ГЛАВА IV.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

§ 1. Теорема существования.

1. Мы будем попрежнему обозначать независимое переменное через x, искомую функцию через y. Дифференциальное уравнение n-го порядка ($n > 1$) имеет вид:

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где F есть непрерывная функция всех своих аргументов, при этом левая часть, во всяком случае, зависит от старшей производной $y^{(n)}$. Вблизи начальных значений $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}$, удовлетворяющих условиям:

$$F(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n)}) = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)_{x=x_0,\ y=y_0,\ \ldots,\ y^{(n)}=y_0^{(n)}} \neq 0,$$

мы можем, по теореме о существовании неявной функции, разрешить уравнение (1) относительно $y^{(n)}$ и представить его в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1'}$$

Мы докажем существование и единственность (при некоторых условиях) решения уравнения (1′), определяемого начальными условиями: при $x = x_0$ имеем:

$$y = y_0, \ y' = y_0', \ \ldots, \ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \tag{2}$$

где $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — данные числа [1]).

Для доказательства существования целесообразно заменить уравнение (1′) системой n дифференциальных уравнений первого порядка с n искомыми функциями. Для осу-

---

[1]) Задачу отыскания решения уравнения (1′), удовлетворяющего условиям (2), мы будем называть *задачей Коши*. Это замечание относится также и к случаю $n = 1$ (уравнение первого порядка).

ществления этой замены мы, наряду с искомой функцией y, вводим ещё $n-1$ вспомогательных искомых функций

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{n-1},$$

связанных с y и между собой соотношениями:

$$\frac{dy}{dx}=y_1,\quad \frac{dy_1}{dx}=y_2,\ \ldots,\ \frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1}. \tag{3}$$

Из соотношений (3) следует, что функция y_k является k-й производной от функции y,

$$y_k=\frac{d^ky}{dx^k}=y^{(k)}\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Поэтому мы имеем: $y^{(n)}=\frac{dy_{n-1}}{dx}$, и уравнение (1′) примет вид:

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=f(x,\ y,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}). \tag{3′}$$

Уравнения (3) и (3′) представляют систему n дифференциальных уравнений первого порядка с n искомыми функциями $y,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-2},\ y_{n-1}$. В левых частях этих уравнений стоят производные от искомых функций, правые части зависят от независимого переменного и искомых функций (и не зависят от производных). Система такого вида называется *системой n дифференциальных уравнений нормальной формы*.

Однако система (3) и (3′) имеет ту особенность, что только в последнем уравнении правая часть есть функция от $x,\ y,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}$ наиболее общего вида; в уравнениях (3) правые части имеют специальную форму. В целях наибольшей симметрии и имея в виду, что системы дифференциальных уравнений будут самостоятельным объектом нашего изучения (глава VII), мы проведём доказательство существования для системы n дифференциальных уравнений первого порядка нормальной формы в наиболее общем виде; при этом для полной симметрии в обозначениях мы вместо обозначений $y,\ y_1,\ \ldots,\ y_{n-1}$ для искомых функций введём обозначения:

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Таким образом, мы будем рассматривать систему:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx}&=f_1(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
\frac{dy_2}{dx}&=f_2(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{dy_n}{dx}&=f_n(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n).
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

2. Для доказательства существования решения системы n дифференциальных уравнений нормальной формы (4) мы применим метод последовательных приближений Пикара, причём доказательство будет непосредственным обобщением того, которое было дано в главе II для одного уравнения первого порядка.

Пусть для системы (4) задана система начальных значений x_0, $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, ..., $y_n^{(0)}$. Мы введём следующие предположения относительно правых частей уравнений (4):

1) *Функции* $f_i\,(i=1, 2, \ldots, n)$ *непрерывны по всем аргументам в замкнутой области*

$$D:\quad x_0-a\leqslant x\leqslant x_0+a,\quad y_i^{(0)}-b\leqslant y_i\leqslant y_i^{(0)}+b\quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Из непрерывности функций f_i в области D следует их ограниченность, т. е. существование такого положительного числа M, что $|f_i|\leqslant M\,(i=1, 2, \ldots, n)$ для значений аргументов, принадлежащих D.

