§ 2. Особые точки.

1. Рассуждения предыдущего параграфа неприменимы, если условия А) и В) не выполнены. В этом параграфе мы рассмотрим случаи, когда не выполняется условие А). Допустим, что в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ является неограниченной. Могут представиться два случая:

Первый случай: $f(x, y) \to \infty$, когда $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Тогда функция $\frac{1}{f(x, y)}$ стремится к нулю. Примем её значение равным 0 в точке (x_0, y_0).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

и предположим, что для него условия теоремы Коши в окрестности точки (x_0, y_0) выполнены; мы получим интегральную кривую, проходящую через точку (x_0, y_0); уравнение её будет иметь вид:

$$x = \varphi(y);$$

при $x = x_0$, $y = y_0$ имеем $\frac{dx}{dy} = 0$; таким образом, интегральная кривая имеет в точке (x_0, y_0) вертикальную касательную.

Для семейства интегральных кривых точка (x_0, y_0) никакими другими геометрическими особенностями обладать не будет.

Пример 2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$; при $x = x_0$, $y = 0$ функция не ограничена, но в уравнении $\frac{dx}{dy} = y$ правая часть при этих начальных данных обращается в нуль.

Искомое решение: $y^2 = 2(x - x_0)$ — парабола с вертикальной касательной при $x = x_0$.

Второй случай: $f(x, y)$, являясь неограниченной в окрестности точки (x_0, y_0), не имеет единственного предела ∞, когда точка (x, y) стремится к (x_0, y_0), между тем как в остальных точках этой окрестности или $f(x, y)$ или $\frac{1}{f(x, y)}$ непрерывна. Такова, например, функция $\frac{ax + by}{cx + dy}$ в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$. В самом деле, когда точка (x, y) стремится к $(0, 0)$, оставаясь на прямой $ax + by = 0$, эта функция равна 0; если же точка (x, y) лежит на прямой $cx + dy = 0$, функция не определена (нуль в знаменателе), но вблизи этой прямой она бесконечно велика; по другим направлениям функция имеет другие предельные значения. Мы скажем, что в точке $(0, 0)$ наша функция имеет изолированную особую точку типа $\frac{0}{0}$.

2. Разберём течение интегральных кривых в окрестности особой точки только что указанного типа для простого уравнения [1]):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}. \tag{14}$$

Мы предположим, что $ad-bc\neq 0$. При помощи линейной подстановки с постоянными коэффициентами и определителем, отличным от нуля,

$$\xi=\alpha x+\beta y, \quad \eta=\gamma x+\delta y, \tag{15}$$

преобразуем уравнение, стараясь подобрать постоянные α, β, γ, δ так, чтобы преобразованное уравнение имело наиболее простой вид, именно, чтобы в числителе нового уравнения был одночлен $\lambda\eta$, а в знаменателе — одночлен $\mu\xi$ (λ и μ — некоторые постоянные).

Из (15) мы получаем:

$$d\xi=\alpha\,dx+\beta\,dy, \quad d\eta=\gamma\,dx+\delta\,dy;$$

составляя производную $\frac{d\eta}{d\xi}$, заменяем в её выражении в числителе и знаменателе dx и dy через пропорциональные им, согласно (14), величины $cx+dy$ и $ax+by$. Получаем:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy)+\beta(ax+by)}.$$

Мы ставили целью преобразования (15), чтобы числитель имел вид $\lambda\eta$, т. е. чтобы имело место тождество:

$$\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)=\lambda\eta=\lambda(\gamma x+\delta y).$$

Приравнивая в первой и последней частях этого тождества коэффициенты при x и y, получаем для определения γ и δ два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\gamma(c-\lambda)+\delta a=0,\\ \gamma d+\delta(b-\lambda)=0.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Эти два однородных линейных уравнения будут иметь не равные нулю решения только при условии, что определитель системы равен нулю, т. е. что

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & a \\ d & b-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\lambda^2-(b+c)\lambda+bc-ad=0. \tag{17}$$

---

[1]) Уравнение (14) однородное, его можно проинтегрировать в элементарных функциях, но мы здесь дадим качественный анализ решений этого уравнения, ставя вопрос о течении всех кривых вблизи особой точки и не интересуясь конкретными численными значениями переменных вдоль каждой интегральной кривой.

Аналогично, приравнивая знаменатель правой части уравнения (15) выражению $\mu\xi$ и затем сравнивая в полученном тождестве коэффициенты при x и y, получим для α и β систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \alpha(c-\mu)+\beta a=0, \\ \alpha d+\beta(b-\mu)=0. \end{aligned}\right\} \tag{16'}$$

Чтобы из этой системы получить не равные нулю значения α и β, опять мы должны потребовать равенство нулю определителя, т. е.

$$\mu^2-(b+c)\mu+bc-ad=0. \tag{17'}$$

Мы видим, что λ и μ должны быть корнями одного и того же уравнения (17) или (17').

Предположим сначала, что это уравнение имеет различные корни $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Подставляя один из них, например λ_1, в уравнения (16), а другой, λ_2, в уравнения (16'), мы найдём из первой системы (с точностью до множителя пропорциональности) γ и δ, а из второй α и β. Легко убедиться в том, что определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

В самом деле, если, например, $a \neq 0$, то из первого из уравнений (16) имеем $\frac{\delta}{\gamma}=-\frac{c-\lambda_1}{a}$, а из первого из уравнений (16'): $\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{c-\lambda_2}{a}$; следовательно

$$\frac{\delta}{\gamma} \neq \frac{\beta}{\alpha},$$

т. е. $\alpha\delta-\beta\gamma \neq 0$. Итак, уравнение (14), при помощи подстановки (15), где α, β, γ, δ уже определены привелось к виду:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\lambda_1\eta}{\lambda_2\xi}. \tag{18}$$

Как известно из аналитической геометрии, геометрический смысл подстановки (15) (однородного аффинного преобразования) состоит в переходе от осей x, y к новым (вообще говоря, косоугольным) осям ξ и η и в преобразовании масштаба на каждой оси. Но так как нам важна общая качественная картина, мы не будем вычислять положения и масштабов новых осей и будем на наших чертежах изображать эти оси как прямоугольные.

