

## ГЛАВА III.

# УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЁННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

## § 1. Уравнения первого порядка $n$ -й степени.

1. Мы видели в главе I, что общий вид уравнения первого порядка может быть записан так:

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1)$$

В настоящей главе мы часто будем предполагать, что левая часть уравнения (1) является многочленом относительно  $y'$  степени  $n$ , причём коэффициенты этого многочлена в некоторой области  $D$  плоскости  $xy$  суть непрерывные функции от  $x$  и от  $y$ , допускающие по у непрерывные частные производные.

$$F(x, y, y') \equiv A_n(x, y)y'^n + A_{n-1}(x, y)y'^{n-1} + \dots + A_0(x, y) = 0. \quad (1')$$

Уравнение вида (1') называется уравнением первого порядка  $n$ -й степени относительно  $y'$ . Затем допустим, что в области  $D$  коэффициент при старшей степени  $y'$ , т. е.  $A_n(x, y)$ , нигде не обращается в нуль. Тогда, по основной теореме высшей алгебры, уравнение (1') для всякой пары значений  $x$ ,  $y$  в рассматриваемой области имеет  $n$  решений  $y'$  (действительных или мнимых). По теореме о неявных функциях каждое из действительных решений является непрерывной функцией от  $x$  и  $y$  и имеет конечную частную производную  $\frac{dy'}{dy}$ , если для рассматриваемых значений  $x$ ,  $y$ ,  $y'$  имеем  $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$  (т. е. если для данных значений  $x$  и  $y$  уравнение (1') относительно  $y'$  не имеет кратного корня; этот последний случай будет нами разобран дальше, в теории особых решений дифференциального уравнения). Таким образом, во всякой области, в которой  $\left| \frac{\partial F}{\partial y'} \right| \geq a > 0$ ,

разрешённое относительно  $y'$  уравнение (1') удовлетворяет условию Липшица<sup>1)</sup>.

Мнимые решения для  $y'$  нам неинтересны, так как во всём этом курсе рассматриваются только такие дифференциальные уравнения, в которых независимое переменное и функция (а следовательно, и производная) принимают действительные значения. Заметим только, что мнимые решения являются попарно сопряжёнными, что поэтому число мнимых решений всегда чётное и что если при непрерывном изменении  $x$  и  $y$  пара мнимых решений  $y'$  переходит в действительные, то в момент этого перехода два решения становятся равными действительными; в самом деле, пусть эти мнимые решения будут:

$$y'_1 = \alpha(x, y) + i\beta(x, y), \quad y'_2 = \alpha(x, y) - i\beta(x, y).$$

Если при непрерывном изменении  $x$  и  $y$  эти решения переходят в действительные, то для некоторых значений  $x_0, y_0$  мы будем иметь:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \beta(x, y) = 0;$$

для этих значений  $x_0, y_0$ , очевидно, имеем:  $y'_1 = y'_2 = \alpha(x_0, y_0)$ , т. е. два равных действительных решения. Поэтому, если мы допустим, что в области  $D$  ни для каких значений  $x$  и  $y$  уравнение (1') не имеет кратных корней относительно  $y'$ , то число действительных и мнимых значений  $y'$ , определяемых уравнением (1'), для всех значений  $x, y$  в рассматриваемой области остаётся одно и то же.

<sup>1)</sup> Чтобы доказать, что функция  $y'$ , определённая уравнением (1'), удовлетворяет по  $y$  условию Липшица, достаточно допустить, что коэффициенты  $A_1(x, y)$  удовлетворяют по  $y$  условию Липшица в рассматриваемой области и что  $\left| \frac{\partial F}{\partial y'} \right| \geq a > 0$ . В самом деле, пусть значению  $y_1$  уравнение (1') при данном  $x$  ставит в соответствие значение  $y'_1$ , значению  $y_2$  — значение  $y'_2$ . Мы имеем:  $F(x, y_1, y'_1) = 0, F(x, y_2, y'_2) = 0$ . Вычитая эти равенства почленно, прибавляя и вычитая  $F(x, y_1, y'_2)$  и применяя к приращению по  $y'$  теорему Лагрижа, находим:

$$\begin{aligned} 0 &= F(x, y_1, y'_1) - F(x, y_1, y'_2) + F(x, y_1, y'_2) - F(x, y_2, y'_2) = \\ &= (y'_1 - y'_2) \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)_{y_1, y'_2} + (y'_1 - y'_2) + F(x, y_1, y'_2) - F(x, y_2, y'_2). \end{aligned}$$