2) В области D *эти функции удовлетворяют условию Липшица относительно аргументов* $y_1, y_2, \ldots, y_n$: если при данном x значения $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ и $y_1'', y_2'', \ldots, y_n''$ суть две какие-нибудь системы значений, принадлежащие области D, то имеют место неравенства:

$$|f_i(x, y_1', y_2', \ldots, y_n')-f_i(x, y_1'', y_2'', \ldots, y_n'')|\leqslant$$
$$\leqslant K\{|y_1'-y_1''|+|y_2'-y_2''|+\ldots+|y_n'-y_n''|\}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

где K есть некоторое постоянное положительное число.

Заметим, что если функции f_i имеют в области D непрерывные частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то, по теореме о конечном приращении, имеем:

$$f_i(x, y_1', y_2', \ldots, y_n')-f_i(x, y_1'', y_2'', \ldots, y_n'')=$$
$$=\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right)_{\bar{y}_k}(y_1'-y_1'')+\ldots+\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right)_{\bar{y}_k}(y_n'-y_n''), \tag{5'}$$

где знак $(\ )_{\bar{y}_k}$ показывает, что аргументы $y_k\,(k=1, 2, \ldots, n)$ должны быть заменены через $\bar{y}_k=y_k'+\theta(y_k''-y_k')$, $0<\theta<1$. В силу непрерывности, частные производные являются ограниченными. Мы можем взять наибольшее значение абсолютных величин всех этих производных $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ в области D за постоянную K и получить из (5′) неравенство вида (5). Таким образом, *условие Липшица выполняется при существовании и непрерывности в* D *частных производных* $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$.

Мы докажем, что в указанных предположениях 1) и 2) *существует одна и только одна система решений уравнений* (4):

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = y_n(x),$$

определённая для значений x в отрезке $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$, где $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ и *принимающая при* $x = x_0$ *заданные начальные значения*:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad y_n(x_0) = y_n^{(0)}. \tag{6}$$

Вычисляем последовательные приближения одновременно для всех искомых функций. За приближения нулевого порядка берём постоянные $y_i^{(0)}$; далее, приближения первого порядка будут:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(1)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\,dx, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(1)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{7$_1$}$$

Очевидно, что построенные функции являются непрерывными. Покажем, что первые приближения, при $|x - x_0| \leqslant h$, не выходят из области D. В самом деле,

$$|y_i^{(1)} - y_i^{(0)}| = \left|\int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\,dx\right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant Mh \leqslant b$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

(в силу определения числа h).

Далее, определяем вторые приближения:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(2)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})\,dx, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(2)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)})\,dx; \end{aligned}\right\} \tag{7$_2$}$$

вообще, m-е приближения определяются через приближения $(m-1)$-го порядка такими формулами:

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(m)}(x) &= y_1^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})\,dx, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(m)}(x) &= y_n^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{7$_m$}$$

Допуская, что $(m-1)$-е приближения оказались непрерывными функциями от x, мы видим, что m-е приближения, как неопределённые интегралы от непрерывных функций, также оказываются непрерывными. Легко доказать, что если $(m-1)$-е приближения не выходят из области D при $|x-x_0| \leqslant h$, то это же имеет место для приближений порядка m. В самом деле, в силу предположения о $(m-1)$-х приближениях, мы имеем:

$$|f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})| \leqslant M \text{ при } |x-x_0| \leqslant h \ (i=1, 2, \ldots, n),$$

и формулы (7_m) в таком случае дают:

$$|y_i^{(m)} - y_i^{(0)}| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})\, dx \right| \leqslant M|x-x_0| \leqslant Mh \leqslant b.$$

Так как неравенство доказано для $m=1$, то оно справедливо для любого натурального m. Таким образом, *все последовательные приближения* (7_m) *принадлежат области* D *при изменении* x *в отрезке* $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$.

