Это — уравнение Клеро; его общее решение есть $y = Cx + 2\sqrt{-C}$, но нас интересует особое решение, которое даёт искомую кривую. Находим его, дифференцируя последнее равенство по C и исключая C:

$$0 = x - \frac{1}{\sqrt{-C}}, \quad C = -\frac{1}{x^2},$$

откуда $y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x}$, или, окончательно, $xy = 1$ — равносторонняя гипербола.

ЗАДАЧИ.

Найти общие, а для уравнений типа Клеро также особые решения $\left(p \text{ обозначает } \frac{dy}{dx}\right)$.

75. $p^4 = 4y(xp - 2y)^2$.

Указание. Разрешить относительно x и дифференцировать по y (можно упростить заменой искомой функции).

76. $y = 2px + \frac{x^2}{2} + p^2$.

77. $y = \frac{k(x + yp)}{\sqrt{1 + p^2}}$.

78. $x = py + ap^2$.

79. $y = xp^2 + p^3$.

80. $y = xy' + y' - y'^2$.

81. $y = 2px + y^2p^3$.

Указание. Умножить на y и положить $y^2 = z$.

82. $p^2(x^2 - 1) - 2pxy + y^2 - 1 = 0$.

(Разрешить относительно y или ввести полярные координаты.)

83. $y'^2 + 2xy' + 2y = 0$.

84. Найти кривую, у которой длина отрезка касательной между осями координат имеет постоянную величину a.

§ 4. Особые решения.

1. При исследовании уравнения Клеро мы встретились с особым решением. В настоящем параграфе мы исследуем вопрос о существовании особых решений для довольно широкого класса уравнений и укажем два способа их нахождения.

Мы видели, что, по теореме Коши, если правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{18}$$

непрерывна в некоторой области и имеет в ней ограниченную производную по y, то через каждую точку (x_0, y_0) области проходит единственная интегральная кривая (свойство единственности); эта кривая входит в семейство от одного параметра (за параметр мы принимали величину y_0) и получается из этого семейства, когда параметр принимает определённое числовое значение. Семейство от одного

параметра образует общее решение, каждая интегральная кривая представляет частное решение, и, в силу теоремы единственности, никаких других решений, в частности особых решений, в этом случае не представится. Например, если правая часть уравнения (18) есть многочлен относительно y,

$$\frac{dy}{dx} = A_n(x)y^n + A_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + A_1(x)y + A_0(x),$$

то в области непрерывности коэффициентов и при ограниченных значениях y (т. е. в прямоугольнике $a \leqslant x \leqslant b$, $-k \leqslant y \leqslant k$, где коэффициенты непрерывны в интервале $a \leqslant x \leqslant b$ и k сколь угодно большое положительное число) выражение $\frac{\partial f}{\partial y}$ тоже ограничено — это уравнение не имеет особых решений (таковы, например, линейное уравнение, $n = 1$; уравнение Риккати, $n = 2$). Далее, если правая часть есть дробная рациональная функция от x и от y

$$f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P и Q суть многочлены по x и y без общего множителя, то производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность только в тех точках x_0, y_0, где $Q(x_0, y_0) = 0$, т. е. где $f = \infty$; но в таких точках для уравнения $\frac{dx}{dy} = \frac{Q}{P}$ правая часть [если $P(x_0, y_0) \neq 0$] непрерывна вместе с производной по x, и опять, в силу теоремы Коши, проходящая через такую точку интегральная кривая $x = \psi(y)$ удовлетворяет условию единственности и входит в семейство от одного параметра (т. е. является обыкновенным частным решением). Наконец, если $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ (это может иметь место лишь в изолированных точках), мы имеем особые точки, различные типы которых были исследованы в главе II; особых решений в этом случае опять нет.

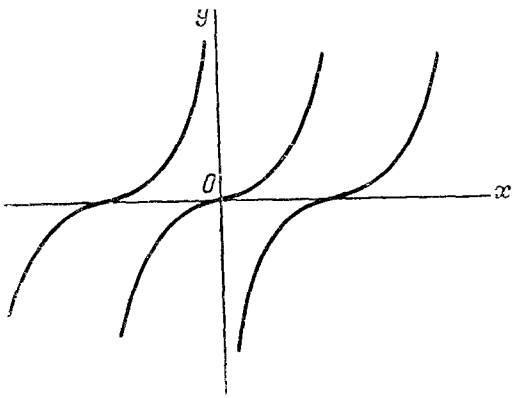
Особым решением мы назовём такое решение дифференциального уравнения, которое во всех своих точках не удовлетворяет свойству единственности, т. е. в любой окрестности каждой точки (x, y) особого решения существует по крайней мере две интегральные кривые, проходящие через эту точку. Теорема Коши даёт достаточные условия для того, чтобы в некоторой области не существовало особых решений; следовательно, обратно, для существования особого решения необходимо, чтобы не выполнялись условия теоремы Коши. Итак, мы можем искать особые решения только в тех точках плоскости xOy, где не выполнены условия теоремы Коши. В частности, если правая часть уравнения (18) непрерывна во всей рассматриваемой области (как мы будем предполагать всюду в настоящем параграфе), то *особые решения могут проходить только через те точки, в которых не выполняется условие Липшица*. Если $f(x, y)$ всюду

имеет конечную или бесконечную производную по y, то условие Липшица не выполняется в тех точках, где $\frac{\partial f}{\partial y}$ становится бесконечной. Случай, когда функция f непрерывна и $\frac{\partial f}{\partial y}$ бесконечна, может представиться, например, для иррациональных функций.

