Оба корня одного знака; особая точка — узел. Уравнение для угловых коэффициентов касательных к интегральным кривым:

$$k=\frac{-2+7k}{8-k}, \quad k^2-k-2=0, \quad k_1=2, \quad k_1=-1.$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что особая точка (2, 1) также является узлом. Ход интегральных кривых приблизительно представлен на черт. 15.

§ 3. Интегрирующий множитель.

1. Всякое уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной,

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{1}$$

можно переписать в дифференциальной форме:

$$dy-f(x, y)\,dx=0,$$

или, умножая обе части на некоторую функцию $N(x, y)$, в более симметричном виде:

$$M(x, y)\,dx+N(x, y)\,dy=0. \tag{33}$$

Рассмотрим частный случай, когда левая часть уравнения (33) представляет полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$:

$$M\,dx+N\,dy\equiv dU\equiv\frac{\partial U}{\partial x}\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}\,dy.$$

В этом случае уравнение (33) называется *уравнением в полных* (точных) *дифференциалах*. Последнее тождество равносильно двум:

$$M=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad N=\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{34}$$

Если в уравнение (33) подставить вместо y решение уравнения (1), то мы будем иметь $dU=0$, откуда

$$U(x, y)=C \tag{35}$$

для значений x и y, соответствующих этому решению (C — постоянное); и обратно, для функции y, определяемой уравнением (35), имеем $dU=0$. Итак, уравнение (35), содержащее произвольное постоянное, является интегралом уравнения (33) в полных дифференциалах.

Для существования решения $y(x)$ дифференциального уравнения (1), принимающего при $x=x_0$ значение y_0, достаточно, чтобы уравнение (35) определяло y как неявную функцию от x, т. е. чтобы в точке (x_0, y_0) мы имели $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{x_0, y_0}=N(x_0, y_0)\neq 0$; в таком

случае решение $y(x)$, проходящее через точку (x_0, y_0), определится из уравнения:

$$U(x, y) = U(x_0, y_0);$$

если $N(x_0, y_0) = 0$, а $M(x_0, y_0) \neq 0$, то соотношение (35) определит x как функцию от y; исключение в смысле существования и единственности решения составляют только точки, в которых $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$; это — особые точки уравнения (33) (ср. предыдущий параграф).

Найдём признак, по которому для данного уравнения (33) можно судить, принадлежит ли оно к классу уравнений в точных дифференциалах. Из равенств (34), предполагая существование соответствующих производных, получаем два выражения для $\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y}$; приравнивая их, получаем необходимое условие[1]):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{36}$$

Покажем, что условие (36) является также достаточным, а именно, предполагая его выполненным, найдём функцию $U(x, y)$, удовлетворяющую соотношениям (34). Мы имеем $\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y)$, откуда интегрируя по x от x_0 до x и считая y постоянным, получаем:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)\, dx + \varphi(y). \tag{34'}$$

Построенная функция (34′) при всяком φ удовлетворяет первому из соотношений (34). Покажем, что при выполнении условия интегрируемости (36) можно найти такую функцию $\varphi(y)$, чтобы выполнялось и второе соотношение (34). Мы находим из формулы (34′), применяя правило дифференцирования интеграла по параметру:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x, y)}{\partial y}\, dx + \varphi'(y).$$

Используя тождество (36), получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}\, dx + \varphi'(y) = N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y).$$

---

[1]) Впервые это условие получил знаменитый математик Леонард Эйлер (1707 — 1783) член Петербургской академии наук.

Это выражение окажется равным $N(x, y)$, если положить

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

откуда одно из значений $\varphi(y)$ есть

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy.$$

Итак, функция $U(x, y)$ найдена; приравнивая её произвольному постоянному, получаем общий интеграл уравнения (33):

$$U(x, y) \equiv \int_{x_0}^{x} M(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)\,dy = C. \tag{37}$$

Примечание. На практике оказывается проще дифференцировать равенство (34′) по y и, заменяя $\frac{\partial U}{\partial y}$ известной функцией $N(x, y)$, определить из полученного равенства $\varphi'(y)$, а затем найти φ квадратурой.

Пример 6. $(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0$. Здесь $M = 3x^2 + 6xy^2$, $N = 6x^2y + 4y^3$, $\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy = \frac{\partial N}{\partial x}$. Условие (36) выполнено. $\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2$, $U = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$; вычисляем $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} - 6x^2y = N - 6x^2y = 4y^3, \quad \varphi(y) = y^4 + C.$$

Полный интеграл $U \equiv x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

ЗАДАЧИ.