Уравнение (18) легко интегрируется разделением переменных:

$$\frac{d\eta}{\eta}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{d\xi}{\xi},$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \ln|\eta|=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ln|\xi|+\ln|C|, \\ \eta=C|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

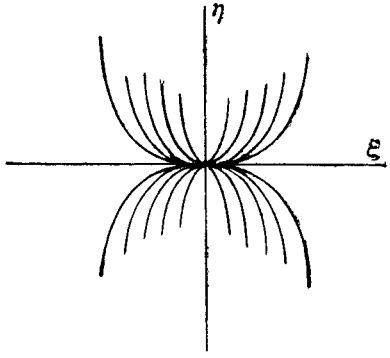
Исследуем решение (19) для разных случаев значений корней λ_1 и λ_2 уравнения (17).

1) Корни λ_1 и λ_2 действительны и одного знака. Можно без ограничения общности предположить, что $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. Все интегральные кривые (19) проходят через начало координат $\xi = \eta = 0$; все они касаются в начале оси ξ, так как

$$\left.\frac{d\eta}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \pm\frac{\lambda_1}{\lambda_2} C\,|\xi|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1}\Big|_{\xi=0} = 0.$$

Но, кроме семейства (19), существует ещё интегральная кривая, проходящая через начало, которая соответствует решению $\xi = 0$ (как указано в § 2 главы I, в исследовании геометрической картины такие решения надо принимать во внимание).

Расположение кривых около начала имеет вид, показанный на черт. 6. Особая точка дифференциального уравнения с таким расположением интегральных кривых называется *узлом*. Через узел проходит бесконечное множество интегральных кривых.



Черт. 6.

Пример 3. $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{2\eta}{\xi}$, $\eta = C\xi^2$. (Семейство парабол с вертикальными осями и с вершинами в особой точке, ось $O\xi$ ($\eta = 0$) и решение $\xi = 0$ — ось $O\eta$).

2) Корни λ_1 и λ_2 действительны и разных знаков. Тогда $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -k < 0$. Интегральные кривые даются уравнением

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -k\,\frac{\eta}{\xi};$$

его решение

$$\eta = C\,|\xi|^{-k}.$$

Два решения этого уравнения, проходящие через начало, суть $\xi = 0$, $\eta = 0$. Остальные интегральные кривые не проходят через особую точку; течение кривых показано на черт. 7. Особая точка такого типа называется *седловиной*.

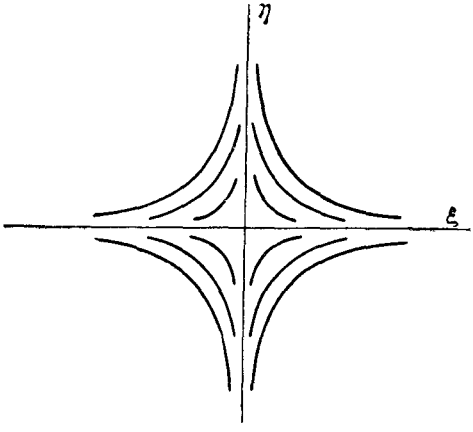
Пример 4. $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\eta}{\xi}$. Общий интеграл $\xi\eta = C$ (семейство гипербол, отнесённых к осям, и две асимптоты).

3) Корни λ_1 и λ_2 комплексные сопряжённые:

$$\lambda_1 = p + qi, \quad \lambda_2 = p - qi.$$

При определении коэффициентов γ, δ из уравнений (16) и α, β из уравнений (16′) можно так распорядиться постоянным множителем, который остаётся неопределённым, что γ и δ будут числа комплексные, сопряжённые соответственно с α, β. Обозначая комплексное сопряжённое с числом z через $\bar{z}$, мы получим подстановку:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \alpha x + \beta y,\\ \eta &= \bar{\alpha} x + \bar{\beta} y.\end{aligned}\right\} \quad (15)$$



Черт. 7.

Переменные ξ, η неудобны, так как принимают при действительных x, y комплексные (сопряжённые) значения; поэтому делаем ещё одну линейную замену переменных (с определителем $\neq 0$):

$$u = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad v = \frac{\xi - \eta}{2i},$$

или

$$\xi = u + iv, \quad \eta = u - iv.$$

Легко видеть, что u и v связаны аффинным преобразованием с x, y и что при действительных x, y переменные u, v также принимают действительные значения. Внося переменные u, v в уравнение (18), получим:

$$\frac{du - i\,dv}{du + i\,dv} = \frac{(p + qi)(u - iv)}{(p - qi)(u + iv)},$$

или

$$du\,(pv - qu) = dv\,(pu + qv). \quad (20)$$

Проще всего интегрировать уравнение (20) следующим образом: переписываем его в виде:

$$q\,(u\,du + v\,dv) = p\,(v\,du - u\,dv);$$

если разделить обе части на $u^2 + v^2$,

$$q\,\frac{u\,du + v\,dv}{u^2 + v^2} = p\,\frac{v\,du - u\,dv}{u^2 + v^2},$$

то мы, очевидно, будем иметь:

$$\frac{1}{2}\,d\ln(u^2 + v^2) + \frac{p}{q}\,d\,\mathrm{arctg}\,\frac{v}{u} = 0,$$

откуда

$$\ln\sqrt{u^2+v^2}+\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{v}{u}=\ln C,$$

или

$$\sqrt{u^2+v^2}=Ce^{-\frac{p}{q}\operatorname{arctg}\frac{v}{u}}.$$

Наконец, вводя на плоскости u, v полярные координаты: $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$, находим:

$$r=Ce^{-\frac{p}{q}\varphi}.$$

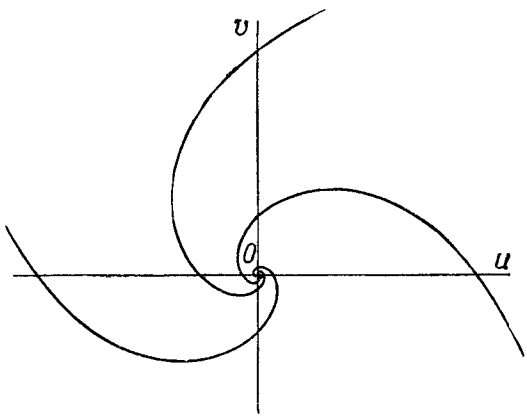
Это — семейство логарифмических спиралей в плоскости u, v с асимптотической точкой в начале; все кривые примыкают к началу, но без определённой предельной касательной, — они делают около точки $(0,0)$ бесконечное количество оборотов. Такая особая точка называется *фокусом*. Вид кривых в окрестности этой точки дан на черт. 8.

