Дальнейшей целью настоящей главы будет — установить некоторые случаи, когда уравнение (1) или (1′) может быть проинтегрировано до конца в квадратурах или, по крайней мере, когда задача его интегрирования может быть сведена к интегрированию дифференциального уравнения порядка, меньшего, чем n.

§ 2. Типы уравнений n-го порядка, разрешаемые в квадратурах.

1. Уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x) \tag{17}$$

легко интегрируется в квадратурах. В самом деле, из уравнения (17) последовательными интеграциями получаем:

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1, \quad y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1(x - x_0) + C_2,$$

$$y^{(n-3)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + \frac{C_1(x-x_0)^2}{2} + C_2(x - x_0) + C_3, \ \ldots$$

и, наконец,

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx + \frac{C_1(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} +$$

$$+ \frac{C_2(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n. \tag{18}$$

Формула (18) даёт общее решение уравнения (17); при этом из промежуточных формул очевидно, что формула (18) представляет решение такой задачи Коши — найти решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным данным: при $x = x_0$

$$y_0 = C_n, \quad y_0' = C_{n-1}, \quad \ldots, \quad y_0^{(n-2)} = C_2, \quad y_0^{(n-1)} = C_1.$$

Следовательно, первый член правой части в формуле (18)

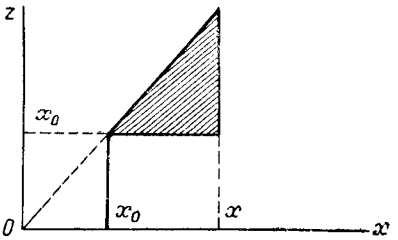
$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \tag{19}$$

представляет частное решение уравнения (17), которое вместе со своими производными до $(n-1)$-го порядка обращается в нуль при $x = x_0$.

Это выражение (19), содержащее n-кратную квадратуру по x, может быть преобразовано к такому виду, где содержится только одна квадратура по параметру.

Начнём со случая $n=2$; обозначая для большей ясности переменные интеграции в двух интегралах различными буквами, имеем:

$$y=\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz.$$



Черт. 24.

Рассматривая правую часть последнего выражения как двойной интеграл в плоскости xOz, мы видим, что он распространён на площадь заштрихованного треугольника (черт. 24); мы можем переменить порядок интеграции, взяв пределы по x от z до x, а по z от x_0 до x (формула Дирихле); имеем:

$$y=\int_{x_0}^{x} dz \int_{z}^{x} f(z)\,dx=\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz \int_{z}^{x} dx=\int_{x_0}^{x} (x-z)f(z)\,dz.$$

Рассмотрим далее случай $n=3$:

$$y=\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

По предыдущему, две внутренние интеграции мы можем заменить одной по параметру z, т. е. написать:

$$y=\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x-z)f(z)\,dz.$$

Интеграция опять распространяется на тот же треугольник плоскости xOz; меняя порядок интеграции и изменяя пределы, находим:

$$y=\int_{x_0}^{x} dz \int_{z}^{x} (x-z)f(z)\,dx=\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz \int_{z}^{x} (x-z)\,dx=$$

$$=\int_{x_0}^{x} f(z)\cdot\left[\frac{(x-z)^2}{2}\right]_{x=z}^{x=x} dz=\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} (x-z)^2 f(z)\,dz.$$

Переходим к любому n; допустим, что для $n-1$ справедлива формула

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n-1 \text{ раз}} f(x)\,dx = \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-2} f(z)\,dz.$$

Тогда получаем:

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n \text{ раз}} f(x)\,dx = \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-2} f(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{(n-2)!}\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz \int_{z}^{x} (x-z)^{n-2}\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)\,dz,$$

т. е. та же формула справедлива для n. Итак, окончательно имеем для всякого натурального n:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)\,dz \tag{19'}$$

(формула Коши). Формула (19′) представляет решение уравнения (17), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 0,\ y' = 0,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = 0 \text{ при } x = x_0.$$

Легко, обратно, убедиться дифференцированием в справедливости обоих этих утверждений.