Проверить, что левая часть данных уравнений является полным дифференциалом, и решить эти уравнения:

52. $\frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} = 0.$

53. $\frac{2x\,dx}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0.$

54. $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0.$

55. $\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right)dx + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0.$

2. Если левая часть уравнения (33) не есть полный дифференциал, возникает вопрос — нельзя ли найти такую функцию $\mu(x, y)$, по умножении на которую левая часть уравнения (33) станет полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$. Такая функция μ назы-

вается *интегрирующим множителем*. Таким образом, если μ — интегрирующий множитель, мы имеем:

$$\mu(M\,dx+N\,dy)=dU; \qquad \mu M=\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \mu N=\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{38}$$

Первый вопрос: для всякого ли уравнения первого порядка существует интегрирующий множитель? Из теоремы существования мы знаем, что при известных условиях уравнение (1) имеет общий интеграл [1]):

$$U(x, y)=C.$$

Дифференцируем это равенство по x, предполагая, что y есть функция x; таким образом, мы исключим C и придём к дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=0, \qquad \text{или} \qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial U}{\partial x}\Big|\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Это уравнение должно быть тождественно с исходным уравнением (33), которое мы напишем в виде:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}.$$

Сравнивая эти оба вида одного и того же дифференциального уравнения, мы приходим к равенству:

$$-\frac{M}{N}=-\frac{\partial U}{\partial x}\Big|\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \text{или} \qquad \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{M}=\frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{N}=\mu$$

(через μ мы обозначили общую величину двух последних отношений).

Из последних равенств имеем:

$$\mu M=\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \mu N=\frac{\partial U}{\partial y},$$

т. е. μ является интегрирующим множителем. Итак, *всякое дифференциальное уравнение первого порядка*, удовлетворяющее некоторым условиям, *имеет интегрирующий множитель.*

Число интегрирующих множителей данного уравнения бесконечно. В самом деле, пусть μ есть какой-нибудь интегрирующий множитель уравнения (33), а $U(x, y)=C$ есть интеграл этого уравнения. Тогда $\mu_1=\varphi(U)\mu$, где φ — произвольная дифференцируемая функция, является также интегрирующим множителем. В самом деле, выражение

$$\mu_1(M\,dx+N\,dy)=\varphi(U)\mu(M\,dx+N\,dy)=\varphi(U)\,dU$$

---

[1]) В п. 4 § 1 мы доказали существование общего интеграла, где параметр $C=y_0$ есть начальная ордината интегральной кривой; вопрос о законности дифференцирования функции, приравниваемой C, отложен до главы VII.

является полным дифференциалом от функции

$$\Phi(U) = \int \varphi(U)\,dU.$$

Следовательно,

$$\mu_1 = \varphi(U)\,\mu \tag{39}$$

есть интегрирующий множитель уравнения (33).

Докажем, что *всякий интегрирующий множитель уравнения* (33) *даётся формулой* (39).

В самом деле, пусть, кроме интегрирующего множителя μ, имеется ещё какой-то интегрирующий множитель μ_1. Мы имеем:

$$\mu\,(M\,dx + N\,dy) = dU, \tag{38}$$

$$\mu_1\,(M\,dx + N\,dy) = dV, \tag{38'}$$

где V — некоторая функция от x, y; раскрывая последние тождества, имеем:

$$\mu M = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \mu N = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \mu_1 M = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \mu_1 N = \frac{\partial V}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, якобиан функций U и V тождественно равен нулю, а так как $\frac{\partial U}{\partial y} \not\equiv 0$, то между этими функциями существует зависимость вида:

$$V = \psi(U).$$

Равенство (38′) даёт тогда:

$$\mu_1\,(M\,dx + N\,dy) = \psi'(U)\,dU = \psi'(U)\,\mu\,(M\,dx + N\,dy),$$

откуда

$$\mu_1 = \psi'(U)\,\mu,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если известны два существенно различных* (т. е. не различающихся только постоянным множителем) *интегрирующих множителя* μ *и* μ_1 *уравнения* (33), *то общий интеграл получается без всякой квадратуры в виде*:

$$\frac{\mu_1}{\mu} = \text{const}.$$

В самом деле, по доказанному, последнее равенство имеет вид: $\Phi(U) = C$, а это и есть общий интеграл уравнения (33).