4) Корни λ_1 и λ_2 чисто мнимые (сопряжённые): $\lambda_1=qi$, $\lambda_2=-qi$. Теми же преобразованиями, как и в случае 3), приходим к уравнению (20), в котором, однако, $p=0$, т. е. имеем:

$$u\,du+v\,dv=0.$$

Интегрируем:

$$u^2+v^2=C.$$



Черт. 8.

Семейство интегральных кривых есть семейство замкнутых кривых (кругов в координатах u, v), окружающих особую точку; через самую точку не проходит ни одной интегральной кривой. Такая точка называется *центром* (черт. 9).

Рассмотрим теперь случай равных (действительных) корней: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. Тогда из уравнения (17) имеем:

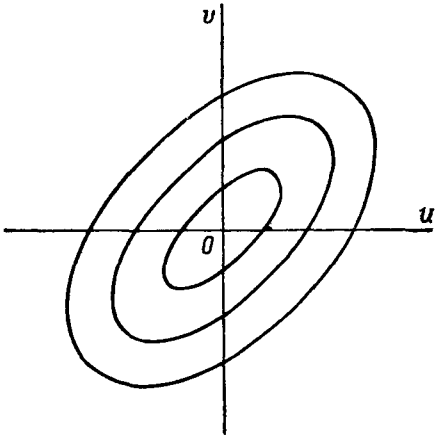
$$2\lambda=b+c,\quad \lambda=\frac{b+c}{2}.$$

Подставляя это значение в систему (16′), получим:

$$-\frac{b-c}{2}\alpha+a\beta=0,\quad \alpha d+\frac{b-c}{2}\beta=0. \tag{16''}$$

Могут представиться два случая:

5) Не все коэффициенты при α и β в равенствах (16″) равны нулю. Тогда из уравнений (16″) только одно независимое, так как определитель равен $\frac{1}{4}[(b-c)^2+4ad]$, но выражение в квадратных скобках есть дискриминант уравнения (17), равный нулю, в силу условия равенства корней этого уравнения. При этом, согласно условию, хотя бы одно из равенств (16″) не есть тождество; пусть это будет первое; берём одно из его решений, например $\alpha=a$, $\beta=\frac{b-c}{2}$. Итак, мы можем ввести новое переменное



Черт. 9.

$$\xi=ax+\frac{b-c}{2}y. \quad (15')$$

Аналогичного преобразования для η мы не можем сделать, так как у нас получилось бы то же самое выражение (с точностью до постоянного множителя), и определитель подстановки был бы равен нулю. Поэтому за второе переменное мы возьмём

$$\eta=y. \quad (15'')$$

Определитель подстановки (15′), (15″) есть a; он не равен нулю. В самом деле, дискриминант уравнения (17)

$$D=(b+c)^2-4(bc-ad)=(b-c)^2+4ad$$

равен нулю (условие равенства корней); если $a=0$, то $b-c=0$, и первое уравнение (16″) есть тождество, против условия. Следовательно, формулы (15′), (15″) определяют аффинное преобразование.

Введём переменные ξ, η в уравнение (14). В формуле

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\gamma(cx+dy)+\delta(ax+by)}{\alpha(cx+dy)+\beta(ax+by)},$$

в силу (15″), получаем $\gamma=0$, $\delta=1$, т. е. числитель равен $ax+by$. Что касается знаменателя, то выражение ξ в формуле (15′) подобрано так, чтобы он имел тот же вид, что и в (18), т. е. был равен $\lambda\xi$, где λ в данном случае есть кратный корень уравнения (17). Итак, получаем:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{ax+by}{\lambda\xi},$$

Вводя в числитель переменные ξ, η, получим:

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\frac{b+c}{2}\eta}{\lambda\xi}, \quad \text{или} \quad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\lambda\eta}{\lambda\xi},$$

или, наконец,

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\eta}{\xi}+\frac{1}{\lambda}.$$

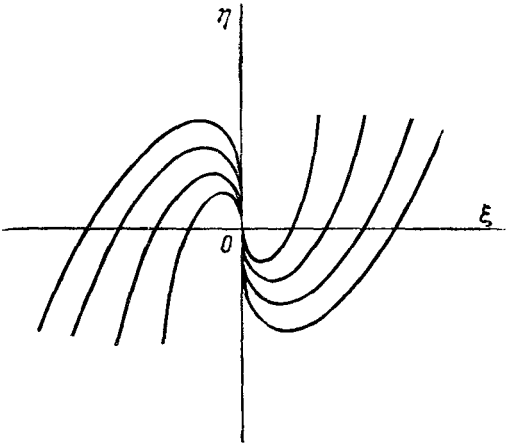
Это — однородное уравнение (оно также является линейным); его общее решение есть

$$\eta=\frac{1}{\lambda}\xi\ln\xi+C\xi.$$

Кроме того, имеем в качестве интегральной кривой $\xi=0$. Опять все кривые проходят через начало; угловой коэффициент их касательных в начале есть

$$\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta\eta}{\Delta\xi}=\lim_{\Delta\xi\to 0}\left\{\frac{1}{\lambda}\ln|\Delta\xi|+C\right\}=\pm\infty,$$

где плюс или минус зависят от знака λ; все кривые имеют определённую касательную — ось $O\eta$. Это опять *узел* [он отличается от узла случая 1) тем, что там одна интегральная кривая имела касательную, отличную от всех остальных]. Форма кривых вблизи особой точки показана на черт. 10 (в предположении $\lambda>0$).



Черт. 10.

6) Все коэффициенты уравнений (16″) равны нулю, т. е. $a=d=0$, $b=c=\lambda$. Уравнение (14) имеет тогда следующий вид:

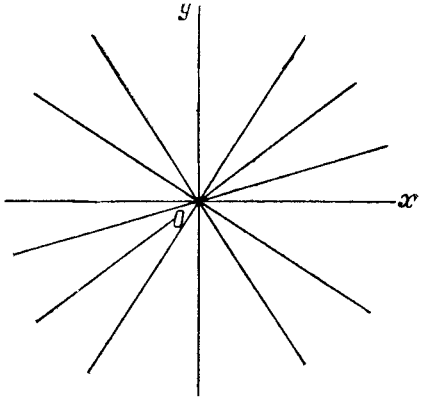
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

Его общее решение:

$$y=Cx.$$

Опять все кривые проходят через начало с определённым направлением касательных, но, в противоположность предыдущим случаям, угловые коэффициенты этих касательных могут иметь всевозможные значения (черт. 11). Эта точка тоже называется *узлом* (*дикритический узел*).

