ЗАДАЧИ.

Найти особые решения, исходя из дифференциального уравнения и из общего интеграла:

91. $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ (пример 3, стр. 109).

92. $xp^3 + 2xp - y = 0$ (начертить поле кривых; задача 68, стр. 109).

93. $y^2(p-1) = (2-p)^2$ (задача 73, стр. 112, начертить кривые).

94. $p^4 = 4y(xp - 2y)^2$ (задача 75, стр. 120, исследовать решения $y = 0$).

95. $x^2p^2 - 2xyp + 2xy = 0$.

96. $y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$ (пример 9, стр. 115).

97. $y = 2px + \frac{x^2}{2} + p^2$ (задача 76, стр. 120).

98. $p^2 - py + e^{x} = 0$ (общее и особое решение).

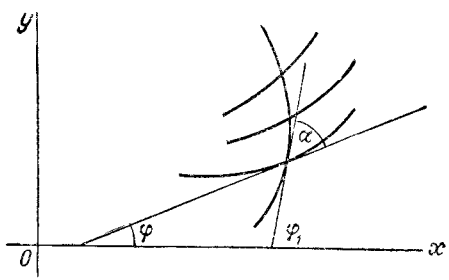
§ 5. Задача о траекториях.

Эта задача является важным геометрическим приложением дифференциальных уравнений первого порядка.

1. Пусть дано семейство плоских кривых

$$F(x, y, a) = 0, \tag{31}$$

зависящее от одного параметра a; *кривая, образующая в каждой своей точке постоянный угол α с проходящей через эту точку кривой семейства* (31), *называется изогональной траекторией этого семейства*; если, в частности, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, мы имеем *ортогональную траекторию*. Будем считать семейство (31) данным и разыскивать его изогональные траектории.



Черт. 22.

Обозначим текущие координаты траектории через x_1, y_1. Пусть сначала $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$; обозначая $\operatorname{tg}\alpha = k$, имеем в любой точке траектории: $\varphi_1 - \varphi = \alpha$, где φ есть угол с осью x касательной к кривой семейства, φ_1 — то же для траектории (черт. 22), т. е.

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi) = k, \text{ или } \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dy}{dx}} = k. \tag{32}$$

Равенство (32) имеет место в любой точке (x_1, y_1) траектории; но для проходящей через эту точку кривой семейства угловой

коэффициент $\frac{dy}{dx}$ вычисляется из уравнения (31):

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

где вместо x, y надо подставить x_1, y_1.

Подставляя найденное значение $\frac{dy}{dx}$ в уравнение (32), получаем:

$$\frac{\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx_1}+\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}}{\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1}-\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}\frac{dy_1}{dx_1}}=k. \tag{33}$$

В это уравнение входит параметр a, который изменяется от точки к точке траектории и характеризует ту кривую семейства, которую траектория пересекает в данной точке; его значение для точки x_1, y_1 получится из уравнения (31), если в нём положить $x=x_1$, $y=y_1$:

$$F(x_1, y_1, a)=0. \tag{31'}$$

Исключая a из двух уравнений (31′) и (33), мы получим соотношение

$$\Phi\left(x_1, y_1, \frac{dy_1}{dx_1}\right)=0, \tag{34}$$

связывающее координаты точки траектории и угловой коэффициент касательной; следовательно, уравнение (34) есть *дифференциальное уравнение изогональных траекторий* семейства (31). Общий интеграл уравнения (34):

$$\Psi(x_1, y_1, C)=0$$

даёт *семейство от одного параметра изогональных траекторий.*

Если $\alpha=\frac{\pi}{2}$, то имеем:

$$\varphi_1-\varphi=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1=-\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}};$$

следовательно, вместо уравнения (33) получим:

$$\frac{dy_1}{dx_1}\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial x_1}-\frac{\partial F(x_1, y_1, a)}{\partial y_1}=0. \tag{33'}$$

Дифференциальное уравнение ортогональных траекторий получится исключением параметра a из уравнений (31′) и (33′).

