§ 2. Уравнения, не содержащие явно одного из переменных.

1. Если не разрешённое относительно производной $y' \equiv p$ уравнение не содержит явно искомой функции y, то оно имеет вид:

$$F(x, p) = 0. \tag{3}$$

Если левая часть уравнения (3) удовлетворяет условиям существования неявной функции, то в окрестности данного значения x_0 оно определяет одно или несколько решений, выражающих p как функцию от x:

$$p = f_1(x), \quad p = f_2(x), \ldots \tag{4}$$

Уравнения (4), не содержащие y, интегрируются квадратурами:

$$y = \int f_1(x)\,dx + C,$$

$$y = \int f_2(x)\,dx + C, \ldots$$

Однако фактическое разрешение уравнения (3) относительно p иногда приводит к слишком сложным функциям, а часто при помощи элементарных функций и совсем невозможно; можно, однако, указать несколько приёмов, которые в более широком классе случаев дают возможность явно выразить решение уравнения (3).

А) Уравнение (3) может быть разрешено (в элементарных функциях) относительно x; пусть мы получили при этом уравнение:

$$x = \varphi(p). \tag{5}$$

Будем рассматривать p как параметр и постараемся выразить y через тот же параметр. Мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

или

$$dy = p\,dx. \tag{6}$$

Но из уравнения (5) $dx = \varphi'(p)\,dp$; подставляя это значение в выражение (6), получаем: $dy = p\varphi'(p)\,dp$, откуда

$$y = \int p\varphi'(p)\,dp + C. \tag{7}$$

Уравнения (5) и (7) дают параметрическое уравнение семейства интегральных кривых заданного уравнения, зависящих от одного произвольного постоянного C. Иногда можно исключить p из этих уравнений и представить общее решение в виде:

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Пример 4. $e^{y'}+y'=x$. Уравнение не может быть разрешено в элементарных функциях относительно y', но оно является разрешённым относительно x: $x=e^p+p$; далее, имеем:

$$dy=p\,dx=p\,(e^p+1)\,dp$$

и, наконец,

$$y=\int p\,(e^p+1)\,dp=e^p\,(p-1)+\frac{p^2}{2}+C.$$

Итак, мы выразили x и y в функции p.

В) Может случиться, что x и p, связанные уравнением (3), выражаются через вспомогательный параметр t при помощи элементарных функций $x=\psi(t)$, $p=\chi(t)$. Мы имеем:

$$\frac{dy}{dx}=p=\chi(t),\quad dy=\chi(t)\,dx=\chi(t)\,\psi'(t)\,dt,$$

и y получается выраженным в функции того же параметра t:

$$y=\int \chi(t)\,\psi'(t)\,dt+C.$$

Это последнее уравнение вместе с уравнением $x=\psi(t)$ даёт искомое параметрическое представление семейства интегральных кривых.

Пример 5. $x^3+p^3-3xp=0$. Чтобы получить параметрические выражения для x и p, полагаем $p=tx$; подставляя это выражение в данное уравнение, находим, сокращая на x^2:

$$x(1+t^3)=3t,\quad x=\frac{3t}{1+t^3};$$

далее, $p=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

Пишем соотношение:

$$dy=p\,dx=\frac{3t^2}{1+t^3}\,\frac{3\,(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\,dt,\quad y=3\int\frac{(1-2t^3)\,3t^2\,dt}{(1+t^3)^3};$$

для интеграции вводим переменное $u=1+t^3$:

$$y=3\int\frac{(3-2u)\,du}{u^3}=9\int\frac{du}{u^3}-6\int\frac{du}{u^2}=-\frac{9}{2\,(1+t^3)^2}+\frac{6}{1+t^3}+C.$$

2. Уравнение вида

$$F(y,\ y')=0 \tag{8}$$

может быть приведено к рассмотренному типу, если считать y за независимое переменное, а x — за функцию, так как $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$. Если уравнение разрешено относительно y, т. е. имеет вид $y=\varphi(p)$, то

непосредственно ясно, что для получения x в функции p надо воспользоваться соотношением: $\frac{dy}{dx} = p$, откуда

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(p)\,dp}{p},$$

и x получается в функции параметра p квадратурой:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)\,dp}{p} + C.$$

Если нам удаётся заменить соотношение (8) двумя параметрическими уравнениями: $y = \chi(t)$, $p = \psi(t)$, то опять x получается квадратурой:

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\chi'(t)\,dt}{\psi(t)}, \qquad x = \int \frac{\chi'(t)\,dt}{\psi(t)} + C.$$

Пример 6. $y = p + \ln p$. Имеем:

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right)dp = \frac{dp}{p} + \frac{dp}{p^2}, \quad x = \ln p - \frac{1}{p} + C.$$

Пример 7. $p^3 - y^2(a - p) = 0$. Полагаем $y = pt$; из данного уравнения получаем: $p = \frac{at^2}{1+t^2}$; далее, $y = \frac{at^3}{1+t^3}$. Из соотношения $dx = \frac{dy}{p}$ получаем:

$$dx = \frac{1+t^2}{at^2}\,\frac{a(3t^2+t^4)}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{3+t^2}{1+t^2}\,dt,$$

откуда

$$x = \int \frac{3+t^2}{1+t^2}\,dt = \int dt + 2\int \frac{dt}{1+t^2} = t + 2\operatorname{arctg} t + C.$$

Уравнения

$$x = t + 2\operatorname{arctg} t + C, \quad y = \frac{at^2}{1+t^2}$$

представляют решение данного уравнения в параметрическом виде.

ЗАДАЧИ.

Найти общие интегралы уравнений:

69. $xy'^3 = 1 + y'$.

70. $p^3 - x^3(1 - p) = 0$.

71. $p^3 + y^3 - 3py = 0$.

72. $y = e^{y'}y'^2$.

73. $y^2(y' - 1) = (2 - y')^2$.

Указание. Подстановка $2 - y' = yt$ позволяет выразить y и y' рационально через t.

74. $y(1 + y'^2) = 2a$. (Удобно ввести подстановку $y' = \operatorname{tg}\varphi$.)