Пример 2. $\frac{d^3y}{dx^3} = \ln x$; начальные значения $x_0 = 1$, y_0, y_0', y_0'' — любые числа. Имеем:

$$y = y_0 + \frac{(x-1)}{1} y_0' + \frac{(x-1)^2}{1\cdot 2} y_0'' + Y,$$

где

$$Y = \frac{1}{2}\int_{1}^{x} (x-z)^2 \ln z\,dz.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$Y=\frac{1}{2}\left[-\frac{(x-z)^3}{3}\ln z\right]_{z=1}^{z=x}+\frac{1}{6}\int_1^x\frac{(x-z)^3}{z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{6}\int_1^x\left(\frac{x^3}{z}-3x^2+3xz-z^2\right)dz=$$

$$=\frac{1}{6}\left(x^3\ln x-3x^2(x-1)+\frac{3x}{2}(x^2-1)-\frac{x^3-1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{18}.$$

Мы получили, таким образом, частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $Y=0$, $Y'=0$, $Y''=0$ при $x=1$. Чтобы получить искомое общее решение, связанное с задачей Коши, мы должны прибавить квадратный трёхчлен относительно $x-x_0$; получим:

$$y=y_0+\frac{x-1}{1}y_0'+\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}y_0''+$$
$$+\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{18}.$$

Если мы просто желаем получить общее решение (содержащее три произвольные постоянные), то достаточно заметить, что, в силу произвола выбора значений y_0, y_0', y_0'', коэффициенты при x^2, x и свободный член в последнем выражении являются совершенно произвольными, и мы можем написать искомое общее решение в виде:

$$y=\frac{1}{6}x^3\ln x-\frac{11}{36}x^3+C_2x^2+C_1x+C_0;$$

C_0, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Если дано уравнение вида:

$$F(y^{(n)},\ x)=0, \tag{17'}$$

то, разрешив его относительно $y^{(n)}$, мы приведём его к виду (17), и все предыдущие рассуждения сохраняют силу. Но иногда удаётся разрешить это уравнение в элементарных функциях лишь относительно x или, в более общем случае, выразить x и y в функции параметра t; тогда интеграция уравнения (17′) может быть тоже сведена к квадратурам, выраженным явно. Пусть параметрические уравнения, эквивалентные уравнению (17′), суть

$$x=\varphi(t),\quad y^{(n)}=\psi(t). \tag{17''}$$

По определению, $dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$, или, в наших условиях, $dy^{(n-1)} = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$, откуда

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt;$$

далее,

$$y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}\,dx = \int \varphi'(t)\,dt \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt \text{ и т. д.}$$

(Мы не пишем произвольных постоянных, включая их в знак неопределённого интеграла; если написать их явно, то, например, в выражении для $y^{(n-1)}$ появится член C_1, в выражении для $y^{(n-2)}$ — члены C_2 и C_1x или $C_1\varphi(t)$ и т. д.)

В результате получим:

$$x = \varphi(t), \quad y = \Phi(t, C_1, C_2, \ldots, C_n);$$

если из этих двух соотношений исключить t, получим общий интеграл уравнения (17′).

Примечание. Формула, к которой мы приходим, содержит n-кратную квадратуру; можно, аналогично формуле (19′), и в этом случае получить частное решение, содержащее одну квадратуру и решающее задачу Коши о нахождении решения уравнений (17′) или (17″), обращающегося в нуль вместе с $n-1$ последовательными производными при $x = x_0$. Для этого заметим, что первая из формул (17″) есть не что иное, как формула замены независимого переменного; итак, мы должны в формуле (19′) заменить x через $\varphi(t)$ и входившее в эту формулу z — через ту же функцию $\varphi(u)$ от нового параметра u. Мы имеем, далее, в формуле (17′) $y^{(n)} = f(x) = f[\varphi(t)]$, а это выражение по второй из формул (17″) равно $\psi(t)$. Наконец, пусть начальному значению x_0 соответствует значение t_0 параметра t. Мы получим:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} [\varphi(t) - \varphi(u)]^{n-1}\varphi(u)\,\varphi'(u)\,du. \tag{19″}$$