Докажем далее, что *последовательные приближения образуют сходящуюся последовательность*, т. е. что $\lim\limits_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x)$ существует $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Для этого, как и в случае одной функции, рассмотрим ряды:

$$y_i^{(0)} + [y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}] + [y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)] + \ldots$$

$$\ldots + [y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)] + \ldots \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Оценим абсолютные величины членов этих рядов, начиная со второго, пользуясь для этой оценки условием Липшица. Имеем:

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})\, dx \right| \leqslant M|x-x_0|,$$

далее,

$$|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} [f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(x, y_1^{(1)}, \ldots, y_n^{(1)}) - f_i(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})|\, dx \right|, \tag{8_1}$$

и на основании условия Липшица и полученных оценок для $|y_i^{(1)} - y_i^{(0)}|$,

$$|y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} K\{|y_1^{(1)} - y_1^{(0)}| + \ldots + |y_n^{(1)} - y_n^{(0)}|\}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} MnK\,|x - x_0|\, dx \right| = MnK \frac{|x - x_0|^2}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (8_2)$$

Допустим, что для члена $y_i^{(m-1)}(x) - y_i^{(m-2)}(x)$ мы уже получили оценку:

$$|y_i^{(m-1)}(x) - y_i^{(m-2)}(x)| \leqslant M(nK)^{m-2} \frac{|x - x_0|^{m-1}}{(m-1)!} \qquad (8_{m-1})$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n);$$

покажем, что аналогичная оценка, с заменой $m - 1$ на m, справедлива для следующего члена. В самом деле,

$$|y_i^{(m)}(x) - y_i^{(m-1)}(x)| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} [f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}) - f_i(x, y_1^{(m-2)}, \ldots, y_n^{(m-2)})]\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}) - f_i(x, y_1^{(m-2)}, \ldots, y_n^{(m-2)})|\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant K \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{l=1}^{n} |y_l^{(m-1)} - y_l^{(m-2)}|\, dx \right| \leqslant M(nK)^{m-1} \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|x - x_0|^{m-1}}{(m-1)!}\, dx \right| =$$

$$= M(nK)^{m-1} \frac{|x - x_0|^m}{m!}. \qquad (8_m)$$

Таким образом, мы доказали, что оценка (8_m) справедлива для всякого натурального m. Замечая далее, что $|x - x_0| \leqslant h$, мы видим, что все члены рядов (8), начиная со второго, соответственно не больше по абсолютной величине, чем члены знакоположительного числового ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} M(nK)^{m-1} \frac{h^m}{m!}.$$

Этот последний ряд, как легко проверить, сходится; следовательно, ряды (8) сходятся равномерно для значений x в отрезке $x_0 - h \leqslant x \leqslant x_0 + h$; так как их члены суть непрерывные функции, то и

суммы их будут функциями непрерывными. Обозначим их через $Y_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Мы имеем:

$$Y_i(x)=y_i^{(0)}+\sum_{l=1}^{\infty}(y_i^{(l)}-y_i^{(l-1)})=\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x).$$

Докажем, что *функции* $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ..., $Y_n(x)$ *дают искомую систему решений системы дифференциальных уравнений* (4).

По самому определению $y_i^{(m)}(x)$ [см. (7_m)] мы имеем: $y_i^{(m)}(x_0)=$ $=y_i^{(0)}$; следовательно,

$$\lim_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x_0)=Y_i(x_0)=y_i^{(0)},$$

т. е. предельные *функции* $Y_i(x)$ *удовлетворяют начальным условиям.*

Докажем, что эти функции удовлетворяют системе (4). В силу равенств (7_m), мы можем написать:

$$y_i^{(m)}(x)=y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x}\{f_i(x, y_1^{(m-1)}(x), \ldots, y_n^{(m-1)}(x))-$$

$$-f_i(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x))\}\,dx+\int_{x_0}^{x} f_i(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x))\,dx \quad (9)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Оценим абсолютную величину первого интеграла:

$$\left|\int_{x_0}^{x}\{f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})-f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)\}\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})-f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)|\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}\{|y_1^{(m-1)}-Y_1|+\ldots+|y_n^{(m-1)}-Y_n|\}\,dx\right| \quad (9')$$

(последнее неравенство есть следствие условия Липшица). Так как функции $y_i^{(m-1)}(x)$ $(m=1, 2, \ldots)$ сходятся в интервале (x_0-h, x_0+h) равномерно к $Y_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, то для любого наперёд заданного ε можно найти такое N, что при $m-1>N$ для всякого значения x в рассматриваемом интервале выполняются неравенства:

$$|y_i^{(m-1)}(x)-Y_i(x)|<\frac{\varepsilon}{nKh} \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