3. Те типы распределения интегральных кривых, которые мы установили в окрестности особой точки $x = 0$, $y = 0$ для уравнения (13), имеют место для гораздо более широких классов уравнений. Исследование интегральных кривых в окрестности особой точки дифференциального уравнения первого порядка впервые проведено Пуанкаре (1881 г.), затем продолжено Бендиксоном (1900 г.).



Черт. 11.

Мы изложим результаты, относящиеся к наиболее простым случаям, следуя в основном методу Фроммера (Frommer, Math. Ann., т. 99, 1928).

Рассматриваем уравнение вида:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \qquad (21)$$

где P и Q непрерывны в окрестности точки (x_0, y_0), причём

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0.$$

Без ограничения общности можно предполагать особую точку расположенной в начале координат, так как общий случай всегда можно привести к этому путём введения новых переменных x', y':

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'.$$

Предполагая, что такая замена уже произведена, и обозначая переменные снова через x, y, мы будем считать, что

$$P(0, 0) = Q(0, 0) = 0. \qquad (22)$$

Мы предположим, кроме того, что функции P и Q не имеют других общих нулей, кроме значения $x = 0$, $y = 0$, в некоторой окрестности начала и что они в этой окрестности [включая точку (0, 0)] имеют непрерывные частные производные по x и по y. В силу этих условий, в тех точках рассматриваемой окрестности, где $Q(x, y) \neq 0$, существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения (21), определяемое этой точкой как начальной; в тех точках, где $Q(x, y) = 0$, но $P(x, y) \neq 0$, существует единственное решение $x = \psi(y)$ уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{Q}{P}$; следовательно, в окрестности начала через каждую точку (кроме особой) проходит единственная интегральная кривая.

Из предположения непрерывности частных производных от $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ следует, что в окрестности точки (0, 0) функции P и Q могут быть представлены в виде:

$$P(x, y) = ax + by + \varphi(x, y), \quad Q(x, y) = cx + dy + \psi(x, y), \qquad (23)$$

где φ и ψ, при бесконечно малых первого порядка x и y, являются бесконечно малыми высшего порядка, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\varphi(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\psi(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0. \tag{24}$$

Условия (23) и (24), очевидно, выражают то обстоятельство, что P и Q допускают в точке (0, 0) полный дифференциал. В простейшем случае, когда P и Q — многочлены, φ и ψ будут не ниже второго порядка малости. Заметим, наконец, что из условия (24) следует, что все частные производные первого порядка от φ и ψ имеют в точке (0, 0) нулевые значения. В самом деле, мы получаем, например,

$$\varphi'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{\varphi(0, y)}{y} = 0, \quad \psi'_y(0, 0) = 0. \tag{24'}$$

Предполагая, что $ad - bc \neq 0$, попытаемся применить к уравнению (21) прежнюю линейную подстановку (15) с целью привести линейные члены в выражениях (23) к простейшему виду. Для определения коэффициентов подстановки мы снова приходим к уравнению (17). При этом мы можем пользоваться только подстановками с действительными коэффициентами, так как функции P и Q вообще не определены для мнимых значений аргументов. Рассмотрим в связи с этим отдельно различные случаи.

1) Корни уравнения (17) действительны, отличны от нуля и различны; пусть они будут λ_1 и λ_2. При помощи подстановки (15) с действительными коэффициентами и определителем, отличным от нуля, можно привести уравнение (21) к виду, где линейные члены функций P и Q будут $\lambda_1\eta$ и $\lambda_2\xi$. Вводя для новых переменных вместо ξ и η прежние обозначения x и y, мы приводим, таким образом, уравнение (21) к виду:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_1 y + \varphi_1(x, y)}{\lambda_2 x + \psi_1(x, y)}, \tag{21'}$$

где φ_1 и ψ_1 получаются как линейные комбинации от φ и ψ с постоянными коэффициентами и с линейной заменой переменных, следовательно, также удовлетворяют предельным соотношениям (24).

Предположим, что уравнение (21) имеет интегральные кривые, приближающиеся к особой точке с определённым направлением касательной; пусть угловой коэффициент предельного положения этой касательной в начале координат есть k. Переписываем уравнение (21) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a + b\dfrac{y}{x} + \dfrac{\varphi(x, y)}{x}}{c + d\dfrac{y}{x} + \dfrac{\psi(x, y)}{x}}.$$

Когда x стремится к нулю вдоль рассматриваемой интегральной кривой, то угловой коэффициент секущей $\frac{y}{x}$ имеет пределом k; в силу соотношений (24), $\frac{\varphi}{x}$ и $\frac{\psi}{x}$ стремятся к нулю, $\frac{dy}{dx}$, по условию, стремится к k. Таким образом, мы получаем для возможных значений k квадратное уравнение:

$$k = \frac{a + bk}{c + dk}, \tag{25}$$

или

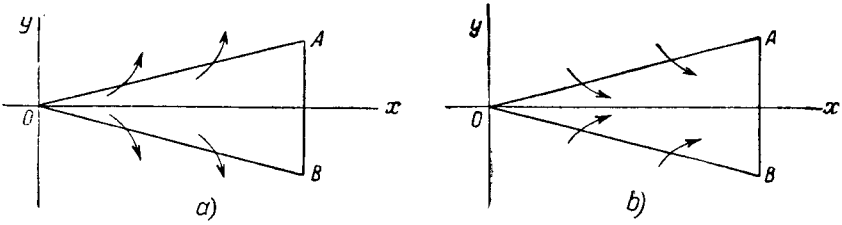
$$dk^2 + (c - b)k - a = 0. \tag{26}$$

Итак, в нашем случае для углового коэффициента k существует не более двух возможных значений. Условие действительности этих значений k, т. е. необходимое условие существования интегральных кривых, приближающихся к особой точке с определённой касательной, состоит в неотрицательности дискриминанта квадратного уравнения (26):

$$(b-c)^2+4ad \geqslant 0.$$

Но это — то же условие, при выполнении которого корни уравнения (7) действительны. В нашем случае это условие выполнено со знаком $>$. Для уравнения в форме (21′), корни квадратного уравнения (26) обращаются соответственно в 0 и в ∞. Итак, интегральные кривые уравнения (21′), приближающиеся к началу координат с определённой касательной, должны касаться в начале или оси Ox или оси Oy.