Пример 3. $e^{y''} + y'' = x$. Здесь разрешение относительно y'' в элементарных функциях невозможно; за параметр t естественно взять y'', и мы получаем параметрические уравнения: $x = e^t + t$, $y'' = t$. Отсюда

$$dy' = y''\,dx = t(e^t + 1)\,dt = (te^t - t)\,dt,$$

$$y' = \int (te^t + t)\,dt = (t-1)\,e^t + \frac{t^2}{2} + C_1;$$

далее,

$$dy = y'\,dx = \int \left[(t-1)\,e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)\,dt,$$

$$y = \int y'\,dx + C_2 =$$

$$= \int \left\{(t-1)\,e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + t - 1 + C_1\right)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right\}dt + C_2,$$

или

$$y=\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{2t}+\left(\frac{t^2}{2}-1+C_1\right)e^t+\frac{t^2}{6}+C_1t+C_2.$$

Последняя формула вместе с выражением для x, $x=e^t+t$ даёт параметрическое представление общего решения данного уравнения.

2. Уравнение вида

$$F(y^{(n)},\quad y^{(n-1)})=0 \tag{20}$$

приводится к квадратурам при любом натуральном n.

Предположим сначала, что уравнение (20) разрешено относительно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=f(y^{(n-1)}); \tag{20'}$$

вводим новую функцию z: $z=y^{(n-1)}$; уравнение (20′) примет вид:

$$z'=f(z).$$

Из этого уравнения получаем с помощью разделения переменных его общий интеграл:

$$x+C_1=\int\frac{dz}{f(z)}.$$

Допустим, что это соотношение разрешено относительно z:

$$z=\varphi(x,\ C_1).$$

Заменяя z его значением $y^{(n-1)}$, получим уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n-1)}=\varphi(x,\ C_1),$$

которое рассмотрено в п. 1 настоящего параграфа; при его интеграции войдут ещё $n-1$ произвольных постоянных, и мы получим общее решение уравнения (20) в виде:

$$y=\underbrace{\int dx\int dx\ldots\int}_{n-1\text{ раз}}\varphi(x,\ C_1)\,dx+C_2x^{n-2}+$$
$$+C_3x^{n-3}+\ldots+C_{n-1}x+C_n.$$

Если уравнение (20) неразрешимо в элементарных функциях относительно $y^{(n)}$, но мы имеем выражения $y^{(n)}$ и $y^{(n-1)}$ через параметр t:

$$y^{(n)}=\varphi(t),\quad y^{(n-1)}=\psi(t), \tag{20''}$$

то соотношение $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$, или $dx=\dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}$, даёт нам $dx=\dfrac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)}$, откуда x получается квадратурой:

$$x=\int\frac{\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)}+C_1.$$

Далее, находим последовательно:

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx = \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)},$$

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\,\psi'(t)\,dt}{\varphi(t)} + C_2,$$

$$dy^{(n-3)} = y^{(n-2)}\,dx, \ \ldots, \ dy = y'\,dx$$

и, наконец,

$$y = \int y'\,dx + C_n,$$

т. е. опять представление y и x в функции параметра t и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, следовательно, общее решение.

Пример 4. $ay'' = -(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$. Согласно изложенной теории, полагая $y' = z$, получаем уравнение первого порядка:

$$a\frac{dz}{dx} = -\left(\sqrt{1+z^2}\right)^3, \text{ или } dx = -\frac{a\,dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

откуда

$$x - C_1 = -a\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Дальше удобно интегрировать в параметрическом виде:

$$z = y' = \operatorname{tg}\varphi, \quad x - C_1 = -a\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = -a\sin\varphi.$$

Отсюда находим:

$$dy = y'\,dx = \operatorname{tg}\varphi\,(-a\cos\varphi\,d\varphi) = -a\sin\varphi\,d\varphi, \quad y = a\cos\varphi = C_2.$$

Исключая параметр φ, получаем общий интеграл:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2,$$

представляющий уравнение семейства всех окружностей радиуса a на плоскости.

