§ 3. Общий метод введения параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро.

1. Пусть дано неразрешённое уравнение:

$$F(x, y, p) = 0. \tag{1}$$

Если мы будем рассматривать x, y, p как декартовы координаты в пространстве, то уравнение (1) определит некоторую поверхность. Известно, что координаты точек поверхности могут быть выражены как функции двух параметров u, v; пусть нам известно такое параметрическое представление поверхности (1):

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad p = \chi(u, v). \tag{9}$$

Система уравнений (9) эквивалентна уравнению (1). Теперь вспомним, что уравнение (1) дифференциальное и что $p = \frac{dy}{dx}$, или $dy = p\,dx$. Подставляя в это последнее равенство выражения p, dy, dx, взятые из уравнений (9), получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\psi}{\partial v}\,dv = \chi(u, v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv\right].$$

Это — дифференциальное уравнение первого порядка между u и v. Принимая u за независимое переменное, а v за искомую функцию, можем написать его в виде:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\psi}{\partial u}}{\frac{\partial\psi}{\partial v} - \chi\frac{\partial\varphi}{\partial v}}.$$

Мы получили уравнение первого порядка, но уже разрешённое относительно производной; если мы найдём его общее решение в виде:

$$v = \omega(u, C),$$

то два первых уравнения (9) дадут:

$$x = \varphi\{u, \omega(u, C)\}, \quad y = \psi\{u, \omega(u, C)\},$$

т. е. общее решение уравнения (1), выраженное в параметрической форме (u — параметр, C — произвольное постоянное). Это преобразование (9) обыкновенно применяется в случае, если уравнение (1) легко разрешается относительно x или y; тогда в представлении (9) за параметры естественно взять y и p или x и p.

Рассмотрим сначала уравнение:

$$y = f(x, p). \tag{10}$$

Соотношение $dy = p\,dx$, если принять за параметры x и p, даст нам: $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp = p\,dx$, или

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = p. \tag{11}$$

Мы получили уравнение между x и p, разрешённое относительно $\frac{dp}{dx}$; пусть его общее решение будет:

$$p = \varphi(x, C). \tag{12}$$

Внося это выражение в формулу (10), получим общее решение искомого уравнения:

$$y = f\{x, \varphi(x, C)\}.$$

Примечание 1. Уравнение (11) можно получить также из уравнения (10), если дифференцировать обе его части по x, причём p рассматривается как функция x, и $\frac{dy}{dx}$ заменяется через p. Таким образом, мы имеем здесь новый способ сведения уравнения (10) к более простому уравнению (11) при помощи дифференцирования.

Примечание 2. Получив общий интеграл уравнения (11), мы должны помнить, что p в выражении (12) есть вспомогательное переменное; исключив его из (11) и (10), мы получаем общее решение уравнения (10) без дальнейших интеграций. Было бы ошибочным рассматривать равенство (12) как дифференциальное уравнение, полагая в нём $p = \frac{dy}{dx}$, ибо при интеграции этого уравнения вошло бы в решение второе произвольное постоянное, и мы вместо данного уравнения (10) нашли бы решение уравнения второго порядка:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y'}y'' = y',$$

которое получается из уравнения (11), если считать в нём

$$p = \frac{dy}{dx}.$$

2. Рассмотрим теперь уравнение:

$$x = f(y, p). \tag{13}$$

Можно воспользоваться соотношением $dy = p\,dx$, вводя в него в качестве новых вспомогательных переменных y и p; можно также получить уравнение, разрешённое относительно производной от иско-

мой функции, дифференцируя обе части уравнения (13) по y и принимая во внимание, что $\frac{dy}{dx}=p$, или $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$; при этом мы находим:

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy}.$$

Мы получили дифференциальное уравнение между y и p; найдя его общее решение $p=\psi(y, C)$ и внеся это выражение на место p в данное уравнение (13), получим его общий интеграл: $x=f\{y, \psi(y, C)\}$. Впрочем, уравнение (13) переходит в уравнение вида (10), если поменять роль переменных x и y.

