкнутой области*[1]) R:

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b,$$

[1]) Областью определения функции $f(x, y)$ может быть любая область плоскости xOy, в частности вся плоскость; из этой области D мы выделяем прямоугольную область R с центром в точке (x_0, y_0).

где a и b — некоторые положительные числа. Так как непрерывная функция является в замкнутой области ограниченной, то из условия А) следует существование такого положительного числа M, что *неравенство*

$$|f(x, y)| \leqslant M \tag{2}$$

выполняется для всех точек области R;

В) *функция* $f(x, y)$ *удовлетворяет в области* R *относительно переменного* y *условию Липшица*: существует такое положительное число N, что для любого значения x, $|x - x_0| \leqslant a$, и любых двух значений y' и y'' переменного y, $|y' - y_0| \leqslant b$, $|y'' - y_0| \leqslant b$, выполняется неравенство:

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leqslant N|y' - y''|. \tag{3}$$

Примечание 1. Неравенство (3) всегда выполнено, если функция $f(x, y)$ имеет в каждой точке области частную производную $f'_y(x, y)$, ограниченную во всей области R, т. е. если $|f'_y| \leqslant N$; в самом деле, тогда мы имеем по теореме Лагранжа:

$$f(x, y') - f(x, y'') = (y' - y'')f'_y[x, y' + \theta(y'' - y')], \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда сразу получается неравенство (3); но неравенство (3) может выполняться и тогда, когда $\frac{\partial f}{\partial y}$ не существует всюду; например, функция от y, равная $|y|$, не имеет производной при $y = 0$, а между тем всегда имеет место неравенство:

$$\big||y'| - |y''|\big| \leqslant |y' - y''|,$$

т. е. выполнено условие (3), в котором $N = 1$.

Примечание 2. Для заданной функции $f(x, y)$ значение постоянного M, являющегося максимумом $|f(x, y)|$, а также наименьшее значение постоянного N, входящего в условие Липшица, зависят от рассматриваемой области; если область R_1 содержит R, то соответствующие первой области величины M_1 и N_1 связаны с величинами M и N, которые соответствуют области R, неравенствами $M_1 \geqslant M$, $N_1 \geqslant N$. Например, функция $f(x, y) = x^2 + y^2$, рассматриваемая во всей плоскости $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, является неограниченной и не удовлетворяет условию Липшица; если же мы будем рассматривать её в области R, $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, то постоянное M окажется равным $a^2 + b^2$; в качестве же постоянного N следует взять максимальную величину $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ в области R, т. е. $2b$.

В этих предположениях мы докажем, что *существует единственное решение дифференциального уравнения* (1) $y = \varphi(x)$, *определённое и непрерывное для значений* x *в интервале* $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$ $\left(\text{где } h \text{ есть наименьшее из двух чисел } a \text{ и } \frac{b}{M}\right)$, *принимающее при* $x = x_0$ *значение* x_0.

Доказательство существования решения. Построим последовательность «приближений» к искомому решению. Легко

видеть, что уравнение (1) с начальными условиями эквивалентно следующему *интегральному уравнению*, где y — опять неизвестная функция:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx. \tag{4}$$

Это интегральное уравнение мы и будем решать последовательными приближениями.

За нулевое приближение возьмём постоянное число y_0. Определим первое приближение $y_1(x)$ следующей формулой:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx. \tag{5_1}$$

Так как функция под знаком интеграла известна, то y_1 вычисляется квадратурой; очевидно, при $x = x_0$ имеем $y_1 = y_0$, т. е. первое приближение удовлетворяет начальному условию.

Если мы ограничим в формуле (5_1) изменение x, требуя, чтобы $|x - x_0| \leqslant h$ (см. выше условия теоремы), то, так как $h \leqslant a$, значения аргументов функции f, т. е. x и y_0, будут принадлежать области R, в которой $|f(x, y)| \leqslant M$; следовательно, мы из формулы (5_1) получим неравенство:

$$|y_1 - y_0| \leqslant M\,|x - x_0| \leqslant Mh;$$

но так как $h \leqslant \frac{b}{M}$, то последнее неравенство показывает, что, при указанном ограничении изменения x, также и y_1 не выйдет из области R.

Строим второе приближение $y_2(x)$:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\,dx. \tag{5_2}$$

Под знаком интеграла опять стоит известная функция (так как y_1 уже определено); далее, очевидно, $y_2(x_0) = y_0$, т. е. выполняется начальное условие; затем, так как при $|x - x_0| \leqslant h$ аргументы функции $f(x, y_1)$ не выходят из области R, где $f(x, y)$ определена и удовлетворяет условию (2), мы будем иметь неравенства:

$$|y_2 - y_0| \leqslant M\,|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b,$$

которые показывают, что y_2 также не выйдет из области R. Вообще, после того как определено $(n-1)$-е приближение, мы определим n-е приближение формулой:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx, \tag{5_n}$$

откуда, допуская, что значения y_{n-1} при изменении x в интервале $|x-x_0|\leqslant h$ не выходят из области R и, следовательно, $|f(x, y_{n-1})|\leqslant M$, получим для y_n неравенство:

$$|y_n-y_0|\leqslant M|x-x_0|,$$

которое показывает, что если $|x-x_0|\leqslant h$, то $|y_n-y_0|\leqslant Mh\leqslant b$, т. е. n-е приближение также не выходит из той же области. Таким образом, методом полной индукции доказано, что *ни одно из последовательных приближений не выйдет из области R, если*

$$x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h.$$

Теперь нужно показать, что существует предел последовательности y_n,

$$Y(x)=\lim_{n\to\infty} y_n(x), \tag{6}$$

и что предельная функция удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям. Для того чтобы показать существование предела (6) последовательности $\{y_n\}$, достаточно доказать сходимость ряда:

$$y_0+(y_1-y_0)+(y_2-y_1)+\ldots+(y_n-y_{n-1})+\ldots; \tag{7}$$

в самом деле, n-я частная сумма этого ряда $S_n=y_n$, и если мы докажем, что ряд (7) сходится к функции $Y(x)$, то этим самым и будет доказано соотношение (6).