Пример 12. Рассмотрим уравнение:

$$y' = y^{\frac{2}{3}}; \tag{19}$$

правая часть $f = y^{\frac{2}{3}}$ определена и непрерывна для всех значений y, но производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$ обращается в бесконечность при $y = 0$, т. е. на оси Ox плоскости xOy; интегрируя данное уравнение, находим общее решение: $27y = (x + C)^3$ — семейство кубических парабол; кроме того, уравнение имеет очевидное решение $y = 0$, проходящее через те точки, где не выполнено условие Липшица; это решение — особое, так как через каждую точку оси Ox проходит и кубическая парабола, и эта прямая — единственность не выполнена (черт. 18).



Черт. 18.

Пример 13. Вернёмся к уравнению

$$y'^2 + y^2 = 1$$

или

$$y' = \pm\sqrt{1 - y^2}$$

(черт. 16). Оба значения y' представляют непрерывные функции в области $-1 \leqslant y \leqslant 1$, где правая часть определена; производная $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$; условия теоремы Коши нарушаются на прямых $y = \pm 1$, где $\frac{\partial f}{\partial y} = \infty$; эти прямые a priori могут быть особыми решениями. Легко видеть, что $y = 1$ и $y = -1$ суть решения этого уравнения и что эти прямые являются огибающими семейства синусоид $y = \sin(x + C)$, дающего общее решение, т. е. в точках прямых, изображающих решения $y = \pm 1$, единственность не выполнена: через каждую точку, например прямой $y = 1$, проходят две интегральные кривые — сама прямая $y = 1$ и касающаяся её (восходящая или нисходящая) ветвь

синусоиды; это будут особые решения для обоих уравнений: $y' = +\sqrt{1-y^2}$ и $y' = -\sqrt{1-y^2}$.

Примечание. Мы уже указали, что из теоремы Коши можно вывести только необходимые условия для особого решения. Место тех точек, где условие Липшица не выполнено, если оно является кривой, может представлять особое решение, но может и не представлять его уже потому, что эта кривая, вообще говоря, не представляет решения уравнения. Если, например, вместо уравнения (19) взять такое:

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}} + a, \quad a \neq 0,$$

то $y = 0$ попрежнему есть место точек, где не выполняется условие Липшица, но эта прямая не является решением уравнения, что очевидно из непосредственной подстановки в заданное уравнение.

Итак, *чтобы найти особые решения уравнения* (18), *надо найти место точек, где не выполнено условие Липшица* (т. е. в случае правой части, выраженной в элементарных функциях, место тех точек, где $\frac{\partial f}{\partial y}$ бесконечна); *если это место образует одну или несколько кривых, надо проверить, являются ли эти кривые интегральными кривыми уравнения* (18) *и нарушается ли в каждой их точке свойство единственности; если оба эти условия выполнены, то найденная кривая представляет особое решение.*

ЗАДАЧИ.

Найти место точек, где не выполняется условие Липшица, и исследовать, представляет ли оно особое решение (найти также общее решение).

85. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y-x}$.

86. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y-x} + 1$ [начертить поле интегральных кривых, принимая в уравнении радикал: 1) как $+\sqrt{y-x}$, 2) как $\pm\sqrt{y-x}$].

87. $\frac{dy}{dx} = +\sqrt{|y|}$, $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{y}$ (в обоих случаях набросать поле кривых).

88. $\frac{dy}{dx} = y \ln y$ ($y \geqslant 0$; при $y = 0$ правая часть дополняется до непрерывной функции по правилу Лопиталя).

89. $\frac{dy}{dx} = y(\ln y)^2$ (с тем же условием о дополнении правой части).

90. $\frac{dy}{dx} = -x \pm \sqrt{x^2 + 2y}$ (начертить поле кривых).

Для уравнения

$$y' = f(y) \tag{A}$$

существует *необходимый и достаточный признак особых решений.* В § 2 главы I мы видели, что если $f(y_0) \neq 0$, то начальные значения (x_0, y_0)

определяют единственную интегральную кривую, даже если не требовать, чтобы правая часть удовлетворяла условию Липшица; соответствующие решения будут обыкновенными частными решениями. Далее, если $f(C)=0$, то

$$y=C \tag{B}$$

является решением уравнения (A). Исследуем, при каких условиях в точках решения (B) выполняется единственность и при каких она не выполняется.