Пример 8. $p^3-4xyp+8y^2=0$. Это — уравнение первой степени относительно x; разрешаем его: $x=\frac{p^2}{4y}+\frac{2y}{p}$. Дифференцируем обе части по y, считая p функцией y и заменяя $\frac{dy}{dx}$ через p. Получаем:

$$\frac{1}{p}=\left(\frac{p}{2y}-\frac{2y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}-\frac{p^2}{4y^2}+\frac{2}{p}.$$

Преобразуем:

$$\frac{dp}{dy}\frac{p^3-4y^2}{2yp^2}=\frac{p^3-4y^2}{4y^2p}.$$

Деля обе части на общий множитель p^3-4y^2 [1]), мы получаем уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{2y}$; интегрируя находим: $p=Cy^{\frac{1}{2}}$. Внося это выражение в данное уравнение, получаем:

$$C^3y^{\frac{3}{2}}-4Cxy^{\frac{3}{2}}+8y^2=0,$$

откуда, выделяя частное решение $y=0$, находим:

$$64y=(4Cx-C^3)^2,$$

или, вводя новое постоянное $C_1=\frac{C^2}{4}$,

$$y=C_1(x-C_1)^2.$$

Пример 9. $y=p^2-px+\frac{x^2}{2}$. Дифференцируем по x, считая p функцией x; заменяя $\frac{dy}{dx}$ через p, имеем: $p=-p+x+(2p-x)\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dx}(2p-x)=2p-x$. Оставляя пока в стороне множитель $2p-x$,

---

[1]) Приравняв этот множитель нулю и исключив p из полученного уравнения и из первоначального, мы получим особое решение; см. далее § 4, 2, примечание 4 (стр. 131).

имеем дифференциальное уравнение: $\frac{dp}{dx}=1$, $p=x+C$. Подставляя в начальное уравнение, имеем: $y=(x+C)^2-x(x+C)+\frac{x^2}{2}$, или $y=\frac{x^2}{2}+Cx+C^2$ — общее решение. (Если бы мы рассматривали равенство $p=x+C$ как новое дифференциальное уравнение, мы получили бы $y=\frac{x^2}{2}+Cx+C_1$ — решение уравнения $y''=1$.)

3. Уравнение Лагранжа. Изложенные преобразования приводят уравнение, не разрешённое относительно производной, к новому уравнению, которое является разрешённым относительно производной; но это новое уравнение, вообще говоря, не интегрируется в квадратурах. Сейчас мы рассмотрим тип уравнений, не разрешённых относительно производных, в применении к которым метод дифференцирования всегда приводит к уравнению, интегрируемому в квадратурах. Это — *уравнение Лагранжа*. Так называется уравнение, *линейное относительно x и y*, т. е. уравнение вида:

$$A(p)y+B(p)x=C(p),$$

где коэффициенты A, B, C — данные дифференцируемые функции производной $p=\frac{dy}{dx}$. Разрешая это уравнение относительно y (мы предполагаем, что $A(p)\neq 0$), приводим его к виду:

$$y=\varphi(p)x+\psi(p). \tag{14}$$

Применяя к уравнению (14) метод дифференцирования [так как это — уравнение вида (10)], приходим к уравнению:

$$p=\varphi(p)+[\varphi'(p)x+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}. \tag{14'}$$

Если в этом уравнении рассматривать x как искомую функцию, а p — как независимое переменное, то получаем линейное уравнение:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}x=\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}. \tag{14''}$$

Оно, как известно, интегрируется в квадратурах; решение имеет вид:

$$x=C\omega(p)+\chi(p),$$

где, например, $\omega(p)=e^{-\int\frac{\varphi'(p)\,dp}{\varphi(p)-p}}$. Внося найденное выражение x в данное уравнение, получим выражение вида:

$$y=[C\omega(p)+\chi(p)]\varphi(p)+\psi(p).$$

Таким образом, два переменных выражены в функции параметра p; если исключить этот параметр, получим общий интеграл уравнения Лагранжа в форме $\Phi(x, y, C)=0$.

Примечание. Приведение к виду (14″) невозможно, если $\varphi(p)-p=0$. Случай $\varphi(p)-p\equiv 0$ будет рассмотрен в следующем разделе. Допустим теперь, что для некоторого значения $p=C_0$ мы имеем $\varphi(C_0)-C_0=0$. Тогда уравнение (14′), очевидно, допускает решение $p=C_0$; подставляя в уравнение (14) это значение p, получаем $y=\varphi(C_0)x+\psi(C_0)$. Легко проверить, что это есть решение уравнения (14); можно также убедиться в том, что оно не содержится в формуле общего решения.