Так как коэффициенты  $A_1$  удовлетворяют условию Липшица по  $y$ , то тем же свойством обладает и функция  $F$ , т. е. мы имеем:  $|F(x, y_1, y_2) - F(x, y_2, y_1)| \leq L |y_1 - y_2|$ . Поэтому последнее равенство вместе с оценкой для  $\left| \frac{\partial F}{\partial y'} \right|$  даёт:  $|y'_1 - y'_2| \leq \frac{L}{a} |y_1 - y_2|$ , т. е. условие Липшица для  $y'$  с постоянной  $\frac{L}{a}$ .

Итак, пусть в области  $D$  уравнение (1) имеет  $k$  действительных решений ( $k \leq n$ )

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad \dots, \quad y' = f_k(x, y). \quad (2)$$

Каждое из уравнений (2) есть уравнение такого вида, для которого в главе II доказано существование единственного решения (теорема Коши), проходящего через точку  $(x_0, y_0)$ ; следовательно, *уравнение (1) допускает в точности  $k$  интегральных кривых, проходящих через данную точку  $(x_0, y_0)$*  области  $D$ .

Пример 1.  $y'^2 + yy' - x^2 - xy = 0$ . Разрешая относительно  $y'$  (или разлагая левую часть на множители), получаем два уравнения: 1)  $y' = x$ , 2)  $y' = -y - x$ ; обе правые части однозначны и непрерывны во всей плоскости  $xy$ ; соответственно имеем два решения

$$1) \quad y = \frac{x^2}{2} + C; \quad 2) \quad y = Ce^{-x} - x + 1.$$

Пример 2.  $y'^2 + y^2 - 1 = 0$ . Разрешая относительно  $y'$ , имеем:  $y' = \pm \sqrt{1 - y^2}$ ; в полосе  $-1 < y < 1$  плоскости  $xOy$  оба рассматриваемых значения  $y'$  действительны и различны, при  $|y| > 1$  значения  $y'$  мнимы, и при  $y = \pm 1$  два корня уравнения для  $y'$  совпадают. Рассмотрим полосу  $-1 < y < +1$ ; через каждую точку  $(x_0, y_0)$  проходят два решения  $y'_0$ : для одного из них значение производной в этой точке  $y'_0 = +\sqrt{1 - y_0^2}$ , для другого  $y'_0 = -\sqrt{1 - y_0^2}$ . В данном случае в уравнении, разрешённом относительно  $y'$ , переменные разделяются, и мы имеем:

$$1) \quad \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx; \quad 2) \quad \frac{dy}{-\sqrt{1 - y^2}} = -dx.$$

Получаем решения: 1)  $\arcsin y = x + C$ , 2)  $\arcsin y = -x + C$ . (Под символом  $\arcsin$  мы понимаем главное значение многозначной функции  $\text{Arcsin } y$ , т. е. однозначную ветвь этой функции, ограниченную условиями  $-\frac{\pi}{2} < \arcsin y < \frac{\pi}{2}$ ). Мы получаем, таким образом, два семейства решений:

$$y = \sin(x + C), \quad \left( -\frac{\pi}{2} < x + C < \frac{\pi}{2} \right);$$

$$y = \sin(-x + C), \quad \left( -\frac{\pi}{2} < -x + C < \frac{\pi}{2} \right).$$

Возьмём начальные условия  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ; для определения произвольного постоянного  $C$  получаем уравнения:

$$y_0 = \sin(\pm x_0 + C), \quad \pm x_0 + C = \arcsin y_0, \quad C = \mp x_0 + \arcsin y_0.$$

Решения, удовлетворяющие нашему начальному условию, суть

$$y = \sin[(x - x_0) + \arcsin y_0], \quad -\frac{\pi}{2} < x - x_0 + \arcsin y_0 < \frac{\pi}{2};$$

$$y = \sin[-(x - x_0) + \arcsin y_0], \quad -\frac{\pi}{2} < -x + x_0 + \arcsin y_0 < \frac{\pi}{2}.$$