Возьмём начальные значения (x_0, y_0), $y_0<C$, и допустим, что $f(y)>0$ при $y_0\leqslant y<C$ (случай $y>C$ приводится к этому заменой y на $-y$, а случай $f(y)<0$ заменой x на $-x$). Мы будем исследовать единственность решения $y=C$ лишь по отношению к интегральным кривым в полосе $y_0\leqslant y\leqslant C$. Интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0), даётся формулой:

$$x-x_0=\int\limits_{y_0}^{y}\frac{dy}{f(y)}. \tag{C}$$

Будем в формуле (C) стремить y к C; интеграл в правой части будет несобственным; возможны два случая: 1° $\int\limits_{y_0}^{C}\frac{dy}{f(y)}$ расходится; 2° $\int\limits_{y_0}^{C}\frac{dy}{f(y)}$ сходится.

В случае 1° формула (C) показывает, что при неограниченном приближении y к C переменное x неограниченно увеличивается; интегральная кривая асимптотически приближается к прямой $y=C$ при неограниченном возрастании x и не имеет с ней общих точек ни при каком конечном значении x. Так как все интегральные кривые, лежащие в полосе $y_0\leqslant y<C$, получаются из кривой (C) переносом параллельно оси Ox, то ни одна из них не имеет общих точек с прямой $y=C$; следовательно, во всех точках решения $y=C$ выполняется единственность. Итак, *если* $\int\limits_{y_0}^{C}\frac{dy}{f(y)}$ *расходится, то решение* $y=C$ *обыкновенное.* Примерами этого случая являются решения $y=0$ для уравнения $y'=y^k$, $k\geqslant 1$, и для уравнения задачи 88 (где условие Липшица не выполнено).

Переходим к случаю 2°. Пусть $\int\limits_{y_0}^{C}\frac{dy}{f(y)}=l<\infty$. При значении $x=x_0+l=\bar{x}$ кривая (C) приходит в точку M с координатами $(\bar{x}, C)$, лежащую на решении $y=C$; таким образом, в этой точке единственность нарушается. Путём изменения начальной точки x_0 (т. е. переносом кривой (C) параллельно оси x) мы можем точку M совместить с любой точкой прямой $y=C$; таким образом, свойство единственности не выполнено ни для одной точки решения $y=C$.

Итак, *если* $\int\limits_{y_0}^{C}\frac{dy}{f(y)}$ *сходится, то решение* $y=C$ *особое.* Примерами могут служить уравнения $y'=y^k$, $0<k<1$, и уравнение задачи 89.

Аналогичный критерий можно вывести для решений вида $y=C$ общего уравнения с разделяющимися переменными и для решений вида $y=Cx$ однородного уравнения; несколько сложнее проводится исследование решений вида $y=\varphi(C_0)x+\psi(C_0)$ уравнения Лагранжа (§ 3, **3**, стр. 116).

2. Мы видели, что простейший случай, когда правая часть уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ непрерывна, а $\frac{\partial f}{\partial y}$ бесконечна, встречается, когда f является иррациональной функцией от y. Освобождаясь от этих иррациональностей, мы получим алгебраическое уравнение степени выше первой относительно y' с коэффициентами, являющимися рациональными функциями от y. Естественно поставить вопрос об отыскании особых решений такого уравнения. Здесь можно получить довольно общие результаты, к изложению которых мы сейчас приступаем.

Пусть дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y')=0 \tag{1}$$

будет алгебраическое, n-й степени относительно y', т. е. имеет вид

$$A_n(x, y)y'^n+\ldots+A_1(x, y)y'+A_0(x, y)=0, \tag{1'}$$

причём левая часть представляет неприводимый многочлен по y'; коэффициенты $A_k(x, y)$ мы предполагаем многочленами по y и по x (достаточно было бы допустить, что $A_k(x, y)$ непрерывны по переменным x, y в некоторой области D и допускают в ней частные производные по x и по y). Как уже указывалось в начале настоящей главы, уравнение (1') определяет n ветвей многозначной функции:

$$y'_i=f_i(x, y) \quad (i=1, 2, \ldots, n); \tag{2}$$

мы будем рассматривать только действительные ветви (2). Все эти ветви являются непрерывными функциями от x и y для тех значений этих переменных, которые не обращают в нуль $A_n(x, y)$ [1].

Посмотрим, как для этих ветвей обстоит дело с условиями Липшица. Для вычисления производной $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial y'}{\partial y}$ воспользуемся уравнением (1) и правилом дифференцирования неявной функции; находим:

$$\frac{\partial y'}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial y'}. \tag{20}$$

Так как все коэффициенты $A_k(x, y)$ являются дифференцируемыми по y, то производная (20) конечна и непрерывна всюду, где $A_n\neq 0$ и где знаменатель не равен нулю, т. е. те значения x, y, для которых может не выполняться условие Липшица, удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'}=0, \tag{21}$$

---

[1]) В тех точках плоскости xOy, где $A_n(x, y)=0$, одна или несколько функций (2) обращаются в бесконечность; если мы сделаем x искомой функцией, а y — независимым переменным, то в этих точках соответствующие значения $\frac{dx}{dy}$ будут обращаться в нуль; зато эта последняя производная обращается в бесконечность в точках, где $A_0(x, y)=0$.