Оценим абсолютные величины членов ряда (7):

$$|y_1-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx\right|\leqslant M|x-x_0|; \tag{8$_1$}$$

далее,

$$|y_2-y_1|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f(x, y_1)-f(x, y_0)\}dx\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x, y_1)-f(x, y_0)|dx\right|.$$

На основании условия Липшица B) подинтегральная функция удовлетворяет неравенству $|f(x, y_1)-f(x, y_0)|\leqslant N|y_1-y_0|$; подставляя сюда только что найденную оценку для $|y_1-y_0|$, находим:

$$|y_2-y_1|\leqslant N\left|\int_{x_0}^{x} M|x-x_0|dx\right|=\frac{MN}{1\cdot 2}|x-x_0|^2. \tag{8$_2$}$$

Аналогично получим:

$$|y_3-y_2|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\,dx\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}N|y_2-y_1|\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{MN^2}{1\cdot 2}\left|\int_{x_0}^{x}(x-x_0)^2\,dx\right|,$$

и, наконец,

$$|y_3-y_2|\leqslant\frac{MN^2}{3!}|x-x_0|^3. \tag{8_3}$$

Докажем, что для любого целого положительного n справедливо неравенство:

$$|y_n-y_{n-1}|\leqslant\frac{MN^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n. \tag{8_n}$$

Для этого применим метод полной индукции: допустив, что неравенство (8_n) справедливо для n, докажем его справедливость для $n+1$. Мы имеем:

$$|y_{n+1}-y_n|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,y_n)-f(x,y_{n-1})|\,dx\right|\leqslant N\left|\int_{x_0}^{x}|y_n-y_{n-1}|dx\right|$$

(последнее неравенство получаем на основании условия Липшица). Подставив в последний интеграл вместо $|y_n-y_{n-1}|$ выражение (8_n) (отчего неравенство усилится), получаем:

$$|y_{n+1}-y_n|\leqslant N\cdot\frac{MN^{n-1}}{n!}\left|\int_{x_0}^{x}|x-x_0|^n\,dx\right|=\frac{MN^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

т. е. неравенство (8_n) справедливо и для $n+1$. А так как оно оправдывается для $n=2$ и $n=3$, то оно верно для каждого натурального числа n. Заменяя ещё $|x-x_0|$ его наибольшим допустимым значением h, мы приходим к заключению, что каждый член ряда (7) (если не обращать внимания на первый член y_0) меньше соответствующего члена числового ряда с положительными членами:

$$Mh+M\frac{Nh^2}{2!}+M\frac{N^2h^3}{3!}+\ldots+M\frac{N^{n-1}h^n}{n!}+\ldots \tag{9}$$

Применяя к последнему ряду признак Даламбера, находим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{MN^nh^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!MN^{n-1}h^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{Nh}{n+1}=0<1.$$

Итак, ряд (9) сходится. Так как все члены ряда (7) по абсолютной величине меньше членов числового ряда (9), то ряд (7) не

только сходится, но, в силу критерия Вейерштрасса, сходится равномерно для всех x, удовлетворяющих условию $|x-x_0| \leqslant h$. Каждый член ряда (7) есть непрерывная функция от x, потому что интеграл есть непрерывная функция верхнего предела. Следовательно,

$$Y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

существует и является непрерывной функцией от x.

Докажем, что полученная таким образом функция $Y(x)$ удовлетворяет данному уравнению [очевидно, что начальное условие удовлетворено, так как $Y(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x_0) = y_0$].

Возьмём равенство (5_n):

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx$$

и перейдём к пределу при $n \to \infty$.

Благодаря равномерной непрерывности функции $f(x, y)$ по y в области R мы для любого наперёд заданного положительного числа ε можем найти такое $\delta > 0$, что неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon$$

будет выполнено для тех пар точек (x, y') и (x, y'') области R, для которых выполняется неравенство $|y' - y''| < \delta$ $\left(\text{в силу условия Липшица достаточно взять } \delta = \frac{\varepsilon}{N}\right)$. Далее, из равномерности стремления последовательности y_n к пределу вытекает возможность для выбранного δ так подобрать натуральное число n_0, чтобы при $n-1 > n_0$ для всех значений x в интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ имело место неравенство:

$$|y_{n-1}(x) - Y(x)| < \delta.$$

Сопоставляя оба эти неравенства, мы получаем при $n-1 > n_0$:

$$|f[x, y_{n-1}(x)] - f[x, Y(x)]| < \varepsilon.$$

Отсюда следует:

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx - \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1}) - f(x, Y)|\,dx\right| < \varepsilon h.$$

Пользуясь произволом числа ε, находим:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx.$$

Таким образом, переходя к пределу в равенстве (5_n) при $n \to \infty$, получаем тождество:

$$Y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx, \tag{10}$$

т. е. *функция* $Y(x)$ *удовлетворяет интегральному уравнению* (4). Далее, функция Y допускает производную по x, так как в правой части тождества (10) стоит интеграл от непрерывной функции, допускающий производную по верхнему пределу. Дифференцируя (10), получаем:

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y),$$

т. е. $Y(x)$ *удовлетворяет данному уравнению* (1). Первая часть теоремы доказана.

Примечание 1. В ходе доказательства мы заменили дифференциальное уравнение (1) интегральным уравнением (4); очевидна цель такой замены: условия равномерной сходимости для последовательности интегралов значительно проще, чем для последовательности производных.

Примечание 2. Доказательство существования решения дифференциального уравнения (1) проведено нами методом последовательных приближений в предположении, что правая часть уравнения удовлетворяет условию Липшица по переменному y. При помощи других методов можно доказать теорему существования в более общих предположениях: именно, для существования решения достаточно потребовать только непрерывности функции $f(x, y)$ по обоим аргументам. Однако, если не подчинить $f(x, y)$ добавочным условиям, то начальные значения, вообще говоря, будут определять не одно решение, т. е. теорема единственности не будет иметь места (см. ниже п. 5, теорема Пеано).