и тогда для первого интеграла в формуле (9) получается, в силу неравенства (9′), оценка при $|x-x_0|\leqslant h$:

$$\left|\int_{x_0}^{x}\{f_i(x, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)})-f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)\}\,dx\right|<$$
$$<\frac{\varepsilon}{nKh}\,hnK=\varepsilon.$$

Следовательно, при $m\to\infty$ предел этого интеграла равен нулю. С другой стороны, по доказанному, $\lim\limits_{m\to\infty} y_i^{(m)}(x)=Y_i(x)$, и равенства (9) дают в пределе:

$$Y_i(x)=y_i^{(0)}+\int_{x_0}^{x} f(x, Y_1, \ldots, Y_n)\,dx \qquad (i=1, 2, \ldots, n);$$

дифференцируя обе части по x (производная левой части существует, так как существует производная правой части — производная интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу), мы получаем тождества:

$$\frac{dY_i}{dx}=f_i(x, Y_1(x), \ldots, Y_n(x)) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

т. е. функции $Y_i(x)$, *действительно, удовлетворяют системе* (4) [1]).

Докажем далее, что *полученное решение, удовлетворяющее данным начальным условиям, будет единственным.* Допустим, что, кроме системы решений $Y_1(x), \ldots, Y_n(x)$, существует ещё одна система решений $Z_1(x), \ldots, Z_n(x)$, причём $Y_i(x_0)=Z_i(x_0)=y_i^{(0)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и не все Z_i тождественно равны Y_i. Таким образом, в силу нашего допущения (непрерывная) функция

$$\Phi(x)\equiv|Y_1(x)-Z_1(x)|+$$
$$+|Y_2(x)-Z_2(x)|+\ldots+|Y_n(x)-Z_n(x)| \qquad (10)$$

не равна тождественно нулю в отрезке (x_0-h, x_0+h). Без ограничения общности мы можем допустить, что $\Phi(x)\neq 0$ при значениях x, сколь угодно близких к x_0 и, например, больших, чем x_0 (если бы при $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ было $\Phi(x)=0$, а неравенство выполнялось бы впервые для значений x, бо́льших, чем x_1 и сколь угодно

---

[1]) Условия Липшица в этой части доказательства введены лишь для простоты оценки интеграла в формулах (9); стремление этого интеграла к 0 при $m\to\infty$ следует из одной непрерывности функций f_i по аргументам $y_1, \ldots, y_n$ и из равномерного стремления $y_i^{(m-1)}(x)$ к предельным функциям $Y_i(x)$; доказательство, не использующее условий Липшица, проведено нами в главе II для случая одного дифференциального уравнения.

близких к нему, то мы заменили бы в последующих рассуждениях x_0 через x_1) [1]).

Рассмотрим отрезок $[x_0, x_0+h_1]$, где h_1 — любое положительное число, меньшее или равное h. По допущению, $\Phi(x)$ принимает отличные от нуля, следовательно, положительные значения в интервале $[x_0, x_0+h_1]$ для значений x, сколь угодно близких к x_0, значит, при сколь угодно малом h_1. В силу известного свойства непрерывных функций функция (10) достигает своего положительного максимума θ в отрезке $[x_0, x_0+h_1]$ для некоторого значения $x=\xi$, где $x_0<\xi\leqslant x_0+h_1$. Так как наши функции $Y_i(x)$ и $Z_i(x)$, по предположению, удовлетворяют системе (4), то мы имеем тождества:

$$\frac{dY_i}{dx}=f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n), \qquad \frac{dZ_i}{dx}=f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n),$$

откуда

$$\frac{d(Y_i-Z_i)}{dx}=f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)-f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n) \tag{11}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Интегрируя тождества (11) в интервале (x_0, x), где x — переменное, принадлежащее отрезку $[x_0, x_0+h]$, получаем:

$$Y_i(x)-Z_i(x)=\int_{x_0}^{x}\{f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)-f_i(x, Z_1, \ldots, Z_n)\}\,dx$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Оценим разности в левых частях этих равенств, пользуясь условиями Липшица и тем, что значение функции (10) в отрезке $[x_0, x_0+h_1]$ меньше или равно θ. Находим:

$$|Y_i(x)-Z_i(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\int_{x_0}^{x}K\{|Y_1(x)-Z_1(x)|+\ldots+|Y_n(x)-Z_n(x)|\}\,dx<$$
$$<\int_{x_0}^{x}K\theta\,dx=K\theta(x-x_0) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) Множество E значений x в замкнутом интервале $[x_0-h, x_0+h]$, при которых непрерывная функция $\Phi(x)$ равна нулю, есть замкнутое множество; за точку x_1 можно выбрать любую точку множества E, предельную к дополнительному множеству; такая точка необходимо существует, если E не совпадает со всем интервалом $[x_0-h, x_0+h]$, но в последнем случае имеет место единственность.