Переходим к исследованию интегральных кривых сначала в окрестности оси Ox. Построим равнобедренный треугольник OAB (черт. 12) с биссектри-



Черт. 12.

сой, совпадающей с положительным направлением Ox, углом при вершине 2α и высотой h (числу α мы будем придавать значения между 0 и $\frac{\pi}{2}$, а число h может быть выбрано сколь угодно малым). Рассмотрим направления поля $\frac{dy}{dx}$, определяемого уравнением (21′), на сторонах OA и OB и сравним эти направления с наклоном указанных сторон, который, очевидно, равен для каждой из них $\frac{y}{x}$. Для этого составляем разность:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\frac{\lambda_1 y+\varphi_1}{\lambda_2 x+\psi_1}-\frac{y}{x}=$$

$$=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\,yx+(x\varphi_1-y\psi_1)}{\lambda_2 x^2+x\psi_1}=\frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)\frac{y}{x}+\left(\frac{\varphi_1}{\lambda_2 x}-\frac{y\psi_1}{\lambda_2 x^2}\right)}{1+\frac{\psi_1}{\lambda_2 x}}. \qquad (27)$$

В силу условий (24), вторые слагаемые в числителе и в знаменателе последней части равенств (27) могут быть сделаны сколь угодно малыми по абсолютной величине при достаточно малом h, так что знак правой части равенства (27) зависит от знака члена $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)\frac{y}{x}$. Рассмотрим отдельно две возможности: а) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1>0$ и б) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1<0$ (знак равенства исключён, так как мы предполагаем корни уравнения (17) неравными).

а) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 > 0$. В этом случае выражение, стоящее в левой части равенства (27), положительно на стороне $OA\left(\text{где } \frac{y}{x} > 0\right)$ и отрицательно на стороне OB; кроме того, очевидно, что на OA имеем $\frac{dy}{dx} > 0$, а на OB имеем $\frac{dy}{dx} < 0$. Следовательно, тангенс наклона касательных к интегральным кривым на стороне OA больше $\operatorname{tg}\alpha$, а на стороне OB меньше $-\operatorname{tg}\alpha$ (черт. 12, *а*). Интегральные кривые, проходящие через точки периметра OAB, не могут из него выйти при убывании x, ибо, как это следует из направления поля на сторонах OA и OB, они не могут их пересечь, переходя изнутри треугольника наружу. Оставаясь, таким образом, внутри OAB, они, в силу доказанного в п. 3 предыдущего параграфа, могут быть продолжены до любой близости границы области D, т. е. вплоть до особой точки O. При этом тангенс угла наклона секущей, проведённой из точки O, к такой интегральной кривой, равный $\frac{y(x)}{x}$, по абсолютной величине меньше $\operatorname{tg}\alpha$; так как α может быть выбрано сколь угодно малым, то мы находим:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \lim_{x \to 0} \frac{y(x)}{x} = 0,$$

т. е. все найденные интегральные кривые касаются в начале координат оси Ox.

б) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 < 0$. При достаточно малом h теперь мы будем иметь:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} < 0 \text{ на } OA, \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} > 0 \text{ на } OB;$$

соответствующее расположение направлений поля дифференциального уравнения показано на черт. 12, *b*. Интегральная кривая, проходящая через точку A, очевидно, будет вся расположена вне треугольника OAB; кривые, проходящие через точки стороны OA, входя в OAB, при возрастающем x, при дальнейшем его возрастании не могут пересечь сторон OA и OB (что противоречило бы найденному нами направлению поля на этих сторонах), следовательно, они должны пересечь сторону AB. При этом, благодаря непрерывной и однозначной зависимости от начальных условий при перемещении начальной точки от A к O точка выхода будет монотонно перемещаться по стороне AB от A вниз. Пусть предельная точка для этих точек будет A' с координатами (h, y_0); интегральная кривая через точку A' при убывании x не может пересечь сторону AO между A и O, так как если бы она пересекла её в некоторой точке C, то кривые, проходящие через точки отрезка OC, близкие к точке C, пересекали бы сторону AB ниже A', и A' не была бы предельной точкой; равным образом, интегральная кривая через точку A' не может пересечь отрезок OB, так как иначе кривые, проходящие через близкие к A' точки отрезка AA', тоже пересекали бы отрезок OB, а, по определению точки A', они пересекают отрезок OA и выходят при этом (при убывающем x) из OAB. Итак, кривая через точку A' не может при убывании x выйти из треугольника OAB, следовательно, она может быть продолжена вплоть до точки O; рассуждение, приведённое для случая а), показывает, что эта кривая, входя в точку O, касается оси Ox. Аналогично найдётся на той же стороне AB точка $B'(h, \overline{y}_0)$ такая, что интегральные кривые, проходящие через точки промежутка BB', пересекают при убывании x сторону OB и выходят при этом из треугольника OAB, а кривая

через точку B' входит в особую точку, касаясь оси Ox. При этом очевидно, что $y_0 \geqslant \bar{y}_0$.

Докажем, наконец, что точки A' и B' совпадают или что $y_0 = \bar{y}_0$, т. е. в рассматриваемом случае только одна кривая входит в особую точку, касаясь оси Ox. Для этого введём в уравнение (21′) переменные x, $u = \frac{y}{x}$; уравнение примет вид:

$$x\frac{du}{dx} = \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)u + \frac{\varphi_1(x, ux) - u\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x}}{1 + \frac{\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x}} \equiv \Phi(x, u). \qquad (21'')$$

При произведённом преобразовании треугольник OAB (черт. 12, b) переходит в прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant h$, $-\operatorname{tg}\alpha \leqslant u \leqslant \operatorname{tg}\alpha$. Интегральной кривой, которая в координатах (x, y) входила в начало координат, касаясь оси Ox, в координатах (x, u) соответствует кривая, примыкающая к точке $(0, 0)$ [так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{y}{x} = \lim\limits_{x\to 0} u = 0$]. Точкам A' и B' на стороне AB треугольника OAB соответствуют точки $\bar{A}'$, $\bar{B}'$ на стороне $x = h$ прямоугольника плоскости (x, u); их ординаты будут соответственно $u_0 = \frac{y_0}{u}$ и $\bar{u}_0 = \frac{\bar{y}_0}{h}$. Чтобы доказать, что точки A' и B' совпадают, достаточно доказать, что $u_0 = \bar{u}_0$.