2. Докажем теперь единственность найденного решения, удовлетворяющего начальному условию: $y = y_0$ при $x = x_0$.

Допустим, что существует, кроме решения $Y(x)$, ещё другое решение $Z(x)$, удовлетворяющее тому же начальному условию: $Z(x_0) = y_0$. Без ограничения общности можно предположить, что значения x, для которых $Y(x) \neq Z(x)$, находятся вправо от x_0 в любой близости от точки x_0 [иначе за точку x_0 мы взяли бы ту точку, в любой близости которой значения $Y(x)$ и $Z(x)$ перестают быть равными, или заменили бы x на $-x$].

Покажем, что наше допущение приводит к противоречию. Возьмём некоторое малое постоянное число $\varepsilon > 0$; по предположению, в замкнутом интервале $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon$ не всюду $Y = Z$; следовательно, положительная функция $|Y(x) - Z(x)|$ достигает в этом интервале в некоторой точке ξ своего наибольшего значения $\theta > 0$, причём не

может быть $\xi = x_0$, так как при $x = x_0$ обе функции Y и Z равны между собой. Мы имеем:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Y)\,dx, \quad Z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, Z)\,dx.$$

Вычтем оба тождества одно из другого, придавая x значение ξ и используя при оценке разности условие Липшица:

$$|Y(\xi) - Z(\xi)| = \theta \leqslant \int_{x_0}^{\xi} |f(x, Y) - f(x, Z)|\,dx \leqslant N \int_{x_0}^{\xi} |Y(x) - Z(x)|\,dx.$$

Мы только усилим последнее неравенство, если под интегралом заменим разность $|Y(x) - Z(x)|$ её наибольшим значением θ и если интеграл распространим на промежуток $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ вместо промежутка (x_0, ξ). Получим $\theta < N\varepsilon\theta$, откуда, так как, по предложению, $\theta \neq 0$, находим, что $1 < N\varepsilon$, что противоречиво, так как ε можно выбрать сколь угодно малым, например $\varepsilon < \frac{1}{N}$. Следовательно, допущение существования второго решения Z, удовлетворяющего тому же начальному условию, что Y, приводит к противоречию.

Таким образом, *при выполнении условий* А) *и* В) *существует единственное решение дифференциального уравнения* (1), *принимающее при* $x = x_0$ *значение* y_0. Теорема Коши доказана нами полностью.

3. Мы доказали существование решения только для промежутка

$$I: \qquad x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h.$$

Однако, если при этом мы не вышли из той области D, где функция $f(x, y)$ определена и непрерывна (и удовлетворяет условию Липшица), *найденное решение может быть продолжено.* В самом деле, пусть значение найденного решения при $x = x_0 + h$ есть $y_0^{(1)}$, причём точка с координатами $x_0^{(1)} = x_0 + h$, $y_0^{(1)}$ лежит внутри области D, тогда можно найти прямоугольник R_1: $|x - x_0^{(1)}| \leqslant a_1$, $|y - y_0^{(1)}| \leqslant b_1$, который еще целиком лежит в области D [1]). Обозначая через M_1 максимум $|f(x, y)|$ в прямоугольнике R_1, примем за начальные значения $x_0^{(1)}$ и $y_0^{(1)}$; тогда мы можем, по доказанному, утверждать существование решения дифференциального уравнения (1) в интервале

$$I_1: \qquad x_0^{(1)} - h_1 \leqslant x \leqslant x_0^{(1)} + h_1,$$

---

[1]) По определению внутренней точки, она входит в область D вместе с некоторой своей окрестностью; за эту окрестность может быть принят достаточно малый прямоугольник.

где $h_1 = \min\left(a_1, \frac{b_1}{M_1}\right)$; середина интервала I_1 совпадает с концом интервала I; в этой точке оба построенных нами решения принимают одно и то же значение $y_0^{(1)}$; следовательно, в силу свойства единственности, оба решения совпадают в общей части I и I_1. Но половина $(x_0^{(1)}, x_0^{(1)} + h_1)$ интервала I_1 лежит вне I; мы скажем, что найденное решение в этой половине является *продолжением* ранее полученного в интервале I решения. Если значение решения при $x_0^{(1)} + h_1$ есть $y_0^{(2)}$ и точка с координатами $x_0^{(2)} = x_0^{(1)} + h_1$, $y_0^{(2)}$ ещё лежит внутри области D, то мы можем определить решение по начальным данным $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})$ в интервале I_2, который одной своей половиной перекрывается с I_1, и в этой общей части новое решение совпадает с предыдущим; во второй половине интервала I_2 мы получим продолжение рассматриваемого решения. Аналогичное построение может быть проведено и для убывающих значений x. Можно показать, что такими продолжениями можно подойти как угодно близко к границе области D.

В самом деле, пусть D_1 — любая ограниченная замкнутая область, лежащая вместе со своей границей внутри D. Мы покажем, что, применяя вышеописанный процесс «продолжения решения», мы дойдём до границы области D_1. В самом деле, так как D_1 не имеет общих точек с границей D, то наименьшее расстояние между точками этих замкнутых множеств $\geqslant d > 0$. (Если D совпадает со всей плоскостью xOy, то за d можно взять любое положительное число.) Если около каждой точки границы области D_1 опишем круг радиуса $\frac{d}{2}$ и замкнутую область, составленную из D_1 и площадей этих кругов, обозначим через D_2, то, очевидно, D_2 будет содержаться в D. Квадрат со стороной $\frac{d\sqrt{2}}{2}$, и с центром в любой точке области D_1 будет лежать внутри D_2. В замкнутой области D_2 непрерывная функция $f(x, y)$ ограничена по абсолютной величине; пусть $|f(x, y)| \leqslant M_2$. Итак, для всех точек области D_1 мы можем принять $a = \frac{d\sqrt{2}}{4}$, $b = \frac{d\sqrt{2}}{4}$, $M = M_2$; тогда, в силу доказанного, интегральная кривая, проходящая через любую точку (x_0, y_0), лежащую в области D_1, будет определена в интервале $(x_0 - h_2, x_0 + h_2)$, где $h_2 = \min\left(\frac{d\sqrt{2}}{4}, \frac{d\sqrt{2}}{4M_2}\right)$. В силу ограниченности области D_1, мы, при продолжении интегральной кривой, путём конечного числа шагов дойдём до границы этой области.