Складывая последние неравенства для $i = 1, 2, \ldots, n$, находим:

$$|Y_1(x) - Z_1(x)| + \ldots + |Y_n(x) - Z_n(x)| < \\ < nK\theta\,(x - x_0) \leqslant nK\theta h_1 \quad (12)$$

для всякого x, удовлетворяющего неравенствам:

$$x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h_1.$$

Если мы возьмём, в частности, значение $x = \xi$, то левая часть (12) будет равна θ, и мы получим неравенство: $\theta < nK\theta h_1$. Оно приводит к противоречию, так как h_1 может быть взято сколь угодно малым, в частности можно взять $h_1 \leqslant \frac{1}{nK}$; тогда правая часть окажется $\leqslant \theta$, и мы получаем $\theta < \theta$. Это противоречие доказывает единственность решения.

Полученное нами решение определено только для интервала $(x_0 - h,\ x_0 + h)$. Пользуясь языком многомерной геометрии, мы можем сказать, что область D есть параллелепипед $(n+1)$-мерного пространства, прямоугольные координаты точек которого суть $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; решение $y_i = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ будем называть *интегральной кривой* в этом пространстве, проходящей через точку $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$ [1]). Если хоть один из концов полученного отрезка интегральной кривой, соответствующих значениям $x_0 - h$ и $x_0 + h$, ещё является внутренним для области, в которой функции f_i удовлетворяют условиям 1) и 2), например конец, соответствующий $x = x_0 + h$, то можно взять точку $x_0^{(1)} = x_0 + h$, $y_i^{(1)} = y_i(x_0 + h)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ за новую начальную точку и, исходя из неё, определить дальнейший отрезок интегральной кривой при значениях x в некотором интервале

$$(x_0^{(1)} - h^{(1)},\quad x_0^{(1)} + h^{(1)}).$$

В силу теоремы единственности эти кривые совпадают в общей части отрезков

$$[x_0 - h,\ x_0 + h] \text{ и } [x_0^{(1)} - h^{(1)},\ x_0^{(1)} + h^{(1)}].$$

Таким образом, мы продолжили наше решение, определив его на большом интервале; это продолжение возможно до тех пор, пока мы не подойдём как угодно близко к границе той области, в которой функции f_i удовлетворяют условиям 1) и 2). Таким образом, шаг за шагом, мы определим интегральную кривую.

---

[1]) При $n = 2$ мы имеем обычное трёхмерное пространство и обычную пространственную кривую.

Вспомним теперь, что одно дифференциальное уравнение n-го порядка вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) \tag{1'}$$

сводится к системе (4) специального типа (3), (3'):

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Применяя к этой системе доказанную теорему существования и вспоминая связь между функциями y_i и производными от y, существующую в данном случае, мы можем сформулировать следующую теорему существования (и единственности) для уравнения (1'):

Уравнение n-го порядка, разрешённое относительно старшей производной, правая часть которого непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет условию Липшица по аргументам $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным данным: при $x = x_0$ имеет место $y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0', \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)}$ (задача Коши)[1].

3. Теорема Коши утверждает существование частного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, именно решения, удовлетворяющего данным начальным условиям. Геометрически это означает, что существует интегральная кривая, проходящая через точку $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$.

Однако приведённое доказательство позволяет построить также общее решение. Будем рассматривать x_0 как данное число, а $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ — как переменные параметры, которые могут принимать различные числовые значения, не выходящие, однако, из области D.