3. Уравнения вида

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0 \tag{21}$$

также интегрируются в квадратурах. Введение нового переменного $z = y^{(n-2)}$ приводит уравнение (21) к уравнению второго порядка:

$$F(z'', z) = 0. \tag{22}$$

Если уравнение (22) разрешено относительно z'', т. е. имеет вид:

$$z'' = f(z), \tag{22'}$$

то один из методов его интеграции таков: умножив обе части на $2z'$, получаем: $2z'z'' = 2f(z)z'$, или в дифференциалах:

$$d(z'^2) = 2f(z)\,dz,$$

откуда

$$z'^2 = 2\int f(z)\,dz + C_1.$$

Последнее уравнение можно разрешить относительно производной и разделить переменные:

$$\frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)\,dz + C_1}} = dx;$$

отсюда находим общий интеграл уравнения (22′):

$$\int \frac{dz}{\sqrt{2\int f(z)\,dz + C_1}} = x + C_2.$$

Этот интеграл по замене z на $y^{(n-2)}$ получает вид:

$$\Phi(y^{(n-2)},\ x,\ C_1,\ C_2) = 0,$$

т. е. уравнение вида (17′); оно интегрируется, как мы уже знаем, квадратурами, причём эта интеграция даёт ещё $n-2$ произвольных постоянных, и мы получим общее решение уравнения (21).

Если уравнение (21) дано в не разрешённом относительно $y^{(n)}$ виде, но известно его параметрическое представление

$$y^{(n)} = \varphi(t),\ y^{(n-2)} = \psi(t), \tag{21′}$$

то интеграция совершается следующим образом. Мы имеем два равенства:

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx,\ dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx,$$

связывающих две неизвестные функции от t, именно x и y; исключая делением dx, получаем дифференциальное уравнение для $y^{(n-1)}$:

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dy^{(n-2)}$$

или, в силу уравнений (21′),

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)} = \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt,$$

откуда квадратурой находим $(y^{(n-1)})^2$; далее получим:

$$y^{(n-1)} = \sqrt{2\int \varphi(t)\,\psi'(t)\,dt + C}.$$

Имея параметрическое представление $y^{(n-1)}$ и $y^{(n-2)}$, мы свели задачу к типу (20″), рассмотренному в п. 2 настоящего параграфа. Дальнейшие квадратуры введут $n-1$ новых произвольных постоянных.

Пример 5. $a^2\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{d^2y}{dx^2}$. Полагая $y''=z$, приходим к уравнению: $a^2z''=z$; умножим обе части на $2z'$:

$$2a^2z'z''=2zz', \text{ или } 2a^2z'dz'=2z\,dz.$$

Интегрируя, находим:

$$a^2z'^2=z^2+C_1,$$

откуда

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2+C_1}}=\frac{dx}{a}.$$

Вторая интеграция даёт:

$$\ln(z+\sqrt{z^2+C_1})=\frac{x}{a}+\ln C_2, \text{ или } z+\sqrt{z^2+C_1}=C_2e^{\frac{x}{a}}.$$

Чтобы разрешить последнее уравнение относительно z, выгодно поступить следующим образом: делим 1 на обе части последнего равенства:

$$\frac{1}{z+\sqrt{z^2+C_1}}=\frac{1}{C_2}e^{-\frac{x}{a}};$$

в левой части освобождаемся от иррациональности в знаменателе, затем умножаем обе части на $-C_1$; получаем:

$$z-\sqrt{z^2+C_1}=-\frac{C_1}{C_2}e^{-\frac{x}{a}}.$$

Складывая это уравнение с исходным и деля на 2, получаем:

$$z=\frac{C_2}{2}e^{\frac{x}{a}}-\frac{C_1}{2C_2}e^{-\frac{x}{a}}.$$

Подставляя вместо z его значение y'' и интегрируя два раза, находим:

$$y=Ae^{\frac{x}{a}}+Be^{-\frac{x}{a}}+Cx+D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать уравнения:

106. $y'''^2+x^2=1$.

Указание. Удобно ввести параметрическое представление.

107. $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$.

108. $a^3y'''y''=(1+C^2y''^2)^{\frac{1}{2}}$.

109. $y'''=\sqrt{1+y''^2}$.