где после выполнения дифференцирования в левой части вместо y' надо взять одну из функций $f_i(x, y)$, определённую уравнением (1). Иначе говоря, чтобы получить уравнение геометрического места тех точек плоскости xOy, где условие Липшица не выполняется, надо исключить y' из уравнений (1) и (21). В высшей алгебре даётся процесс исключения одного переменного из двух алгебраических уравнений при помощи рациональных операций — получение так называемого *результанта* этих уравнений; равенство нулю результанта есть условие существования общих корней двух уравнений. В нашем случае левая часть уравнения (21) есть производная по y' от левой части уравнения (1); результант этих уравнений есть *дискриминант уравнения* (1) *относительно* y'. Равенство нулю дискриминанта есть условие существования общего нуля данного многочлена и его производной, т. е. кратного корня уравнения (1), где в качестве неизвестного рассматривается y'. Исключая y' из (1) и (21), мы придём к уравнению:

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{22}$$

которое, вообще говоря, определит одну или несколько кривых [*дискриминантная кривая уравнения* (1)].

Дискриминантная кривая (или их совокупность) разделяет плоскость xy на некоторое количество областей. Внутри каждой такой области G некоторое число $k\,(k \geqslant 0)$ из n ветвей (2) являются действительными; это число одно и то же для всей области. Во всякой области, лежащей вместе с границей внутри G, знаменатель в правой части выражения (20) по абсолютной величине больше некоторого положительного числа, следовательно, $\frac{\partial y'}{\partial y}$ ограничена; условие Липшица для всех k ветвей (2) выполнено; таким образом, через каждую точку области G проходит k интегральных кривых, в согласии с теоремой существования; для особых решений здесь нет места. (Отметим, что все k интегральных кривых имеют в точке x, y различные касательные, так как между значениями (2) для y' нет равных.)

В точках дискриминантной кривой две или более ветвей функции y', определяемой уравнениями (2), становятся равными между собой, по самому определению дискриминанта; кроме того, в силу формулы (20), на дискриминантной кривой, вообще говоря, не удовлетворяются условия Липшица. Дополним теперь область G её границей, состоящей из дискриминантных кривых или их частей; в полученной таким образом замкнутой области G каждая из ветвей (2) попрежнему будет непрерывной функцией от x, y, но условия Липшица не выполнены на границе. Мы находимся в таких условиях, когда может существовать особое решение. Именно, пусть y как функция x,

$$y = \varphi(x), \tag{23}$$

определённая из уравнения (22) дискриминантной кривой, сама является решением дифференциального уравнения (1), и пусть совокупность решений рассматриваемой ветви (2), определённая внутри области G, может быть продолжена до её границы, т. е. вплоть до всех точек кривой (23); тогда через каждую точку кривой (23) проходят два решения, соответствующих рассматриваемой ветви: во-первых, одна интегральная кривая, продолженная изнутри области G — обыкновенное решение, и, во-вторых, — решение (23), которое является, таким образом, особым решением.

Итак, особыми решениями уравнения (1) могут быть только функции

$$y = \varphi(x), \tag{23}$$

определяемые уравнением (22). Вообще говоря, эти функции, однако, не удовлетворяют данному дифференциальному уравнению, т. е. не являются вовсе решениями уравнения (1); в том, какой из этих случаев имеет место, легко убедиться непосредственной проверкой. Иногда может, далее, случиться, что вдоль такого решения (23) удовлетворяется во всех его точках свойство единственности (для данной ветви). Это будет в случае, если решения, определённые внутри области G, не доходят до её границы: тогда мы имеем дело с частным решением. Можно показать, что этот случай является исключительным; в общем случае, если функция (23), полученная из дискриминантной кривой (22), удовлетворяет дифференциальному уравнению (1′), она является особым решением. Итак, мы получаем следующее правило нахождения особого решения:

Если дано уравнение:

$$F(x, y, p) = 0, \quad p = \frac{dy}{dx}, \tag{1}$$

где левая часть есть многочлен по p, *то составляем уравнение*:

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0; \tag{21}$$

исключая p *из уравнений* (1) *и* (21), *получаем уравнение* (22), *определяющее дискриминантную кривую. Если определяемая этим уравнением функция* (23) *является решением дифференциального уравнения* (1), *то решение* (вообще говоря) *особое.*

Рассмотрим несколько прежних и новых примеров с точки зрения применения этого метода.

Пример 14. $F \equiv y'^2 + y^2 - 1 = 0$ (пример 2); $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 0$.