Строя области $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$, заключающие друг друга и стремящиеся в пределе к области D, мы, таким образом, достигаем любой близости границы D.

Пусть, в частности, область D совпадает со всей плоскостью xOy. Тогда в качестве областей $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ мы можем брать заключающие друг друга прямоугольники со сторонами неограниченно увеличивающихся размеров, параллельными координатным осям. При продолжении решения, определённого начальными данными (x_0, y_0), в сторону возрастающих значений x могут представиться два случая:

1) Как бы далеко вправо ни простирался прямоугольник D_n, можно взять его размеры в направлении Oy столь большими, что рассматриваемая интегральная кривая пересечёт при продолжении правую вертикальную сторону

прямоугольника D_n. Решение будет, таким образом, определено для сколь угодно больших положительных значений x, т. е. интервал оси Ox, для которого определено решение $y=\varphi(x)$, простирается до $+\infty$.

2) Найдутся такие значения $x=\bar{x}$, что сколь бы большой в направлении оси Oy прямоугольник D_n мы ни взяли (уравнение правой стороны которого есть $x=\bar{x}$), интегральная кривая при продолжении в направлении возрастания x выйдет из D_n через верхнюю или нижнюю сторону. Пусть $\overline{X}$ есть нижняя грань чисел $\bar{x}$, обладающих указанным свойством. В силу определения нижней грани, для всякого $\varepsilon>0$ найдётся прямоугольник D_n достаточных размеров в направлении Oy, такой, что интегральная кривая пересечёт прямую $x=\overline{X}-\varepsilon$, т. е. решение $y=\varphi(x)$ определено для всех значений $x<X$. С другой стороны, для значений $x>\overline{X}$ наше решение не может быть продолжено; при этом при приближении x к X слева $|\varphi(x)|$ не может оставаться ограниченной. Мы докажем, что в этом случае

$$\lim_{\substack{x<\overline{X}\\ x\to\overline{X}}}\varphi(x)=+\infty \quad\text{или}\quad \lim_{\substack{x<\overline{X}\\ x\to\overline{X}}}\varphi(x)=-\infty.$$

В самом деле, если допустить обратное, то $\varphi(x)$ не стремилось бы при $x\to\overline{X}$ ни к какому пределу, и нашлись бы два числа A, B $(B>A)$ такие, что $\varphi(x)$ бесчисленное множество раз в интервале $(\overline{X}-\varepsilon, \overline{X})$ принимала бы значения, меньшие A, и значения, превышающие B ($\varepsilon>0$ — любое малое число). В силу непрерывности $\varphi(x)$ при $x<\overline{X}$ (непрерывная функция принимает все промежуточные значения), нашлась бы последовательность пар чисел (x_n', x_n''), $x_1'<x_1''<x_2'<x_2''<\ldots<x_n'<x_n''<\ldots$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n' = \lim_{n\to\infty} x_n'' = \overline{X}, \tag{α}$$

и

$$\varphi(x_n')=A,\quad \varphi(x_n'')=B,\quad A<\varphi(x)<B \text{ при } x_n'<x<x_n''.$$

По теореме конечных приращений имеем:

$$\frac{\varphi(x_n'')-\varphi(x_n')}{x_n''-x_n'}=\frac{B-A}{x_n''-x_n'}=\varphi'(\xi_n), \tag{β}$$

где ξ_n лежит между x_n' и x_n''. Пусть $\varphi(\xi_n)=\eta_n$; тогда $A<\eta_n<B$, и точка (ξ, η_n) лежит внутри прямоугольника $\overline{R}$, ограниченного прямыми $x=\overline{X}-\varepsilon$, $x=\overline{X}$; $y=A$, $y=B$. Согласно дифференциальному уравнению (1),

$$\varphi'(\xi_n)=f(\xi_n, \eta_n). \tag{γ}$$

В силу условий (α), мы можем выбрать n таким большим, чтобы было $x_n''-x_n'<\dfrac{B-A}{M}$, M — сколь угодно большое положительное число; тогда равенства (β) и (γ) дают:

$$f(\xi_n, \eta_n)>M.$$

Таким образом, функция $f(x, y)$ оказывается неограниченной в замкнутом прямоугольнике $\overline{R}$, что противоречит предположению о её непрерывности во всей плоскости. Наше утверждение доказано.

Резюмируя, мы можем высказать следующую теорему: *если $f(x, y)$ определена и непрерывна во всей плоскости и удовлетворяет условию Липшица во всякой ограниченной области этой плоскости, то всякая интегральная кривая при возрастании x или неограниченно продолжаема до $x = +\infty$, или имеет вертикальную асимптоту при конечном значении $x = \bar{x}$.*

Аналогичное заключение справедливо для интегральной кривой при убывании x.

Простейший пример, осуществляющий случай 2, представляет уравнение $y' = y^2 + 1$; его решение, определённое начальными значениями (0, 0), есть $y = \operatorname{tg} x$; интегральная кривая имеет вертикальные асимптоты при $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

4. Теорема Коши доказывает существование (и единственность) частного решения, определённого начальными условиями. Но легко получить из неё построение общего решения, по крайней мере в некоторой ограниченной области.