Пример 10. $y=2px+p^2$. Дифференцируем по x, считая p и y функциями x и заменяя $\frac{dy}{dx}$ через p; имеем:

$$p=2p+2(x+p)\frac{dp}{dx}.$$

Разрешая относительно $\frac{dx}{dp}$, находим $\frac{dx}{dp}=-\frac{2x}{p}-2$; решение этого уравнения есть $x=\frac{C}{p^2}-\frac{2p}{3}$. Вставляя это выражение в данное уравнение, находим:

$$y=\frac{2C}{p}-\frac{p^2}{3}.$$

Итак, мы выразили x и y в функции параметра p и произвольного постоянного C, т. е. получили общее решение в параметрической форме. Кроме этого общего решения, имеется ещё решение $y=0$.

4. Уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа; оно имеет вид:

$$y=px+\varphi(p), \tag{15}$$

где φ — данная (дифференцируемая) функция. Применяя к этому уравнению метод п. 3, дифференцируем обе части по x; получаем:

$$p=p+[x+\varphi'(p)]\frac{dp}{dx}; \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dx}[x+\varphi'(p)]=0.$$

Исследуем на этот раз оба множителя левой части последнего уравнения; первый множитель даёт дифференциальное уравнение:

$$\frac{dp}{dx}=0,$$

откуда $p=C$, и общее решение уравнения (15) есть

$$y=Cx+\varphi(C). \tag{16}$$

Итак, общее решение уравнения Клеро получается заменой в уравнении (15) p на произвольное постоянное C. Решение (16) геометрически представляет семейство прямых от одного параметра. Приравняем теперь нулю второй множитель $x+\varphi'(p)=0$. Это равенство

определяет p как функцию от x; $p=\omega(x)$; если подставить это значение p в уравнение (15), то получим:

$$y=x\omega(x)+\varphi[\omega(x)]. \tag{17}$$

Можно также подставить значение $x=-\varphi'(p)$ в уравнение (15) и получить ту же кривую в параметрической форме:

$$x=-\varphi'(p), \quad y=-p\varphi'(p)+\varphi(p). \tag{17'}$$

Легко проверить, что кривая (17) или (17′) является интегральной кривой уравнения (15); в самом деле, пользуясь, например, параметрическим представлением (17′), находим:

$$dx=-\varphi''(p)\,dp,$$

$$dy=[-p\varphi''(p)+\varphi'(p)-\varphi'(p)]\,dp=-p\varphi''(p)\,dp,$$

откуда $\frac{dy}{dx}=p$. Вставляя значения x, y, y' в уравнение (15), получаем тождество:

$$-p\varphi'(p)+\varphi(p)=-p\varphi'(p)+\varphi(p).$$

Решение (17) или (17′) не содержит произвольного постоянного; оно не получается из общего решения (16) ни при каком постоянном значении C. В самом деле, правая часть уравнения (16) при любом постоянном C есть линейная функция от x; допустим, что $x\omega(x)+\varphi[\omega(x)]=ax+b$ (a и b — постоянные); дифференцируя, находим:

$$\omega(x)+x\omega'(x)+\varphi'[\omega(x)]\,\omega'(x)=a.$$

Но по определению функции $\omega(x)$ имеем: $\varphi'[\omega(x)]=-x$, и предыдущее равенство обращается в следующее:

$$\omega(x)=a,$$

что противоречит уравнению, определяющему $\omega(x)$. Посмотрим, каково геометрическое значение решения (17). Оно получилось путём исключения p из двух уравнений:

$$y=px+\varphi(p), \quad 0=x+\varphi'(p),$$

или, заменяя p через C (от этого результат не изменится), — исключением C из двух уравнений:

$$y=Cx+\varphi(C), \quad 0=x+\varphi'(C),$$

причём второе получается из первого дифференцированием по C. Но из дифференциальной геометрии известно, что этот процесс даёт огибающую семейства прямых (16), представляющего общее решение. Мы скажем, что эта огибающая, т. е. решение (17), есть *особое решение* уравнения Клеро (15).

Итак, *общее решение уравнения Клеро представляет семейство прямых, особое решение — огибающую.*

Примечание 1. Чтобы доказать, что особое решение удовлетворяет уравнению Клеро, нам пришлось допустить, что функция $\varphi(p)$ два раза дифференцируема. Более сложное доказательство приводит к тому же заключению в предположении, что $\varphi(p)$ дифференцируема один раз.