Из этих двух уравнений получаем $y^2 = 1$, т. е. $y = \pm 1$. Обе эти функции, очевидно, удовлетворяют данному дифференциальному уравнению, т. е. это — решения; они являются особыми решениями, так как это — огибающие семейства синусоид, и в их точках

нарушается свойство единственности по отношению к каждой из двух ветвей уравнения; через каждую точку $x=x_0$, $y=1$ проходит, например, для ветви уравнения $y'=+\sqrt{1-y^2}$ два решения: прямая $y=1$ и ветвь синусоиды

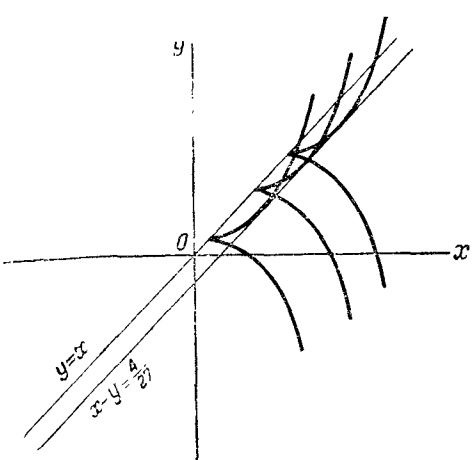
$$y=\sin\left(x-x_0+\frac{\pi}{2}\right),\quad x_0-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant x_0+\frac{\pi}{2}.$$

Пример 15. $F\equiv xp^2-2yp+4x=0$ (пример 3). Составляем уравнение $\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}\equiv xp-y=0$. Исключаем p, определяя его из второго уравнения и подставляя в первое:

$$p=\frac{y}{x},\quad x\frac{y^2}{x^2}-2y\frac{y}{x}+4x=0 \text{ или } y^2-4x^2=0;$$

$$1)\ y=2x,\ 2)\ y=-2x.$$

Из черт. 17 (стр. 109) видно, что эти две прямые — огибающие семейства парабол, представляющего общее решение — являются особым решением. Заметим ещё, что, решая в § 1 данное уравнение относительно y', мы получали выражение y^2-4x^2 под знаком радикала; этого и следовало ожидать, так как в решении квадратного уравнения подкоренное выражение есть дискриминант.



Черт. 19.

Пример 16. $x-y=\frac{4}{9}p^2-\frac{8}{27}p^3$. Методом дифференцирования по x находим общий интеграл: $(y-C)^2=(x-C)^3$. Для получения дискриминантной кривой дифференцируем данное уравнение по p:

$$\frac{8}{9}(p-p^2)=0.$$

Вставляя значения $p=0$ и $p=1$ в уравнение, находим:

$$1)\ x-y=0,$$

$$2)\ x-y=\frac{4}{27}.$$

Геометрическое истолкование: общий интеграл есть семейство полукубических парабол (черт. 19); прямая $x-y=\frac{4}{27}$ есть огибающая — особое решение; прямая $y=x$ есть геометрическое место точек возврата и решением не является.

Пример 17. $p^2 - y^3 = 0$. Общее решение: $y = \frac{4}{(x+C)^2}$; дискриминант $y^3 = 0$ даёт решение $y = 0$, которое является частным, так как условие единственности выполнено во всех точках оси Ox (решения, определённые в области G, $y > 0$, не доходят до дискриминантной кривой).

Примечание 1. Для определения того, является ли функция (23), получаемая из дискриминантной кривой, решением уравнения (1), мы рекомендовали непосредственно подставить найденное значение функции в уравнение (1). Можно дать другой способ этой проверки. Допустим, что функция $y = \varphi(x)$, полученная из дискриминантной кривой, есть решение уравнения (1), т. е. по подстановке в это уравнение обращает его в тождество. Дифференцируя это тождество по x, получаем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0.$$

Но $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ в силу уравнения (21), из которого вместе с (1) определялась функция (23); следовательно, если (23) есть решение уравнения (1), то оно удовлетворяет также уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \tag{24}$$

Таким образом, особое решение должно удовлетворять одновременно трём уравнениям: (1), (21), (24). Отсюда, между прочим, следует, что уравнение (1) в «общем случае» не имеет особого решения: если эти три уравнения независимы, то они определяют отдельные системы значений (x, y, y'). Особое решение может существовать лишь в том случае, если одно из этих уравнений, например (24), есть следствие двух других. В этом случае напишем уравнения (1) и (21) в форме:

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0.$$

Из них определятся функции: $y = \varphi(x)$, $p = \psi(x)$. Предполагая их подставленными в уравнение (1), дифференцируем его по x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \varphi'(x) + \frac{\partial F}{\partial p} \psi'(x) = 0,$$

или, в силу уравнения (21),

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \varphi'(x) = 0.$$

Третье уравнение (24), являющееся, по предположению, следствием двух первых, в наших теперешних обозначениях напишется так:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} p = 0.$$

Сравнивая его с последним тождеством, находим:

$$p = \varphi'(x) = y',$$

т. е. действительно, $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (1).

Применим этот критерий к уравнению Клеро. Это уравнение имеет вид:

$$y = px + \varphi(p);$$

уравнения (21) и (24), соответственно, будут таковы:

$$0 = x + \varphi'(p), \quad p - p = 0,$$

и, действительно, три уравнения сводятся к двум независимым.

Примечание 2. В § 1 было указано, что если два комплексно сопряжённых решения y' уравнения (1) переходят при непрерывном изменении x, y в действительные, то в момент перехода они становятся равными; та часть дискриминантной кривой, на которой осуществляется это равенство корней, отделяет, таким образом, область плоскости, где число действительных ветвей (2) равно k, от области, где это число равно $k \pm 2$. Так, например, для уравнения $y'^2 + y^2 = 1$ (черт. 16 на стр. 107) дискриминантные прямые $y = \pm 1$ отделяют ту часть плоскости ($|y| < 1$), где уравнение имеет действительные значения $y' = \pm\sqrt{1 - y^2}$, от той части ($|y| > 1$), где оба корня мнимые: $y' = \pm i\sqrt{y^2 - 1}$. В примере 16 (черт. 19) мы видим, что две ветви дискриминантной кривой $y - x = 0$ и $y - x = \frac{-4}{27}$ разделяют плоскость на три полосы; в средней через каждую точку проходят три кривых семейства, а в двух крайних — по одной.