Для каждой такой системы начальных значений получится своя интегральная кривая. Через каждую точку $(n+1)$-мерного пространства, лежащую достаточно близко к «гиперплоскости» $x = x_0$, проходит интегральная кривая нашей системы; в самом деле, рассмотрим какую-нибудь точку $P(\overline{x}_0, \overline{y}_1^{(0)}, \ldots, \overline{y}_n^{(0)})$ и проходящую

[1]) Если правая часть уравнения n-го порядка является в некоторой области непрерывной функцией всех аргументов, но не удовлетворяет условиям Липшица, то может быть доказано существование решения, но не его единственность; ср. главу II, § 1, 5.

через неё интегральную кривую; если $|x_0 - \bar{x}_0|$ достаточно мало, то эта интегральная кривая может быть продолжена до значения $x = x_0$, причём $y_1, y_2, \ldots, y_n$ примут при $x = x_0$ некоторые значения $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$. Тогда кривая, определённая начальными значениями $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, пройдёт через точку P. Итак, через каждую точку некоторой области D', лежащей внутри области D, проходит интегральная кривая, определяемая при $x = x_0$ начальными значениями $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$; в силу единственности через каждую точку D' проходит только одна такая интегральная кривая. Формулы (7_1), (7_2), ..., (7_m) показывают, что последовательные приближения $y_i^{(m)}$ являются непрерывными функциями параметров $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$; в силу равномерной сходимости $y_i^{(m)}(x)$ к предельным функциям $y_i(x)$ эти последние тоже являются непрерывными функциями этих параметров:

$$\left.\begin{aligned} y_1 = \varphi_1(x, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}),\ y_2 = \varphi_2(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}), \ldots \\ \ldots,\ y_n = \varphi_n(x, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}); \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

формулы (13) дают выражение общего решения системы (4) в области D'; мы видим, что это решение *непрерывно зависит от n произвольных постоянных*, каковыми в нашем выводе являются параметры $y_i^{(0)}$.

Возвращаясь к интересующему нас в этой главе случаю одного дифференциального уравнения n-го порядка, замечаем, что входящей в задачу искомой функцией является y, а функции $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ являются вспомогательными; поэтому из совокупности формул вида (13) нас интересует только та, которая даёт выражение для y; входящие в неё начальные значения вспомогательных функций суть в нашем случае начальные значения производных от y.

Таким образом, общее решение уравнения (1′) имеет вид:

$$y = \varphi(x, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}). \quad (14)$$

Замечая, что начальные значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ являются параметрами, т. е. произвольными постоянными, мы приходим к выводу:

Общее решение уравнения n-го порядка содержит n произвольных постоянных и имеет вид:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \quad (14')$$

Если соотношение, связывающее x, y и n произвольных постоянных, дано в виде, не разрешённом относительно y:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \quad (15)$$

то мы будем называть такое соотношение *общим интегралом* уравнения (1) или (1′).

В теореме существования мы получили в качестве произвольных постоянных начальные значения функции и её $n-1$ последовательных производных; при фактической интеграции уравнения n-го порядка мы обыкновенно получаем другие произвольные постоянные; однако, если их число равно n, то мы при выполнении некоторых условий сумеем из формулы (14′) или (15) получить (в некоторой области) любое частное решение, т. е. решение, удовлетворяющее начальным данным Коши; при выполнении упомянутых условий мы также будем называть формулу (14′) общим решением, а формулу (15) — общим интегралом уравнения (1) или (1′), причём постоянные $C_1, C_2, \ldots C_n$ уже не являются непременно начальными значениями для $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Покажем, как решить задачу Коши, если известно общее решение (14′). Из соотношения (14′) и тех, которые получаются из него дифференцированием по x, подставляя в них вместо x начальное значение x_0, а вместо $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ их начальные значения, мы получаем равенства:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) &= y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) &= y_0', \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) &= y_0^{(n-1)}; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

рассматривая равенства (16), как n уравнений с n неизвестными, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, мы получим, вообще говоря, числовые значения $C_1, C_2, \ldots, C_n$, соответствующие тому частному решению, которое отвечает данным начальным условиям (2). Точно так же, если дан общий интеграл (15), то, подставляя в него вместо y решение (14′) уравнения (1), полученное разрешением уравнения (15) относительно y, мы получим тождество; дифференцируем его по x, помня, что y является функцией x, и подставляем в полученные равенства начальные значения (2); получаем:

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0, C_1, C_2, \ldots, C_n) &= 0, \\ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 y_0' &= 0, \\ \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}\right)_0 y_0' + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right)_0 y_0'^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 y_0'' &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\partial^{n-1}\Phi}{\partial x^{n-1}}\right)_0 + \ldots + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_0 y_0^{(n-1)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{16′}$$

[символ $(\ )_0$ указывает, что в данном выражении вместо x и y следует подставить x_0 и y_0]. Мы опять получаем n уравнений для

определения n неизвестных, $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т. е. мы и в этом случае можем, вообще говоря, решить задачу Коши.