Итак, допустим, что уравнение (21″) имеет два решения $u(x)$ и $\bar{u}(x)$, такие, что

$$\lim_{x\to 0} u = \lim_{x\to 0} \bar{u} = 0, \qquad u(h) = u_0, \qquad \bar{u}(h) = \bar{u}_0, \qquad u_0 > \bar{u}_0. \qquad (A)$$

Мы имеем два тождества:

$$x\frac{du}{dx} = \Phi(x, u), \qquad x\frac{d\bar{u}}{dx} = \Phi(x, \bar{u}).$$

Вычитая их почленно, получаем:

$$x\frac{d(u - \bar{u})}{dx} = \Phi(x, u) - \Phi(x, \bar{u}) = (u - \bar{u})\,\Phi'_u(x, \bar{\bar{u}}), \qquad u > \bar{\bar{u}} > \bar{u}. \qquad (28)$$

Производная $\Phi'_u(x, u)$ имеет вид:

$$\Phi'_u(x, u) = \left[1 + \frac{\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x}\right]^{-2}\left\{\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 + \frac{\varphi'_{1y}(x, ux)}{\lambda_2} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x} - \frac{u\psi'_{1y}(x, ux)}{\lambda_2}\right] \cdot \left[1 + \frac{\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x}\right] -$$

$$\left. - \frac{\psi'_{1y}(x, ux)}{\lambda_2}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1\right)u + \frac{\varphi_1(x, ux) - u\psi_1(x, ux)}{\lambda_2 x}\right]\right\}.$$

В силу условий, наложенных на функции φ и ψ [существование непрерывных производных и соотношений (24) и (24′)], эта производная есть непрерывная функция, в частности при $x=0$, и мы находим:

$$\Phi'_u(0, u) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 < 0$$

[последнее неравенство соответствует рассматриваемому случаю б)]. Если h выбрать достаточно малым, то для всех значений x, $0 \leqslant x \leqslant h$, будет, в силу непрерывности Φ'_u, иметь место неравенство:

$$\Phi'_u(x, u) < -\rho,$$

где ρ — постоянное число, $0 < \rho < 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Итак, из тождества (28) получаем неравенство:

$$x\frac{d(u-\bar{u})}{dx} < -\rho(u-\bar{u}), \quad \text{или} \quad \frac{d(u-\bar{u})}{u-\bar{u}} < -\rho\frac{dx}{x}.$$

(Знаменатель левой части не обращается в нуль, так как две интегральные кривые уравнения (21″) не могут иметь общих точек, кроме точки $x=0$, $u=0$.) Интегрируем последнее неравенство между x и h $(0<x<h)$, получаем:

$$\ln\frac{u_0-\bar{u}_0}{u(x)-\bar{u}(x)} < -\rho\ln\frac{h}{x},$$

или

$$u(x)-\bar{u}(x) > (u_0-\bar{u}_0)\left(\frac{h}{x}\right)^{\rho}.$$

Последнее неравенство показывает, что если $u_0-\bar{u}_0>0$, то при стремлении x к нулю разность в левой части неограниченно возрастает, вопреки первому из предположений (А). Наше утверждение доказано.

Мы можем теперь легко выяснить расположение интегральных кривых в разбираемом нами случае (когда корни уравнения (17) действительны и различны). Существуют два типа расположения интегральных кривых около особой точки, в зависимости от знаков λ_1 и λ_2.

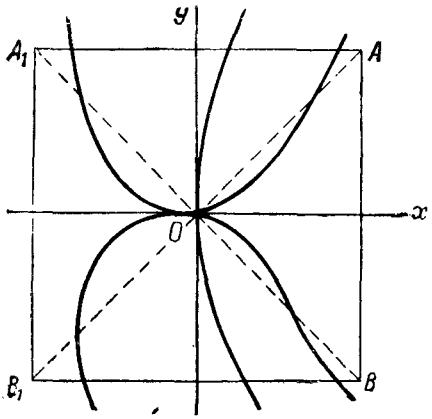
I тип. λ_1 и λ_2 одинакового знака. Без ограничения общности можно предположить, что

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0.$$

Построим равнобедренный треугольник OAB, симметричный относительно положительной полуоси Ox, с углом при вершине $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ (черт. 13). При достаточно малой высоте h этого треугольника, в силу того, что $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 > 0$, все входящие в него интегральные кривые входят в особую точку, касаясь положительной полуоси Ox. Аналогично, из рассмотрения симметричного треугольника OA_1B_1, расположенного в сторону отрицательной полуоси абсцисс, мы заключаем, что все кривые, входящие в этот треугольник, войдут в начало, касаясь оси абсцисс. Далее, перепишем уравнение (21′) в виде:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\lambda_2 x + \psi_1(x, y)}{\lambda_1 y + \varphi_1(x, y)} \tag{21‴}$$

и рассмотрим треугольник OAA_1. Так как $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1<0$, то существует только одна интегральная кривая, касающаяся оси Oy; все остальные интегральные кривые выйдут из OAA_1 через стороны OA и OA_1 и, попав в треугольники OAB и OA_1B_1, тоже войдут в начало, касаясь оси Ox. Аналогичное положение имеет место в треугольнике OBB_1. Итак, *все интегральные кривые из достаточно малой окрестности особой точки входят в особую точку с определённой касательной*. Мы имеем *узел* (черт. 13).

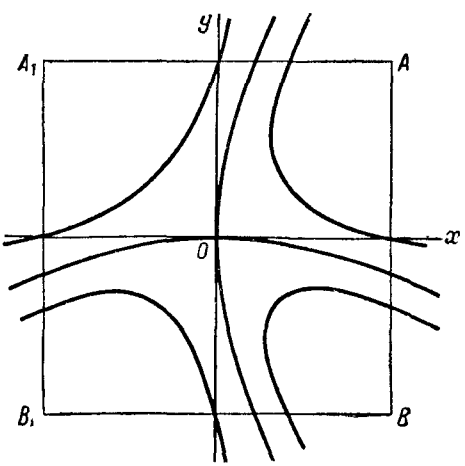


Черт. 13.