Первое семейство решений представляет семейство дуг синусоид, взятых от точки минимума до точки максимума (исключая концы); все кривые получаются из одной, например

$$y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$$

переносом параллельно оси  $Ox$ ; аналогично, второе семейство есть семейство дуг синусоид, взятых от максимума до минимума; они получаются переносом параллельно оси  $Ox$  из кривой:

$$y = \sin(-x), \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Через каждую точку полосы  $-1 < y < 1$  проходит по одной кривой каждого семейства — возрастающая кривая первого семейства и убывающая — второго.

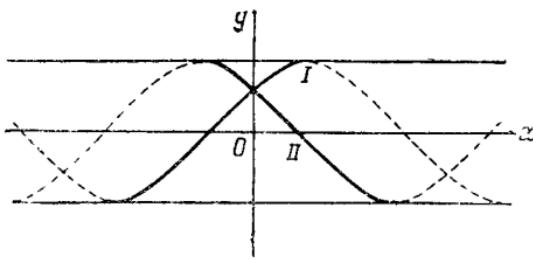
Расширим теперь область, в которой рассматриваются кривые, добавив обе пограничные прямые  $y = \pm 1$ , на которых условия Липшица не выполняются (у нас  $f(x, y) = \pm \sqrt{1 - y^2}$ ; производная  $\frac{\partial f}{\partial y} = \mp \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$  становится бесконечной при  $y \rightarrow \pm 1$ ), но правые части уравнений остаются непрерывными. Теперь нам нет необходимости ограничивать изменение аргумента пределами  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Замечая, далее, что  $\sin(-x + C) = \sin(x + \pi + C)$ , мы можем представить общее решение

одной формулой:

$$y = \sin(x + C), \\ -\infty < x < +\infty.$$

Это — семейство полных синусоид, получаемых из одной параллельным переносом вдоль оси  $x$ ; чтобы получить каждую один раз, надо

ограничить область изменения произвольного постоянного  $C$ , например  $0 \leq C < 2\pi$ . В точках максимума одной полной синусоиды кривая первого семейства переходит в кривую второго, в точке минимума имеет место обратный переход (см. пунктирные кривые на черт. 16). Но эти переходы совершаются на прямых  $y = \pm 1$ , где условия Липшица не выполнены; поэтому, применения теорему Коши, мы не можем



Черт. 16.

связать убывающую и возрастающую лугу синусоиды в одну интегральную кривую; теорема существования даёт две отдельные ветви, проходящие через каждую точку полосы (сплошные линии на черт. 16).

Между примерами 1 и 2 существует очевидное различие, если рассматривать интегральные кривые не локально — в окрестности каждой точки, где удовлетворяются условия теоремы существования, а на всём их протяжении; в примере 1 дифференциальное уравнение определяло два семейства линий, не имеющих ничего общего (одно алгебраическое, другое трансцендентное); они как бы механически соединены в одно уравнение; мы можем вообще исходить из двух совершенно произвольных уравнений вида:

$$y' - f(x, y) = 0, \quad y' - \varphi(x, y) = 0$$

и, перемножив их левые части, получить уравнение первого порядка второй степени относительно  $y'$ :

$$y'^2 - [f(x, y) + \varphi(x, y)]y' + f(x, y) \cdot \varphi(x, y) = 0,$$

которое эквивалентно двум первоначально данным уравнениям; поле его интегральных кривых получится в плоскости  $xy$  простым наложением полей обоих уравнений, причём оба эти поля вообще независимы одно от другого. Не то мы имеем во втором примере: через каждую точку некоторой области опять проходят две интегральные кривые, но они могут быть рассматриваемы как принадлежащие одному и тому же семейству. Выяснить корни этой глубокой разницы невозможно теми средствами, которыми мы здесь располагаем; надо привлечь аппарат теории аналитических функций (*аналитическая теория дифференциальных уравнений*). Отметим только окончательный результат: если левая часть уравнения (1), предполагаемая многочленом по  $y'$  с коэффициентами, рациональными относительно  $y$ , разлагается на множители низших степеней относительно  $y'$ , рациональные по  $y$  и однозначные по  $x$  во всей области её определения (мы скажем в этом случае, что левая часть уравнения (1) является *приводимым многочленом* по  $y'$  в области рациональности переменного  $y$ ), то уравнение (1) является механическим соединением уравнений, которые получим, приравнивая нулю каждый неприводимый множитель; второй случай имеет место, когда  $y'$  является иррациональной (алгебраической) функцией от  $y$ , иначе говоря, когда  $F(x, y, y')$  представляет *неприводимый многочлен* относительно  $y'$  в области рациональности  $y$ .