Примечание 3. Если дискриминантная кривая является особым решением, то она есть огибающая обыкновенных решений (по определению, огибающая касается в каждой своей точке одной из огибаемых кривых). Обычно огибающая является также местом предельного положения точек пересечения двух бесконечно близких кривых семейства; в таком случае по одну её сторону в окрестности каждой её точки пересекаются две интегральные кривые, которые в нашем изложении должны быть рассматриваемы как относящиеся к двум различным ветвям (2) уравнения (1); по другую сторону огибающей этих ветвей нет, т. е. число действительных ветвей уравнения (1) при переходе через особое решение в этом случае уменьшается на две единицы.

Но пример 16 показывает, что *дискриминантная кривая может давать* также *геометрическое место точек возврата*; в аналитической теории дифференциальных уравнений показывается, что этот случай является общим, если исходить из произвольного уравнения (1); так, например, для уравнения Лагранжа дискриминантная кривая, вообще, есть место точек возврата; для частного случая — уравнения Клеро — она всегда является огибающей. Наконец, может случиться, что в выражении (20) для некоторых ветвей (2) уравнения (1) на одной из дискриминантных кривых одновременно со знаменателем обращается в нуль и числитель и притом так, что $\frac{\partial y'}{\partial y}$ остаётся для этих ветвей непрерывной функцией от x, y; тогда каждая из рассматриваемых ветвей не имеет на ней никаких особенностей. *Дискриминантная кривая* в этом случае оказывается *геометрическим местом точек прикосновения интегральных кривых*, соответствующих различным ветвям (2) уравнения (1).

Пример 18. Рассмотрим уравнение:

$$p^2[(x-y)^2 - 1] - 2p + [(x-y)^2 - 1] = 0.$$

Решая относительно y и дифференцируя по x, находим общее решение $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 1$. Находим дискриминантную кривую; уравнение $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$ даёт:

$$p[(x-y)^2 - 1] - 1 = 0;$$

отсюда определяем p и вставляем в уравнение, умножив затем на знаменатель $\left(\text{приравненный нулю, он даёт место точек, где для одной из ветвей } \frac{dy}{dx}=\infty\right)$; получим:

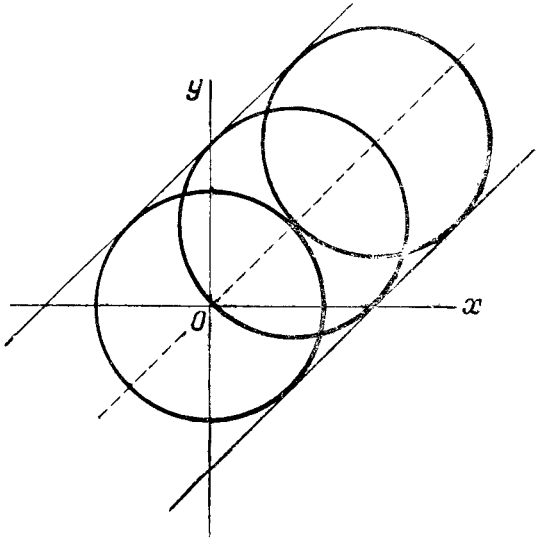
$$1-2+[(x-y)^2-1]^2=0,$$

или

$$[(x-y)^2-2]\,(x-y)^2=0.$$

Дискриминантная кривая распадается на три прямые: $x-y=\pm\sqrt{2}$ дают решения (особые); прямая $y=x$ не даёт решения.

Геометрическое истолкование: общее решение есть семейство кругов радиуса 1 с центрами на прямой $y=x$ (черт. 20); прямые $y=x\pm\sqrt{2}$ суть огибающие семейства; прямая $y=x$ есть место точек прикосновения двух различных кривых семейства; она тоже даётся частью дискриминантной кривой, так как касательные к двум различным кривым совпадают, следовательно, уравнение для p должно иметь кратный корень (заметим без доказательства, что местом точек прикосновения может служить только такая кривая $\varphi(x, y)=0$, левая часть уравнения которой $\varphi(x, y)$ входит в дискриминант в степени не ниже второй; у нас $y-x$ входило в дискриминант в квадрате).



Черт. 20.