II тип. λ_1 и λ_2 противоположного знака. Предполагаем

$$\lambda_1>0>\lambda_2.$$

Опять строим треугольники OAB, OA_1B_1, OAA_1, OBB_1 (черт. 14). Для уравнения (21′) имеем неравенство $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1<0$. Таким образом, в каждом из треугольников OAB и OA_1B_1 окажется только по одной интегральной кривой, входящей в особую точку, касаясь оси Ox. Аналогично, для уравнения (21‴) имеем: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1<0$; поэтому в треугольниках OAA_1 и OBB_1 опять имеем по одной интегральной кривой, входящей в начало; эти кривые касаются Oy. Итак, *в начало координат входят только четыре интегральные кривые*. Особая точка есть *седловина* (черт. 14).



Черт. 14.

2) Корни уравнения (17) — комплексные сопряжённые: $\lambda_1=p+iq$, $\lambda_2=p-iq$, $p\neq 0$, $q>0$. Мы видели, что в соответствующем случае, при помощи подстановки с действительными коэффициентами, уравнение (13) могло быть приведено к виду:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{pv-qu}{pu+qv}. \qquad (20)$$

Применяя ту же подстановку к уравнению (21), мы приведём линейные члены к той же форме, какую они имеют в правой части уравнения (20); обозначая новые переменные попрежнему через x и y, мы можем рассматривать в данном случае уравнение (21) в виде:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{py-qx+\varphi_2(x,y)}{px+qy+\psi_2(x,y)}\equiv\frac{P_1(x,y)}{Q_1(x,y)}, \qquad (29)$$

где φ_2 и ψ_2 — опять бесконечно малые порядка выше первого при бесконечно малых x и y. Для исследования интегральных кривых уравнения (29) целесообразно ввести полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Мы получаем:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r(P_1\sin\varphi + Q_1\cos\varphi)}{P_1\cos\varphi - Q_1\sin\varphi}$$

или, в раскрытом виде (деля числитель и знаменатель на r),

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{pr + \varphi_2\sin\varphi + \psi_2\cos\varphi}{-q + \dfrac{\varphi_2\cos\varphi - \psi_2\sin\varphi}{r}} \equiv -\frac{pr}{q}\,\frac{1+\omega(r,\varphi)}{1+\omega_1(r,\varphi)}, \tag{30}$$

где

$$\omega = \frac{\varphi_2\sin\varphi + \psi_2\cos\varphi}{pr} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \frac{\varphi_2\cos\varphi - \psi_2\sin\varphi}{-qr},$$

в силу условий (24), стремятся к нулю вместе с r. Выберем r_0 достаточно малым, чтобы при $r \leqslant r_0$ второй множитель последней части равенств (30) заключался между границами $1-\alpha$ и $1+\alpha$ ($\alpha < 1$ — произвольное положительное число). Тогда знак правой части (30) будет совпадать со знаком $-\dfrac{p}{q}$; положим для определённости $-\dfrac{p}{q} < 0$ и рассмотрим при возрастающем φ течение интегральной кривой, определяемой начальными значениями (r_0, φ_0). Радиус-вектор будет монотонно убывать, так как $\dfrac{dr}{d\varphi} < 0$; при этом, в силу выбора r_0, будут иметь место неравенства:

$$-\frac{p}{q}(1+\alpha)\,r < \frac{dr}{d\varphi} < -\frac{p}{q}(1-a)\,r,$$

откуда

$$-\frac{p}{q}(1+\alpha)\,d\varphi < \frac{dr}{r} < -\frac{p}{q}(1-\alpha)\,d\varphi.$$

Интегрируем последние неравенства от φ_0 до $\varphi > \varphi_0$; получаем:

$$-\frac{p}{q}(1+\alpha)(\varphi-\varphi_0) < \ln\frac{r}{r_0} < -\frac{p}{q}(1-\alpha)(\varphi-\varphi_0),$$

или

$$r_0 e^{-\frac{p}{q}(1+\alpha)(\varphi-\varphi_0)} < r < r_0 e^{-\frac{p}{q}(1-\alpha)(\varphi-\varphi_0)}.$$

Интегральная кривая при изменении φ от φ_0 до $+\infty$ заключена между двумя логарифмическими спиралями; она *приближается к особой точке, совершая бесчисленное множество оборотов*. Особая точка представляет собой *фокус*.

Рассмотрим ещё случай равных корней $\lambda_1 = \lambda_2$. Линейные части после приведения к простейшей форме пусть имеют вид такой же, как в случае (6) предыдущего раздела. Итак, уравнение имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \varphi(x, y)}{x + \psi(x, y)}. \tag{31}$$

Относительно φ и ψ мы сделаем более сильные предположения, чем до сих пор: мы предположим, что функции

$$\frac{\varphi(x, ux)}{x^2} = \Phi(x, u) \quad \text{и} \quad \frac{\psi(x, ux)}{x^2} = \Psi(x, u)$$

являются непрерывными функциями своих аргументов при $0 \leqslant x \leqslant \delta$, где δ — положительное число[1]), и что они имеют в той же области непрерывные производные по u [эти условия будут, в частности, выполнены, если $\varphi(x, y)$ имеет вид $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \bar{\varphi}(x, y)$, где A, B, C — постоянные и $\bar{\varphi}(x, y)$ — бесконечно малая порядка выше второго при бесконечно малых x, y, у которой частная производная по y имеет порядок малости выше первого; тогда $\Phi(x, u) = A + 2Bu + Cu^2 + \frac{\bar{\varphi}(x, ux)}{x^2}$, $\frac{\partial\Phi}{\partial u} = 2B + 2Cu + \frac{\bar{\varphi}'_y(x, ux)}{x}$; легко видеть, что обе эти функции непрерывны для достаточно малых значений x, включая $x = 0$; аналогично для $\Psi(x, y)$]. Делаем в уравнении (31) замену переменного $y = ux$; уравнение примет вид:

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{ux + \varphi(x, ux)}{x + \psi(x, ux)},$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{\dfrac{\varphi(x, ux)}{x^2} - u\dfrac{\psi(x, ux)}{x^2}}{1 + \dfrac{\psi(x, ux)}{x^2}} \equiv \frac{\Phi(x, u) - u\Psi(x, u)}{1 + x\Psi(x, u)}. \tag{32}$$

При достаточно малых значениях x знаменатель, очевидно, в нуль не обращается; числитель является при $x = 0$ непрерывной функцией; правая часть, ввиду непрерывности Φ'_u и Ψ'_u, удовлетворяют условию Липшица по u в любой ограниченной области $0 \leqslant x \leqslant \delta$, $-M \leqslant u \leqslant M$. Следовательно, все точки оси u, $x = 0$, $u = u_0$, являются обыкновенными для уравнения (32); через каждую проходит единственная интегральная кривая. Возвращаясь к уравнению (31), мы видим, что *через точку $x = 0$, $y = 0$ проходит бесконечное множество интегральных кривых, причём для каждого значения u_0, $-\infty < u_0 < +\infty$, существует единственная интегральная кривая, имеющая в начале координат касательную, уравнение которой есть $y = u_0 x$.* Мы снова имеем дикритический *узел*.