3. Нахождение интегрирующего множителя. Из определения интегрирующего множителя имеем:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

или

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x} - M\frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu, \tag{40}$$

или же, деля обе части равенства (40) на μ,

$$N\frac{\partial \ln\mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln\mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{40'}$$

Мы получили в виде (40) или (40′) уравнение в частных производных для определения неизвестной функции μ. Задача интегрирования такого уравнения в общем случае не проще, чем задача решения уравнения (33). Конечно, нам достаточно знать только одно частное решение уравнения (40); иногда, по каким-нибудь особенностям уравнения (40), удаётся найти такое частное решение, и тогда интеграция уравнения (33) сводится к квадратурам.

Рассмотрим, например, случай, когда существует интегрирующий множитель, являющийся функцией одного только x. В этом случае $\frac{\partial\mu}{\partial y} = 0$, и уравнение (40′) обращается в такое:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \tag{41}$$

Ясно, что для существования интегрирующего множителя, не зависящего от y, необходимо и достаточно, чтобы правая часть была функцией одного x; в таком случае $\ln\mu$ найдётся квадратурой.

Пример 7.

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0.$$

Здесь

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = 1, \quad \mu = e^x.$$

Уравнение

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + e^x(x^2 + y^2)\,dy = 0$$

есть уравнение в точных дифференциалах. Интегрируем его:

$$U = \int e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \varphi(y) =$$

$$= y\int e^x(2x + x^2)\,dx + \frac{y^3}{3}e^x + \varphi(y) = ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) + \varphi(y).$$

Для нахождения $\varphi(y)$ вычисляем $\frac{\partial U}{\partial y}$ и приравниваем его μN:

$$e^x(x^2 + y^2) + \varphi'(y) = e^x(x^2 + y^2),$$

откуда

$$\varphi'(y) = 0,$$

и общий интеграл нашего уравнения есть

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$

Рассмотрим частный случай интегрирующего множителя, зависящего только от x, когда $N = 1$; в этом случае уравнение имеет вид:

$$dy - f(x, y)\,dx = 0. \tag{42}$$

Уравнение (41) примет вид: $\frac{d\ln\mu}{dx} = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, с условием, что $\frac{\partial f}{\partial y}$ есть функция одного x,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \varphi(x);$$

в таком случае $f(x, y)$ имеет вид:

$$f(x, y) = \varphi(x)y + \psi(x),$$

т. е. *уравнение*, написанное в виде (42) *и допускающее интегрирующий множитель, зависящий только от x, есть уравнение линейное.*

Из уравнения (41) имеем:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = -\varphi(x), \quad \mu = e^{-\int\varphi(x)\,dx}.$$

Переходя к обозначениям главы I для линейного уравнения, приходим к заключению:

Линейное уравнение $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ имеет интегрирующий множитель $\mu = e^{\int P\,dx}$.

Здесь мы имеем ещё один способ интегрирования линейного уравнения. Аналогично получим условие того, что дифференциальное уравнение допускает интегрирующий множитель, зависящий только от y, и самое выражение этого множителя.

Пример 8. Уравнение $\frac{dy}{dx} - y \operatorname{tg} x = \cos x$ (задача 32 на стр. 40) имеет интегрирующий множитель $e^{-\int \operatorname{tg} x\, dx} = \cos x$; умножая на него обе части уравнения, имеем:

$$\cos x\, dy - y \sin x\, dx - \cos^2 x\, dx = 0,$$

где левая часть есть полный дифференциал; интегрируя, находим:

$$y \cos x - \int \cos^2 x\, dx = C,$$

или

$$y \cos x - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x = C$$

— общий интеграл.

Заметим, что *разделение переменных сводится к умножению на некоторый интегрирующий множитель.*

В самом деле, если дано уравнение (ср. главу I, § 2, 3):

$$M(x) N(y)\, dx + P(x) Q(y)\, dy = 0,$$

то для разделения переменных мы умножаем обе части на $\mu = \frac{1}{N(y) P(x)}$; ясно, что после умножения левая часть уравнения становится полным дифференциалом, т. е. μ есть интегрирующий множитель.