Итак, резюмируем: *для уравнения вида* (1) *особое решение может состоять только из точек дискриминантной кривой, но дискриминантная кривая может являться также местом точек возврата интегральных кривых и местом точек прикосновения различных интегральных кривых.*

Примечание 4. В большинстве курсов особое решение определяется формально — как такое, которое не получается из общего решения ни при каком значении произвольного постоянного. Но мы умеем доказывать существование общего решения (глава II, § 1) лишь для тех областей плоскости xOy, где выполнены условия теоремы Коши. Поэтому для того решения, вдоль которого эти условия не выполняются, мы не можем сослаться без дальнейших пояснений на существование общего решения. С другой стороны, формулой, дающей общее решение, иногда не охватываются те решения, вдоль которых выполнены условия теоремы Коши и которые со всех точек зрения должны считаться обыкновенными (например, интегральные прямые уравнения Лагранжа). Поэтому мы считаем обычное определение недостаточно точным и заменяем его данным в тексте; при этом некоторые

решения, которые с формальной точки зрения представляются обыкновенными, с нашей точки зрения окажутся особыми.

Пример 19. Рассмотрим уравнение примера 8:

$$p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0.$$

Дифференцируем по p: $3p^2 - 4xy = 0$. Исключаем из обоих уравнений p и, освобождаясь от иррациональностей, получаем дискриминантные кривые: $4x^3y^3 - 27y^4 = 0$ или $y = 0$, $y = \frac{4}{27}x^3$. Общее решение: $y = C(x - C)^2$; обе дискриминантные кривые являются огибающими этого семейства парабол и представляют особые решения, но первая из них получается из формулы, дающей общее решение, при $C = 0$.

3. Изложенный в предыдущем разделе способ нахождения особых решений сводится к алгебраическим операциям — дифференцированию (многочлена) и исключению; если данное уравнение алгебраическое по x, y, y', то и особое решение является алгебраическим; мы его всегда можем найти, даже если не умеем интегрировать уравнения (1). Второй метод нахождения особых решений, который мы сейчас изложим, требует знания общего интеграла дифференциального уравнения. Пусть общий интеграл уравнения (1) есть

$$\Phi(x, y, C) = 0. \tag{25}$$

Если семейство кривых, изображаемое уравнением (25), имеет огибающую, то эта огибающая:

1) является решением дифференциального уравнения; в самом деле, в каждой точке огибающей элемент (x, y, y') совпадает с элементом одной из интегральных кривых семейства (25); а так как интегральные кривые семейства (25) суть решения уравнения (1), то все элементы огибающей также удовлетворяют этому уравнению, т. е. огибающая есть решение;

2) даёт особое решение; в самом деле, рассмотрим семейство, состоящее из дуг интегральных кривых до точки прикосновения с огибающей (например, семейство возрастающих ветвей синусоид в примере 2); через каждую точку некоторой окрестности огибающей проходит одна такая кривая; эти кривые соответствуют полю, определённому одной из ветвей (2) уравнения (1); в точках огибающей единственность нарушается, так как через каждую её точку проходят две интегральные кривые с общей касательной — сама огибающая и касающаяся её кривая семейства.

Отсюда правило нахождения **особого** решения, если известен общий интеграл (25), таково же, как для нахождения огибающей: *дифференцируем уравнение* (25) *по параметру* C:

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \tag{26}$$

Из уравнений (25) *и* (26) *исключаем C; полученное соотношение*

$$\varphi(x, y) = 0 \tag{27}$$

(если оно представляет решение) *даёт особое решение.*

Примечание 1. Из дифференциальной геометрии известно, что уравнение (27) даёт не только огибающую, но и геометрическое место кратных точек кривых семейства (25) (узловые точки, точки возврата и пр.) — в том случае, когда вдоль кривой (27) мы имеем также

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \tag{28}$$

Примечание 2. В конце предыдущего раздела мы указывали, что существование особого решения для уравнения (1) является исключительным случаем; из рассуждений настоящего раздела можно было бы вывести противоречащее предыдущему заключение, что «в общем случае» уравнение (1) имеет особое решение, так как при наличии соответствующих производных и возможности исключения постоянного C уравнения (25), (26) дают огибающую, кроме случая, который является «исключительным», когда одновременно с уравнениями (25), (26) выполняются уравнения $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0$; только в этом случае мы получаем не огибающую, а геометрическое место особых точек. Кажущееся противоречие объясняется тем, что «общему» уравнению (1) соответствует частный класс семейств (25), именно тот, где исключение C из равенств (25) и (26) даёт не огибающую, а место точек возврата.

Примечание 3. Можно показать, что огибающая всегда является частью дискриминантной кривой (22). В самом деле, пусть через точку (x_0, y_0) проходит кривая семейства (25) $y = \psi(x)$ и огибающая $Y = \Psi(x)$. Если подставить обе функции в уравнение (1), то, по доказанному, получим два тождества:

$$F(x, y, y') = 0, \quad F(x, Y, Y') = 0. \tag{29}$$

Дифференцируя эти тождества по x, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0, \\ \frac{\partial F(x, Y, Y')}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial Y} Y' + \frac{\partial F}{\partial Y'} Y'' = 0. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Рассмотрим тождества (30) в точке (x_0, y_0). По предположению, мы имеем $y_0' = \psi'(x_0) = Y_0' = \Psi'(x_0)$; из тождеств (30), после подстановки $x = x_0$ получим:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{x_0, y_0, y_0'} (y_0'' - Y_0'') = 0.$$

Если $y_0'' \neq Y_0''$, то имеем $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$; это рассуждение справедливо для всех элементов огибающей, т. е. мы получаем вдоль огибающей уравнение (21), определяющее вместе с (1) дискриминантную кривую. Если бы было

$$y_0'' = Y_0'', \ \ldots, \ y_0^{(n-1)} = Y_0^{(n-1)}, \text{ но } y_0^{(n)} \neq Y_0^{(n)},$$

то, дифференцируя тождества (29) $n-1$ раз и вычитая одно из другого, мы опять получили бы $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$.