Мы оставили здесь без рассмотрения тот случай равных корней $\lambda_1 = \lambda_2$, когда линейные члены приводятся к виду, соответствующему случаю 5) предыдущего раздела; можно показать, что и для уравнения (21) начало координат будет в таком случае узел. Далее, мы не рассматриваем случай *чисто мнимых* λ_1 и λ_2; здесь может иметь место как *центр*, так и *фокус*; члены первого порядка уравнения (21) не определяют характера особой точки и требуется дополнительное исследование. Также нами оставлен в стороне случай нулевых корней, равно как и все случаи, когда главные члены P и Q в окрестности особой точки имеют порядок выше первого относительно x и y. Все эти случаи рассмотрены Бендиксоном в предположении, что P и Q разлагаются в окрестности особой точки в степенные ряды по x и y, и Фроммером — в более общих предположениях.

---

[1]) Число δ выбирается так, чтобы в полосу $0 < x \leqslant \delta$, $-\infty < u < +\infty$ плоскости (x, u) не попало ни одной особой точки преобразованного уравнения.

Пример 5. Найти расположение и характер особых точек для уравнения Якоби

$$(-6x+9y)\,dx+(6x-6y)\,dy+(-4x+5y)(x\,dy-y\,dx)=0.$$

Разрешаем уравнение относительно производной:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6x-9y-4xy+5y^2}{6x-6y-4x^2+5xy}.$$

Прежде всего, замечаем особую точку (0, 0); для определения её характера составляем уравнение (17):

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 6 \\ -6 & -9-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

или $\lambda^2+3\lambda-18=0$, откуда $\lambda=-\frac{3\pm\sqrt{81}}{2}$, $\lambda_1=+3>0$, $\lambda_2=-6<0$. Корни действительные разных знаков; особая точка есть седловина. Направления касательных к интегральным кривым определяется из уравнения:

$$k=\frac{6-9k}{6-6k},$$

$$2k^2-5k+2=0,$$

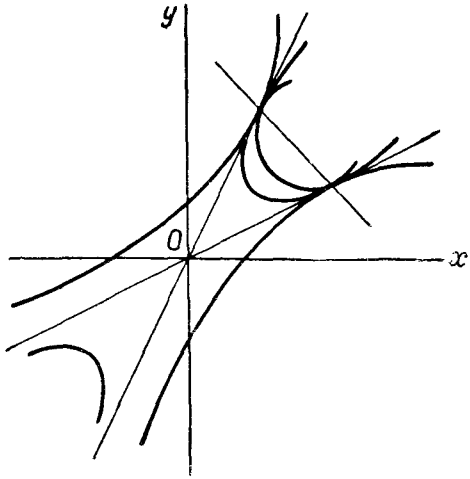
$$k_1=2,\quad k_2=\frac{1}{2}.$$

(На основании теории уравнения Якоби можно предвидеть, что по этим направлениям входят в начало координат две из трёх интегральных прямых.)

Для нахождения остальных особых точек приравниваем нулю числитель и знаменатель дроби в правой части уравнения:

$$6x-9y-4xy+5y^2=0,$$

$$6x-6y-4x^2+4xy=0.$$



Черт. 15.

Решения этих уравнений, кроме $x=0$, $y=0$, будут: $x=1$, $y=2$, $x=2$, $y=1$. Чтобы исследовать характер особой точки (1, 2), вводим новые переменные: $x=x_1+1$, $y=y_1+2$; уравнение принимает вид:

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{-2x_1+7y_1-4x_1y_1+5y_1^2}{8x_1-y_1-4x_1^2+5x_1y_1}.$$

Оно имеет особую точку $x_1=0$, $y_1=0$.

Для определения характера этой точки пишем уравнение (17):

$$0=\begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-15\lambda+54,$$

$$\lambda=\frac{15}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}},\quad \lambda_1=9,\quad \lambda_2=6.$$

Оба корня одного знака; особая точка — узел. Уравнение для угловых коэффициентов касательных к интегральным кривым:

$$k=\frac{-2+7k}{8-k}, \quad k^2-k-2=0, \quad k_1=2, \quad k_1=-1.$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что особая точка (2, 1) также является узлом. Ход интегральных кривых приблизительно представлен на черт. 15.

§ 3. Интегрирующий множитель.

1. Всякое уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной,

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{1}$$

можно переписать в дифференциальной форме:

$$dy-f(x, y)\,dx=0,$$

или, умножая обе части на некоторую функцию $N(x, y)$, в более симметричном виде:

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0. \tag{33}$$

Рассмотрим частный случай, когда левая часть уравнения (33) представляет полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$:

$$M\,dx+N\,dy\equiv dU\equiv\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy.$$

В этом случае уравнение (33) называется *уравнением в полных* (точных) *дифференциалах*. Последнее тождество равносильно двум:

$$M=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad N=\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{34}$$

Если в уравнение (33) подставить вместо y решение уравнения (1), то мы будем иметь $dU=0$, откуда

$$U(x, y)=C \tag{35}$$

для значений x и y, соответствующих этому решению (C — постоянное); и обратно, для функции y, определяемой уравнением (35), имеем $dU=0$. Итак, уравнение (35), содержащее произвольное постоянное, является интегралом уравнения (33) в полных дифференциалах.

Для существования решения $y(x)$ дифференциального уравнения (1), принимающего при $x=x_0$ значение y_0, достаточно, чтобы уравнение (35) определяло y как неявную функцию от x, т. е. чтобы в точке (x_0, y_0) мы имели $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}=N(x_0, y_0)\neq 0$; в таком