Пользуясь этим замечанием, найдём интегрирующий множитель однородного уравнения:

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0, \tag{43}$$

где M и N — однородные функции одинакового измерения m. Мы знаем, что введением новой функции $u = \frac{y}{x}$ переменные в уравнении разделяются; в самом деле, мы имеем:

$$M(x, y) = M(x, xu) = x^m M(1, u)$$

(в силу однородности) и аналогично:

$$N(x, y) = x^m N(1, u).$$

Внося эти выражения, а также $dy = x\, du + u\, dx$ в уравнение (43), получаем:

$$x^m \{[M(1, u) + N(1, u) \cdot u]\, dx + xN(1, u)\, du\} = 0.$$

Для разделения переменных надо обе части умножить на интегрирующий множитель:

$$\mu = \frac{1}{x^{m+1}[M(1, u) + N(1, u) \cdot u]},$$

или, возвращаясь к старым переменным x, y, на

$$\mu = \frac{1}{xM(x, y) + yN(x, y)}.$$

Это есть интегрирующий множитель однородного уравнения (43). Он не существует лишь в случае, если $xM + yN \equiv 0$, или если $\frac{M}{N} = -\frac{y}{x}$, т. е. для уравнения $y\,dx - x\,dy = 0$.

Пример 9.

$$(x - y)\,dx + (x + y)\,dy = 0,$$

$$\mu = \frac{1}{x(x-y) + y(x+y)} = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Умножая обе части уравнения на этот множитель и группируя члены, получаем:

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0,$$

или

$$\frac{1}{2}\,d\ln(x^2 + y^2) + d\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0,$$

откуда

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}.$$

(Ср. главу II, § 2, 2.)

На практике для нахождения интегрирующего множителя часто применяется такой приём: все члены уравнения разбиваются на две группы, для каждой из которых было бы легко усмотреть один интегрирующий множитель; затем пишут выражения наиболее общего интегрирующего множителя для каждой группы и смотрят, нельзя ли выбрать входящие в эти выражения произвольные функции так, чтобы оба интегрирующих множителя оказались равными; если это оказывается возможным, то интегрирующий множитель уравнения найден.

Пример 10. (Задача 40 главы I, стр. 41).

$$(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0.$$

Разбиваем на две группы:

$$(x\,dx) + (-y^2\,dx + 2xy\,dy) = 0.$$

У первой скобки очевиден интегрирующий множитель 1, а общее выражение интегрирующего множителя $\mu_1 = \varphi(x)$; у второй скобки очевиден интегрирующий множитель $\frac{1}{xy^2}$ (переменные разделяются); по умножении на него имеем:

$$-\frac{dx}{x} + \frac{2y\,dy}{y^2} = 0;$$

общий интеграл:

$$U_2 \equiv \frac{y^2}{x} = C.$$

Общее выражение интегрирующего множителя второй скобки есть

$$\mu_2 = \frac{1}{xy^2}\psi\left(\frac{y^2}{x}\right).$$

Теперь стараемся подобрать ψ так, чтобы μ_2 имело тот же вид, что μ_1, т. е. было функцией только от x; очевидно, для этого достаточно положить $\psi(U_2) = U_2$; итак, окончательно $\mu = \frac{1}{x^2}$. Умножаем данное уравнение на μ:

$$\frac{dx}{x} + \frac{2xy\,dy - y^2\,dx}{x^2} = 0,$$

откуда

$$\ln x + \frac{y^2}{x} = C.$$

ЗАДАЧИ.

56. $y^3\,dx + 2(x^2 - xy^2)\,dy = 0.$

57. $(x^2y^2 - 1)\,dy + 2xy^3\,dx = 0.$

58. $ax\,dy + by\,dx + x^m y^n(\alpha x\,dy + \beta y\,dx) = 0.$

59. $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0.$

60. Решить способом интегрирующего множителя задачу 34 на стр. 40:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy - x^3 + x.$$

61. То же для задачи 37 (там же):

$$x\,dy + y\,dx - xy^2 \ln x\,dx = 0.$$

62. Вывести выражение интегрирующего множителя для уравнения Бернулли.

63. Найти интегрирующий множитель уравнения

$$(2x^3 + 3x^2y + y^3 - y^3)\,dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,dy = 0,$$

имеющий вид $f(x + y)$.

64. Найти все уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

допускающие интегрирующий множитель вида XY, где X есть функция только от x, а Y — только от y.