Примечание 2. Рассуждение, приводящее к особому решению, неприменимо, если $\varphi'(p) = \text{const.}$, т. е. если $\varphi(p) = ap + b$ (a и b — постоянные); в этом случае уравнение имеет вид:

$$y = xy' + ay' + b,$$

откуда

$$y' = \frac{y-b}{x+a}, \quad \frac{dy}{y-b} = \frac{dx}{x+a}.$$

Вместо особого решения мы имеем особую точку $x = -a$, $y = b$, через которую проходят все интегральные прямые: $y = b + C(x+a)$.

Примечание 3. Всякое семейство прямых, зависящее от одного параметра (кроме семейства параллельных прямых), при исключении параметра приводит к уравнению Клеро. В самом деле, пусть дано семейство:

$$y = k(t)x + b(t).$$

Так как $\frac{dk}{dt} \neq 0$ (иначе было бы $k = \text{const.}$, и мы имели бы семейство параллельных прямых), то уравнение $k(t) = C$ (где C — новый параметр) можно разрешить относительно t, $t = f(C)$. Уравнение семейства примет вид:

$$y = Cx + b[f(C)] \equiv Cx + \Phi(C),$$

т. е. вид общего решения (16) уравнения Клеро.

К уравнению Клеро приводят геометрические задачи, в которых требуется определить кривую по какому-нибудь свойству её касательной.

Пример 11. Найти кривую, касательные к которой образуют вместе с прямоугольными осями координат треугольник постоянной площади, равной 2. Пишем уравнение искомой касательной в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; по условию $ab = 4$, т. е. $b = \frac{4}{a}$, и мы имеем семейство прямых $\frac{x}{a} + \frac{ay}{4} = 1$. Найдём дифференциальное уравнение этого семейства; дифференцируем по x и исключаем a:

$$\frac{1}{a} + \frac{ay'}{4} = 0, \quad a^2 = \frac{-4}{y'}, \quad a = 2\sqrt{-\frac{1}{y'}}, \quad \frac{x\sqrt{-y'}}{2} + \frac{y}{2\sqrt{-y'}} = 1,$$

или

$$y = xy' + 2\sqrt{-y'}.$$

Это — уравнение Клеро; его общее решение есть $y = Cx + 2\sqrt{-C}$, но нас интересует особое решение, которое даёт искомую кривую. Находим его, дифференцируя последнее равенство по C и исключая C:

$$0 = x - \frac{1}{\sqrt{-C}}, \quad C = -\frac{1}{x^2},$$

откуда $y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x}$, или, окончательно, $xy = 1$ — равносторонняя гипербола.

ЗАДАЧИ.

Найти общие, а для уравнений типа Клеро также особые решения $\left(p \text{ обозначает } \frac{dy}{dx}\right)$.

75. $p^4 = 4y(xp - 2y)^2$.

Указание. Разрешить относительно x и дифференцировать по y (можно упростить заменой искомой функции).

76. $y = 2px + \frac{x^2}{2} + p^2$.

77. $y = \frac{k(x + yp)}{\sqrt{1 + p^2}}$.

78. $x = py + ap^2$.

79. $y = xp^2 + p^3$.

80. $y = xy' + y' - y'^2$.

81. $y = 2px + y^2p^3$.

Указание. Умножить на y и положить $y^2 = z$.

82. $p^2(x^2 - 1) - 2pxy + y^2 - 1 = 0$.

(Разрешить относительно y или ввести полярные координаты.)

83. $y'^2 + 2xy' + 2y = 0$.

84. Найти кривую, у которой длина отрезка касательной между осями координат имеет постоянную величину a.

§ 4. Особые решения.

1. При исследовании уравнения Клеро мы встретились с особым решением. В настоящем параграфе мы исследуем вопрос о существовании особых решений для довольно широкого класса уравнений и укажем два способа их нахождения.

Мы видели, что, по теореме Коши, если правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{18}$$

непрерывна в некоторой области и имеет в ней ограниченную производную по y, то через каждую точку (x_0, y_0) области проходит единственная интегральная кривая (свойство единственности); эта кривая входит в семейство от одного параметра (за параметр мы принимали величину y_0) и получается из этого семейства, когда параметр принимает определённое числовое значение. Семейство от одного