Возьмём, как и в предыдущих рассуждениях, область R; $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$. Предполагая попрежнему начальное значение x_0 постоянным, будем считать начальное значение $\bar{y}_0$ искомой функции параметром, который может принимать всевозможные значения в некотором промежутке, например в интервале $\left(y_0 - \frac{b}{2},\ y_0 + \frac{b}{2}\right)$. Тогда, при любом выборе $\bar{y}_0$ в указанном интервале, переменное y не выйдет из области R, если ограничить его изменение неравенствами:

$$\bar{y}_0 - \frac{b}{2} \leqslant y \leqslant \bar{y}_0 + \frac{b}{2}.$$

Поэтому для всех рассматриваемых начальных значений $(x_0, \bar{y}_0)$ решения уравнения (1) будут существовать при изменении x в интервале $(x_0 - h',\ x_0 + h')$, где $h' = \min\left(a, \frac{b}{2M}\right)$. Таким образом, мы получили зависящее от одного параметра семейство решений:

$$y = \varphi(x, \bar{y}_0), \tag{11}$$

т. е. общее решение.

Формулы, дающие последовательные приближения $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, показывают, что эти приближения суть непрерывные функции от начального значения, которое в рассматриваемом случае есть $\bar{y}_0$; следовательно, и *решение* (11), как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, *является непрерывной функцией параметра* $\bar{y}_0$.

Будем далее рассматривать оба начальных значения $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ как переменные параметры, ограничив их изменение некоторой областью R',

расположенной внутри R, например $|\bar{x}_0 - x_0| \leqslant \frac{h}{4}$, $|\bar{y}_0 - y_0| \leqslant \frac{b}{2}$; тогда совокупность решений уравнения (1), соответствующих начальным данным $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, будет определена, во всяком случае, для $|x - \bar{x}_0| \leqslant \frac{h}{4}$. Эти решения выразятся формулой:

$$y = \Phi(x, \bar{x}_0, \bar{y}_0). \tag{12}$$

Из соображений, аналогичных предыдущим, следует, что функция в правой части равенства (12) непрерывна по отношению к переменным x, $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$.

Если мы возьмём теперь, в качестве начальной, полученную по формуле (12) точку (x, y), принадлежащую области R', то придём вдоль интегральной кривой, в силу единственности, обратно в точку $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$. Так как в этой формуле функция Φ характеризует зависимость значения функции от значения аргумента и от начальных параметров для всей области R', то мы вправе написать:

$$\bar{y}_0 = \Phi(\bar{x}_0; x, y),$$

или, рассматривая в этом равенстве опять $\bar{x}_0$ как постоянное число, а $\bar{y}_0$ как переменный параметр (произвольное постоянное), получим соотношение вида:

$$\psi(x, y) = C, \tag{12_1}$$

связывающее координаты (x, y) переменной точки интегральной кривой, т. е. получим *общий интеграл уравнения* (1), разрешённый относительно произвольного постоянного.

Примечание. Нам придётся в дальнейшем дифференцировать левую часть равенства (12_1) по x и y; для законности этой операции достаточно показать, что решение (12) дифференциального уравнения (1) есть дифференцируемая функция от начальных значений. Доказательство этого факта, ввиду его сложности, мы дадим лишь в главе VII.

5. Доказательство существования решения дифференциального уравнения с непрерывной правой частью. Если в дифференциальном уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

на функцию $f(x, y)$ наложено только требование непрерывности по отношению к совокупности аргументов x, y, то можно доказать существование по крайней мере одного решения с начальными данными x_0, y_0. Первое доказательство этой теоремы принадлежит Пеано.

ТЕОРЕМА ПЕАНО. *Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$. Обозначим через M максимум $|f(x, y)|$ в этой области и через h наименьшее из чисел a, $\frac{b}{M}$. Тогда в интервале $|x - x_0| \leqslant h$ существует по крайней мере одно решение уравнения* (1), *$y = \varphi(x)$, удовлетворяющее начальному условию: $\varphi(x_0) = y_0$.*

Для доказательства этой теоремы мы применим теорему Арцела. Введём предварительно следующие определения. Последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots \tag{A}$$

называется *равномерно ограниченной* на замкнутом интервале (a, b), если существует положительное постоянное M такое, что для всех натуральных n и для $a \leqslant x \leqslant b$ имеет место неравенство:

$$|f_n(x)| \leqslant M.$$

Последовательность (A) непрерывных в замкнутом интервале (a, b) функций называется *равностепенно непрерывной*, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $|x' - x''| < \delta$ выполняется для всех n неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА АРЦЕЛА. *Из всякой последовательности равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.*

Возьмём на интервале (a, b) счётную, всюду плотную последовательность точек $\{x_n\}$, например по такому закону:

$$x_1 = a + \frac{b-a}{2},\quad x_2 = a + \frac{b-a}{4},\quad x_3 = a + 3\,\frac{b-a}{4},\ \ldots$$

$$\ldots,\ x_{2^k} = a + \frac{b-a}{2^{k+1}},\quad x_{2^k+1} = a + 3\frac{b-a}{2^{k+1}},\ \ldots$$

$$\ldots,\ x_{2^{k+1}-1} = a + (2^{k+1}-1)\,\frac{b-a}{2^{k+1}},\ \ldots$$

Рассмотрим теперь множество чисел $\{f_n(x_1)\}$. В силу равномерной ограниченности последовательности (A), значения $f_n(x_1)$ все расположены на конечном интервале $(-M, +M)$ и, следовательно, имеют по крайней мере одну предельную точку. Поэтому из последовательности чисел $\{f_n(x_1)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$f_{n_1}(x_1),\ f_{n_2}(x_1),\ \ldots,\ f_{n_k}(x_1),\ \ldots,\ 1 \leqslant n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

Перенумеруем заново соответствующие функции, полагая $f_{n_k}(x) = f_k^{(1)}(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Заметим, что $n_k \geqslant k$. Последовательность функций

$$f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(1)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(1)}(x),\ldots \tag{A$_1$}$$

обладает тем свойством, что их значения в точке x_1 образуют сходящуюся последовательность.