Примечание 1. Разрешение системы (16) или (16′) относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$ заведомо возможно лишь для тех начальных значений, при которых выполняются условия существования неявных функций, т. е. вблизи такой системы $\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{y}'_0, \ldots, \overline{y}_0^{(n)}, \overline{C}_1, \overline{C}_2 \ldots \overline{C}_n$, которые удовлетворяют системе равенств (16) или (16′) и для которых якобиан от левых частей соответствующих уравнений по $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не обращается в нуль. Если этот якобиан тождественно равен нулю, то определение $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т. е. решение задачи Коши, невозможно для произвольных начальных значений $y_0, y'_0, \ldots \ldots, y_0^{(n-1)}$ (даже в малой области). Тогда мы скажем, что *n постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ в выражении (14′) или (15) *не являются существенными*, и эти выражения не представляют общего решения.

Примечание 2. Как и в уравнениях первого порядка, может представиться случай, когда формула вида (14′), содержащая n произвольных постоянных, не даёт всех частных решений, определяемых начальными данными Коши.

Пример 1. Уравнение $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)y'^2=0$ при $y \neq 0$, $y \neq e$ приводится к виду (1′) с правой частью, непрерывной и имеющей непрерывные производные по y и y'. Следовательно, решение, определяемое начальными данными x_0, y_0, y'_0 при условии $y_0 \neq 0, \neq e$, является обыкновенным. Решение, содержащее две произвольные постоянные a, b, даётся (как легко проверить) формулой $\ln y = \frac{x+a}{x+b}$. Однако из этого решения нельзя получить частные решения, определяемые начальными условиями $x = x_0$, $y = y_0$ ($\neq 0, \neq e$), $y'_0 = 0$. Эти частные решения получаются из формулы $y = C$ (легко видеть, что постоянное значение y удовлетворяет уравнению). В этом случае мы принуждены сказать, что общее решение уравнения даётся двумя формулами: $\ln y = \frac{x+a}{x+b}$, $y = C$.

Примечание 3. Уравнение вида (1) может быть разрешено относительно $y^{(n)}$, т. е. приведено к виду (1′) вблизи любых начальных значений $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}$, удовлетворяющих условию:

$$F(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n)}) = 0,$$

если только для этих значений аргументов производная $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$. Все последующие рассуждения имеют силу только в этом предположении. Рассмотрение тех значений, для которых производная $\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}$ обращается в нуль, привело бы к рассмотрению особых решений уравнения n-го порядка; мы на этой теории останавливаться не будем.

Дальнейшей целью настоящей главы будет — установить некоторые случаи, когда уравнение (1) или (1′) может быть проинтегрировано до конца в квадратурах или, по крайней мере, когда задача его интегрирования может быть сведена к интегрированию дифференциального уравнения порядка, меньшего, чем n.

§ 2. Типы уравнений n-го порядка, разрешаемые в квадратурах.

1. Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x) \tag{17}$$

легко интегрируется в квадратурах. В самом деле, из уравнения (17) последовательными интеграциями получаем:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1, \quad y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1(x - x_0) + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \frac{C_1(x-x_0)^2}{2} + C_2(x - x_0) + C_3, \ \ldots$$

и, наконец,

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \frac{C_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n. \tag{18}$$

Формула (18) даёт общее решение уравнения (17); при этом из промежуточных формул очевидно, что формула (18) представляет решение такой задачи Коши — найти решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным данным: при $x = x_0$

$$y_0 = C_n, \quad y_0' = C_{n-1}, \quad \ldots, \quad y_0^{(n-2)} = C_2, \quad y_0^{(n-1)} = C_1.$$

Следовательно, первый член правой части в формуле (18)

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \tag{19}$$

представляет частное решение уравнения (17), которое вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка обращается в нуль при $x = x_0$.