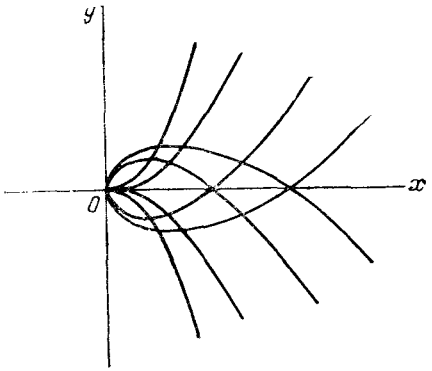
Пример 20. Вернёмся к примеру 2; $p^2 + y^2 = 1$. Общее решение: $y = \sin(x + C)$; огибающая получится из этого уравнения и другого: $0 = \cos(x + C)$. Исключая C, находим огибающую $y^2 = 1$, в согласии с решением примера 14.

Пример 21. Уравнение примера 18: общее решение есть $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 1$; дифференцируем по C; $x - C + y - C = 0$, $C = \frac{x+y}{2}$; подставляя в общее решение, находим: $(x - y)^2 = 2$, две огибающие прямые.

Пример 22. Уравнение примера 16: общий интеграл $(y - C)^2 = (x - C)^3$. Находим логарифмическую производную по C: $\frac{2}{y - C} = \frac{3}{x - C}$, откуда $C = 3y - 2x$; подставляя в общий интеграл, получаем:

$$4(y - x)^2 + 27(y - x)^3 = 0.$$

Прямая $y = x$ есть геометрическое место точек возврата; $x - y = \frac{4}{27}$ есть огибающая (черт. 19 на стр. 128).



Черт. 21.

Пример 23.

$$(2xy' - y)^2 - 4x^3 = 0.$$

Разрешая относительно y', получаем линейное уравнение: $y' = \frac{y}{2x} + x^{\frac{1}{2}}$; общее решение: $y^2 = x(x - C)^2$; дифференцируем это уравнение по C, $x(x - C) = 0$; подставляя значение C в общее решение, находим: $y^2 = 0$. Мы получили не огибающую, т. е. не особое решение, а геометрическое место особых точек (узловых; изолированные точки $x = C$, $y = 0$ при $C < 0$ не идут в счёт, так как уравнение не определено при $x < 0$) (рис. 21).

ЗАДАЧИ.

Найти особые решения, исходя из дифференциального уравнения и из общего интеграла:

91. $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ (пример 3, стр. 109).

92. $xp^3 + 2xp - y = 0$ (начертить поле кривых; задача 68, стр. 109).

93. $y^2(p-1) = (2-p)^2$ (задача 73, стр. 112, начертить кривые).

94. $p^4 = 4y(xp - 2y)^2$ (задача 75, стр. 120, исследовать решения $y = 0$).

95. $x^2p^2 - 2xyp + 2xy = 0$.

96. $y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$ (пример 9, стр. 115).

97. $y = 2px + \frac{x^2}{2} + p^2$ (задача 76, стр. 120).

98. $p^2 - py + e^{x} = 0$ (общее и особое решение).

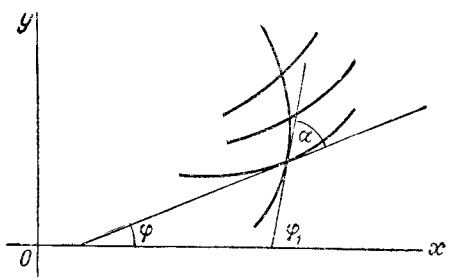
§ 5. Задача о траекториях.

Эта задача является важным геометрическим приложением дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Пусть дано семейство плоских кривых

$$F(x, y, a) = 0, \tag{31}$$

зависящее от одного параметра a; *кривая, образующая в каждой своей точке постоянный угол α с проходящей через эту точку кривой семейства* (31), *называется изогональной траекторией этого семейства*; если, в частности, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, мы имеем *ортогональную траекторию*. Будем считать семейство (31) данным и разыскивать его изогональные траектории.



Черт. 22.

Обозначим текущие координаты траектории через x_1, y_1. Пусть сначала $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$; обозначая $\operatorname{tg}\alpha = k$, имеем в любой точке траектории: $\varphi_1 - \varphi = \alpha$, где φ есть угол с осью x касательной к кривой семейства, φ_1 — то же для траектории (черт. 22), т. е.

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = k, \text{ или } \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dy}{dx}} = k. \tag{32}$$

Равенство (32) имеет место в любой точке (x_1, y_1) траектории; но для проходящей через эту точку кривой семейства угловой