Рассмотрим, далее, значения, принимаемые последовательностью (A$_1$) в точке x_2, т. е. $f_1^{(1)}(x_2), f_2^{(1)}(x_2), \ldots, f_n^{(1)}(x_2), \ldots$ Числа этой последовательности опять все заключены между $-M$ и $+M$; следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность

$$f_{n'_1}^{(1)}(x),\ f_{n'_2}^{(1)}(x),\ \ldots,\ f_{n'_k}^{(1)}(x),\ \ldots$$

Перенумеруем заново подпоследовательность соответствующих функций, полагая $f_{n_{k'}}^{(1)}(x) = f_k^{(2)}(x)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Итак, мы получим подпоследовательность:

$$f_1^{(2)}(x),\ f_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(2)}(x),\ \ldots \tag{A$_2$}$$

Заметим, что так как новая последовательность составляет часть последовательности (A_1), а эта последняя — часть последовательности (A), то функция $f_k^{(2)}(x)$ в первоначальной последовательности (A) имеет номер $\geqslant k$. Продолжая тот же процесс неограниченно, мы получим на m-м шаге подпоследовательность:

$$f_1^{(m)}(x),\ f_2^{(m)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(m)}(x),\ \ldots, \qquad (A_m)$$

определённую тем свойством, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(m)}(x_m)$. Заметим, что так как последовательность (A_m) является частью последовательностей (A_{m-1}), (A_{m-2}), ..., (A_1), то для неё существуют также пределы:

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(m)}(x_i), \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m-1.$$

Далее, так как последовательность (A_m) является частью последовательности (A) и при перенумерации порядок членов не нарушается, то функция $f_k^{(m)}(x)$ имеет в первоначальной нумерации (A) номер $\geqslant k$.

Составляем теперь из последовательностей (A_m) «диагональную» последовательность:

$$f_1^{(1)}(x),\ f_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(n)}(x),\ \ldots \qquad (B)$$

Последовательность (B) сходится в любой точке x_p ($p=1, 2, 3, \ldots$), так как все её члены, начиная с индекса p, принадлежат последовательности (A_p), которая сходится при $x=x_p$. Номера индексов функций последовательности (B) в первоначальной последовательности стремятся к ∞, так как функция $f_n^{(n)}(x)$ в первоначальной последовательности (A) имела номер $\geqslant n$.

Утверждаем, что последовательность (B) сходится равномерно во всём замкнутом интервале (a, b). В самом деле, зададим произвольное $\varepsilon>0$. В силу равностепенной непрерывности последовательности (B), существует такое $\delta>0$, что для любой функции этой последовательности неравенство $|x'-x''|<\delta$ влечёт за собой $|f_n^{(n)}(x')-f_n^{(n)}(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}$. Далее, выбираем такое натуральное P, чтобы длина наибольшего интервала между точками $a, b, x_1, x_2, \ldots, x_P$ была меньше найденного δ. Наконец, выбираем N так, чтобы имели место неравенства:

$$|f_{n+m}^{(n+m)}(x_1)-f_n^{(n)}(x_i)|<\frac{\varepsilon}{3} \text{ для } n\geqslant N,\ m\geqslant 1,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ P.$$

Пусть теперь x — любая точка замкнутого интервала (a, b). В силу выбора числа P, найдётся точка x_r, $r\leqslant P$, такая, что $|x-x_r|<\delta$. Тогда мы получим:

$$|f_n^{(n)}(x)-f_{n+m}^{(n+m)}(x)|\leqslant|f_n^{(n)}(x)-f_n^{(n)}(x_r)|+|f_n^{(n)}(x_r)-f_{n+m}^{(n+m)}(x_r)|+$$
$$+|f_{n+m}^{(n+m)}(x_r)-f_{n+m}^{(n+m)}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Отсюда, по критерию Коши, следует равномерная сходимость последовательности (B). Теорема Арцела доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы Пеано. Мы будем приближать искомую интегральную кривую при помощи ломаных линий. Для дальнейшего удобно выделить в виде леммы следующее, геометрически очевидное, предложение.

ЛЕММА. *Если $y=\varphi(x)$ есть функция, определённая на интервале (x_0, x_n), график которой изображается ломаной линией, причём угловые коэффициенты $k_1, k_2, \ldots, k_n$ последовательных звеньев с проекциями (x_0, x_1) (x_1, x_2), $\ldots$, (x_{n-1}, x_n) все лежат между двумя числами $\varkappa$ и К, $\varkappa \leqslant k_i \leqslant$ К, то для углового коэффициента k любой хорды, $k=\dfrac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}$, справедливо неравенство $\varkappa \leqslant k \leqslant$ К.*

Доказательство. Пусть между точками x' и x'' находятся точки $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+l}$; тогда мы имеем:

$$\frac{\varphi(x_i)-\varphi(x')}{x_i-x'}=k_i, \quad \frac{\varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)}{x_{i+1}-x_i}=k_{i+1}, \quad \ldots, \quad \frac{\varphi(x'')-\varphi(x_{i+l})}{x''-x_{i+l}}=k_{i+l+1}.$$

В силу свойства производных пропорций, отношение суммы предыдущих членов к сумме последующих лежит между наибольшим и наименьшим из чисел $k_i, k_{i+1}, \ldots, k_{i+l+1}$, т. е. между $\varkappa$ и К, что и доказывает лемму.