2. Рассуждения и выкладки упрощаются, если само исходное семейство кривых задано дифференциальным уравнением:

$$\Phi_1\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0. \tag{34'}$$

Уравнение (34′) ставит в соответствие каждой точке (x, y) одно или несколько значений $\frac{dy}{dx}$, определяющих поле направлений данного семейства. Мы можем положить $x=x_1$, $y=y_1$; направление поля для изогональных траекторий связано с направлением поля для данного семейства соотношением (32), откуда, разрешая относительно $\frac{dy}{dx}$, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy_1}{dx_1}-k}{k\cdot\frac{dy_1}{dx_1}+1}.$$

Вставляя это выражение в уравнение (34′), с заменой в нём x, y соответственно на x_1, y_1, получаем уравнение поля для семейства изогональных траекторий, т. е. их дифференциальное уравнение:

$$\Phi_1\left(x_1,\ y_1,\ \frac{\frac{dy_1}{dx_1}-k}{k\cdot\frac{dy_1}{dx_1}+1}\right)=0. \tag{35}$$

В случае ортогональных траекторий $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dy_1}{dx_1}$ связаны соотношением:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}},$$

откуда дифференциальное уравнение для ортогональных траекторий будет:

$$\Phi_1\left(x_1,\ y_1,\ \frac{1}{\frac{dy_1}{dx_1}}\right)=0. \tag{35'}$$

Примечание. В дальнейшем мы будем отбрасывать индексы и обозначать координаты точки траектории также через x, y там, где это не может вызвать путаницы.

Пример 24. Найти изогональные траектории пучка прямых с центром в начале координат: $y = ax$. Пусть угол пересечения $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} \alpha = k$. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = a, \quad \frac{\frac{dy_1}{dx_1} - \frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy_1}{dx_1} \cdot \frac{dy}{dx}} = k;$$

заменяя $\frac{dy}{dx}$ его значением a, которое, в силу уравнения семейства, равно $\frac{y_1}{x_1}$, получаем (опуская индексы):

$$\frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx}} = k, \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y + kx}{x - ky}.$$

Это уравнение однородное, но оно проще интегрируется при помощи интегрирующего множителя:

$$x\,dy - y\,dx = k\,(x\,dx + y\,dy),$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{k}\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

откуда

$$\frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2) = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln C,$$

или

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}},$$

или, наконец, в полярных координатах: $r = Ce^{\frac{\varphi}{k}}$ (семейство логарифмических спиралей).

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то имеем:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{1}{a} = -\frac{1}{\frac{y_1}{x_1}}, \quad \text{или} \quad x_1\,dx_1 + y_1\,dy_1 = 0,$$

откуда $x_1^2 + y_1^2 = C$, т. е. мы получили семейство окружностей.

Пример 25. Имеем семейство софокусных эллипсов с фокусами в точках $x = \pm 1$, $y = 0$:

$$\frac{x^2}{1 + \lambda} + \frac{y^2}{\lambda} = 1 \quad (\lambda > 0).$$

Их дифференциальное уравнение будет (глава I, задача 6, стр. 15):

$$(xy' - y)(x + yy') = y',$$

или

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - 1)y' - xy = 0.$$

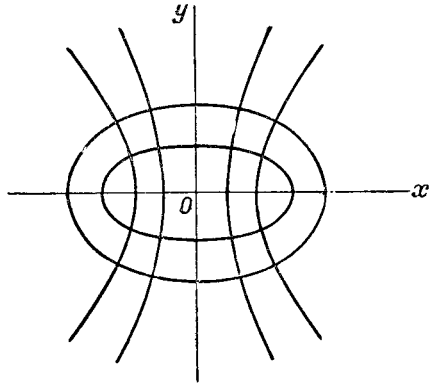
Чтобы получить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий, достаточно заменить в этом уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$; мы получаем:

$$\frac{xy}{y'^2} - \frac{x^2 - y^2 - 1}{y'} - xy = 0,$$

или

$$xyy'^2 + (x^2 - y^2 - 1)y' - xy = 0,$$

т. е. то же уравнение. Дело объясняется тем, что данное уравнение — второй степени относительно y; через каждую точку проходят две кривые — одна из них эллипс (соответствует $\lambda > 0$), а другая — софокусная гипербола ($-1 < \lambda < 0$), причём софокусные гиперболы нашего семейства суть ортогональные траектории софокусных эллипсов (черт. 23).



Черт. 23.

ЗАДАЧИ.

99. Найти ортогональные траектории семейства парабол $y = ax^2$ (сделать чертёж).

100. Найти изогональные (под углом α, $\operatorname{tg}\alpha = k$) траектории семейства кругов $x^2 + y^2 = a^2$.

101. Найти ортогональные траектории семейства подобных кривых второго порядка $x^2 + ny^2 = a$ (n — постоянное).

102. Найти ортогональные траектории семейства лемнискат

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

103. Найти кривые, пересекающие под углом α семейство кардиоид $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

Указание. Вывести уравнения изогональных траекторий для полярных координат.

104. Найти ортогональные траектории семейства софокусных парабол.

105. Провести решение задачи 102 в полярных координатах.