**2.** Общий метод интегрирования уравнений первого порядка  $n$ -й степени таков: стараемся разрешить уравнение (1) относительно  $y'$ ; в случае приводимости левой части получаем несколько уравнений низших степеней; если все неприводимые множители окажутся первой степени, то получаем  $n$  уравнений первой степени относительно  $y'$ , и задача свелась к  $n$  различным задачам, которые иногда могут быть разрешены предыдущими методами; если имеем уравнение, неприво-

димое относительно  $y'$ , то иногда его можно разрешить в радикалах; если полученное иррациональное уравнение относительно  $y'$  интегрируется в явном виде, то общее решение обычно содержит те же радикалы, что и исходное уравнение; давая в этом решении радикалам все их значения, получим все  $n$  решений исходного уравнения, а если освободиться от радикалов, то получим одно семейство интегральных кривых, к которому принадлежат все  $n$  кривых, проходящих через любую точку.

Пример 3.  $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$ . Разрешаем уравнение относительно  $y'$ :  $y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}$ . Получились два уравнения, выражаемых одной формулой с радикалом (левая часть данного уравнения неприводима). Это уравнение однородное, оно легко интегрируется подстановкой:

$$\frac{y}{x} = u, \quad u + x \frac{du}{dx} = u \pm \sqrt{u^2 - 4},$$

$$\frac{du}{\pm \sqrt{u^2 - 4}} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln(u \pm \sqrt{u^2 - 4}) = \ln x - \ln C,$$

$$u \mp \sqrt{u^2 - 4} = \frac{x}{C}.$$

Освобождаемся от радикала:

$$\frac{4C}{x} = \frac{4}{u \pm \sqrt{u^2 - 4}} = u \mp \sqrt{u^2 - 4},$$

отсюда

$$2u = \frac{x}{C} + \frac{4C}{x},$$

или, возвращаясь к начальным переменным,  $x^2 = 2C(y - 2C)$ . Легко видеть, что мы получили семейство парабол, причём через каждую точку той части плоскости, где  $y^2 - 4x^2 > 0$  (т. е. где корни уравнения для  $y'$  действительные и различные), проходят две кривые семейства (черт. 17).

### ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать уравнения (здесь введено обозначение  $\frac{dy}{dx} = p$ ):

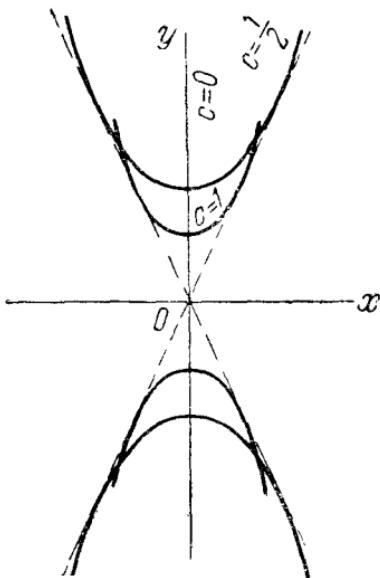
65.  $p^2y + p(x - y) - x = 0$ .

66.  $x^2p^2 - 2xyp + y^2 = x^2y^2 + x^4$ .

67.  $p^3 - (x^2 + xy + y^2)p^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)p - x^3y^3 = 0$ .

68.  $xp^2 + 2xp - y = 0$ .

Указание. В случае приводимой левой части решить каждое из получившихся уравнений отдельно; в случае неприводимости найти формулу общего решения, заключающую все интегральные кривые.



Черт. 17.