При доказательстве теоремы Пеано ограничимся рассмотрением интервала (x_0, x_0+h); для интервала (x_0-h, x_0) построение и доказательство аналогичны. Обозначим через D замкнутую область $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$, $|y-y_0| \leqslant b$. Ломаную $y=\varphi_n(x)$, представляющую n-е приближение интегральной кривой, строим следующим образом. Делим отрезок (x_0, x_0+h) на n равных частей точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n=x_0+h$. В интервале (x_0, x_1) определим $\varphi_n(x)$ как ординату прямой, проходящей через начальную точку (x_0, y_0) с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$:

$$\varphi_n(x)=y_0+(x-x_0)f(x_0, y_0), \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1.$$

Значение, принимаемое этой функцией при $x=x_1$, обозначим через y_1:

$$y_1=y_0+(x_1-x_0)f(x_0, y_0).$$

Построенный отрезок весь лежит в области D, так как $|y-y_0| \leqslant M(x-x_0) \leqslant Mh \leqslant b$. В интервале (x_1, x_2) определяем $\varphi_n(x)$ как ординату прямой, проходящей через (x_1, y_1) с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$:

$$\varphi_n(x)=y_1+(x-x_1)f(x_1, y_1), \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2.$$

Обозначаем

$$y_2=y_1+(x_2-x_1)f(x_1, y_1).$$

Легко убедиться, что построенное звено лежит в области D. Вообще, если при $x=x_k$ мы получили $\varphi_n(x_k)=y_k$, то в интервале (x_k, x_{k+1}) функция $\varphi_n(x)$ определяется уравнением:

$$\varphi_n(x)=y_k+(x-x_k)f(x_k, y_k), \quad x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}.$$

Построив, таким образом, ломаную $y=\varphi_n(x)$ во всём промежутке (x_0, x_0+h), мы убеждаемся в том, что она целиком лежит в области D, так как, в силу леммы, мы имеем для $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$:

$$|\varphi_n(x)-y_0|=|\varphi_n(x)-\varphi_n(x_0)| \leqslant M(x-x_0) \leqslant Mh.$$

Давая n значения 1, 2, 3, $\ldots$, мы получаем последовательность функций:

$$\varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots \qquad \text{(C)}$$

Эти функции равномерно ограничены в интервале (x_0, x_0+h); в самом деле,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant |y_0|+Mh$$

для любого n. Далее, эти функции равностепенно непрерывны, так как все угловые коэффициенты любой функции ограничены числами $-M$ и $+M$; в силу леммы, имеем для любых x', x'', содержащихся в интервале (x_0, x_0+h),

$$|\varphi_n(x'') - \varphi_n(x')| \leqslant M|x'' - x'|;$$

следовательно, если для $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, то из неравенства $|x' - x''| < \delta$ для всякого n будем иметь:

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon.$$

По теореме Арцела, из последовательности (C) можно выбрать равномерно сходящуюся на интервале (x_0, x_0+h) подпоследовательность:

$$\varphi_{n_1}(x),\ \varphi_{n_2}(x),\ \ldots,\ \varphi_{n_k}(x),\ \ldots \qquad (C')$$

Пусть предельная функция подпоследовательности (C′) будет $\varphi(x)$. Мы докажем, что $y = \varphi(x)$ является искомым решением дифференциального уравнения (1). В самом деле, во-первых, мы имеем по построению $\varphi_n(x_0) = y_0$; следовательно, $\varphi(x_0) = y_0$. Докажем затем, что при $x = \bar{x}$, где $\bar{x}$ — любая точка интервала (x_0, x_0+h), $\varphi(x)$ имеет производную, равную $f(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности функции $f(x, y)$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$ найдётся область D_1, $|x - \bar{x}| \leqslant \delta$, $|y - \bar{y}| \leqslant \delta$, для каждой точки (x, y) которой выполняется неравенство:

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $h_1 = \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2M}\right)$. Возьмём приращение Δx, удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant |\Delta x| < h_1$, и будем рассматривать его как постоянное. Выберем N_1 таким, чтобы при $k \geqslant N_1$ имело место неравенство:

$$|\varphi(x) - \varphi_{n_k}(x)| < \frac{\delta}{4}$$

[этот выбор возможен вследствие равномерной сходимости последовательности (C′)] и чтобы расстояние между абсциссами угловых точек ломаных $y = \varphi_{n_k}(x)$ было меньше $\frac{h_1}{2}$ $\left(\text{это имеет место, если } n_k > \frac{2h}{h_1}\right)$. Оценим отношение

$$\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x} + \Delta x) - \varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}.$$

В силу наших предположений, при $k > N_1$ все угловые точки ломаных $y = \varphi_{n_k}(x)$, звенья которых своими проекциями покрывают интервал между $\bar{x}$ и $\bar{x} + \Delta x$, лежат внутри области D_1; в самом деле, ввиду выбора Δx, имеем для названного интервала:

$$|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| = |\varphi(x) - \bar{y}| \leqslant h_1 M < \frac{\delta}{2}, \quad |\varphi_{n_k}(x) - \bar{y}| < \frac{3\delta}{4}$$

[если приращение $\Delta x < 0$, то левая часть интервала $(\bar{x} + \Delta x, \bar{x})$ покрыта проекцией звена (x_i, x_{i+1}), где $x_i \leqslant x + \Delta x < x_{i+1}$; но так как $x_{i+1} - x_i < \frac{h_1}{2}$,

то $|\varphi_{n_k}(x_i)-\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)|<\frac{\delta}{4M}M=\frac{\delta}{4}$; таким образом, $|\varphi_{n_k}(x_i)-\bar{y}|<\delta$, $|x_i-\bar{x}|<h_1+\frac{h_1}{2}<\delta$]. Таким образом, все угловые коэффициенты отрезка ломаной между $\bar{x}$ и $\bar{x}+\Delta x$ заключены между числами $f(\bar{x},\bar{y})-\frac{\varepsilon}{2}$ и $f(\bar{x},\bar{y})+\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда, в силу леммы, получаем:

$$f(\bar{x},\bar{y})-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}<f(\bar{x},\bar{y})+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Находим, далее, такое число $N_2>N_1$, чтобы при $k\geqslant N_2$ было

$$|\varphi_{n_k}(x)-\varphi(x)|<|\Delta x|\frac{\varepsilon}{4}$$

(такой выбор возможен, так как последовательность (C) равномерно сходится). Наконец, оцениваем разность $\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi(\bar{x})}{\Delta x}$. Имеем при $k\geqslant N_2$

$$\left|\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi(\bar{x})}{\Delta x}-f(\bar{x},\bar{y})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi(\bar{x})}{\Delta x}-\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}\right|+\left|\frac{\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}-f(\bar{x},\bar{y})\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi_{n_k}(\bar{x}+\Delta x)}{\Delta x}\right|+\left|\frac{\varphi(\bar{x})-\varphi_{n_k}(\bar{x})}{\Delta x}\right|+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Полученное неравенство

$$\left|\frac{\varphi(\bar{x}+\Delta x)-\varphi(\bar{x})}{\Delta x}-f(\bar{x},\bar{y})\right|<\varepsilon,$$

справедливое для достаточно малого Δx, показывает, что производная от $\varphi(x)$ в точке $\bar{x}$ существует и равна $f(\bar{x},\bar{y})$. Так как $\bar{x}$ была произвольная точка отрезка (x_0, x_0+h), мы имеем для всякого x, $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$,

$$\varphi'(x)=f(x,y).$$

Теорема доказана.

Заметим ещё раз, что без дополнительных ограничений на функцию $f(x,y)$ (например, условия Липшица) нельзя доказать единственности полученного решения.

Пример 1. Уравнение $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$.

Начальные значения: $x=0$, $y=0$; область R: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$. В этой области $|f(x,y)|\leqslant 2$, т. е. $M=2$. За h надо взять наименьшее из чисел $a=1$, $\frac{b}{M}=\frac{1}{2}$, т. е. $h=\frac{1}{2}$. Последовательные приближения будут,

во всяком случае, сходиться при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$. Составляем их:

$$y_0 = 0,$$

$$y_1 = \int_0^x (x^2 + y_0^2)\,dx = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2 = \int_0^x (x^2 + y_1^2)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3 = \int_0^x (x^2 + y_2^2)\,dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{189} + \frac{x^{14}}{3969}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59\,535}.$$

При $x = \frac{1}{2}$ имеем $y_2 = 0{,}04179$, и в пределах пяти знаков y_3 не даёт лучшей точности.

6. Метод последовательных приближений может быть применён и в комплексной области. Пусть дано уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ теперь уже аналитическая функция двух комплексных переменных в области

$$|x - x_0| < r, \quad |y - y_0| < \rho$$

и непрерывная, когда x и y находятся на соответствующих окружностях.

Пусть в этой области $|f(x, y)| \leqslant M$. Требуется найти решение уравнения (1), в котором y есть аналитическая функция x, принимающая при $x = x_0$ значение y_0. Обозначим:

$$R = \min\left(r, \frac{\rho}{M}\right).$$

Тогда мы можем утверждать: *существует решение уравнения* (1), *голоморфное в круге*:

$$|x - x_0| < R. \tag{A}$$

Для доказательства заметим, что мы и в настоящем случае можем заменять наше дифференциальное уравнение интегральным:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx, \tag{13}$$

где интеграл (не зависящий от пути интеграции) может быть взят по любой простой дуге, соединяющей точки x_0 и x_1 и не выходящей из круга $|x - x_0| < R$,

в частности по прямолинейному отрезку $\overline{x_0x}$, что мы и будем предполагать в дальнейшем. Все оценки § 1, п. 1 остаются справедливыми (с заменой h на R и b на ρ), причём $y_0(x)$ будет оставаться при $|x| \leqslant R$ и при любом n в круге $|y_n - y_0| \leqslant \rho$. Оценки (8) показывают, что ряд (7) из аналитических функций от x равномерно сходится при $|x| \leqslant R$; следовательно, его сумма $y(x)$ представляет решение уравнения (1), голоморфное, в силу теоремы Вейерштрасса, в круге $|x - x_0| < R$, что и требовалось доказать.

Винтнер недавно заметил, что оценка (A) является наилучшей возможной для совокупности дифференциальных уравнений (1) в том смысле, что можно построить последовательность дифференциальных уравнений, для которых истинный радиус голоморфизма для решения будет сколь угодно близок к числу, определяемому формулой (A). Дадим пример такой последовательности:

$$\frac{dy}{dx} = \left(y + 2^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m+1}} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

начальные значения $x = 0$, $y = 0$.

Принимаем в правой части то значение радикала, которое при $y = 0$ даёт действительное значение $2^{\frac{1}{m(m+1)}}$. Так как x явно не входит в уравнения, можно считать, что $r = \infty$; далее, бином $\left(y + 2^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m+1}}$ голоморфен при $|y| < 2^{\frac{1}{m}}$ и непрерывен при $|y| = 2^{\frac{1}{m}}$; следовательно, $\rho = 2^{\frac{1}{m}}$. Наконец, максимум правой части при $|y| \leqslant 2^{\frac{1}{m}}$:

$$M = \left(2^{\frac{1}{m}} + 2^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{m+1}} = 2^{\frac{1}{m}},$$

откуда по формуле (A) $R = 1$ для всех уравнений последовательности. Фактически решение с начальными значениями $x = 0$, $y = 0$,

$$y = -2^{\frac{1}{m}} + \left[\frac{m}{m+1}\, x + 2^{\frac{1}{m+1}}\right]^{\frac{m+1}{m}}$$

голоморфно в круге $|x| < 2^{\frac{1}{m+1}} \cdot \frac{m+1}{m} = R_m$, причём $\lim\limits_{m \to \infty} R_m = 1$, то-есть при достаточно большом m истинный радиус круга голоморфизма сколь угодно близок к значению, которое даётся формулой (A).

ЗАДАЧА.

51. Найти методом последовательных приближений приближённые решения уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2$$

(найти три приближения, не считая y_0), если:

а) Начальная точка $x = y = 0$, начальная область $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. В каком интервале гарантирована сходимость?

б) Начальные условия $x = 0$, $y = 1$; начальная область $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. (Чему равно h?) Найти три приближения.