4. Приложение к динамике точки. Уравнения второго порядка, принадлежащие к рассмотренному типу, встречаются в задачах динамики; они соответствуют движениям материальной точки, проис-

ходящим в одном измерении под действием силы, зависящей только от положения точки. Обозначая переменную координату точки буквой x, а время буквой t, предполагая величину силы заданной функцией $f(x)$ и считая для простоты массу точки равной единице, мы имеем уравнение движения:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f(x), \tag{A}$$

которое принадлежит к типу (22′). Мы предполагаем функцию $f(x)$ непрерывной. Умножая обе части на $\frac{dx}{dt}\,dt=dx$ и интегрируя, мы получаем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx+C \tag{B}$$

— соотношение, называемое в механике *интегралом живых сил*. Если начальному моменту $t=0$ соответствуют начальное положение x_0 и начальная скорость v_0, то постоянная интеграции $C=\frac{1}{2}v_0^2$.

Для дальнейшей интеграции напишем уравнение (B) при данном значении постоянной C в форме:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=F(x) \tag{B′}$$

и исследуем характер функций, удовлетворяющих уравнению (B′). Рассмотрим сначала решение $x=x_0$ уравнения (A), соответствующее состоянию покоя; в этом случае $\frac{dx}{dt}\equiv 0$; следовательно, в формуле (B) имеем $C=0$; далее, так как $\frac{d^2x}{dt^2}\equiv 0$, имеем $f(x_0)=0$. Это заключение можно было предвидеть a priori, так как положение равновесия может осуществляться лишь в тех точках, где действующая сила равна нулю. Мы отметим другое следствие: *решению $x=x_0$ соответствует корень кратности $\geqslant 2$ уравнения*

$$F(x)=0, \tag{C}$$

так как $F(x_0)=2\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx=0$, $F'(x_0)=f(x_0)=0$; очевидно, что и обратно, если x_1 есть кратный корень уравнения (C), то $x=x_1$ есть решение уравнения (A).

Действительные движения, не сводящиеся к покою, могут существовать лишь при положительных значениях постоянной C; данному начальному значению x_0 при данном $C>0$ соответствуют два движения, так как уравнение (B′) определяет двузначную функцию $\frac{dx}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt}=+\sqrt{F(x)},\quad \frac{dx}{dt}=-\sqrt{F(x)}. \tag{B″}$$

Эти два движения соответствуют положительному или отрицательному направлению начальной скорости. Рассмотрим, например, первое движение. Если

$F(x)$ не обращается в нуль при $x_0 < x < \infty$, то решение первого уравнения (B″) получится из формулы:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{+\sqrt{F(x)}} = t, \tag{D}$$

причём интеграл в левой части существует для сколь угодно больших значений x; следовательно, x как функция t неограниченно возрастает.

Пусть теперь для некоторого значения $x_1 > x_0$ мы имеем:

$$F(x_1) = 0.$$

Здесь возможны два случая:

а) x_1 есть простой корень уравнения (C), т. е. $F(x_1) = 0$, $F'(x_1) < 0$ (знак $<$ имеет место потому, что при возрастании x функция F переходит к нулю от положительных значений). Функция F имеет вид:

$$F(x) = (x_1 - x)\varphi(x), \quad \varphi(x_1) > 0.$$

Интеграл в формуле (D) в пределах от x_0 до x_1 сходится:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{+\sqrt{F(x)}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{(x_1 - x)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\varphi(x)}} = t_1.$$

Итак, по истечении промежутка времени t_1 точка дойдёт до положения x_1; $x = x_1$ есть решение уравнения (B′) (особое — глава III, § 4, **1**); но этому решению не соответствует никакого движения, т. е. решения уравнения (A), так как движению $x = \text{const.}$, по доказанному, соответствует кратный корень уравнения (C). В момент t_1 скорость движения равна нулю:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_1} = \sqrt{F(x)} = 0.$$

Вычислим ускорение:

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t_1} = f(x_1) = \frac{1}{2}F'(x_1) = -\frac{1}{2}\varphi(x_1) < 0.$$

Отрицательное ускорение сообщит точке при $t > t_1$ отрицательную скорость, т. е. для значений $t > t_2$ движение будет управляться вторым уравнением (B″): $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{F(x)}$. Координата x движущейся точки станет убывать при $t > t_1$.

б) x_1 есть кратный корень уравнения (C): $F(x_1) = F'(x_1) = 0$. Функция F имеет вид:

$$F(x) = (x_1 - x)^2\psi(x); \quad \psi(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_0 < x < x_1, \quad \psi(x_1) \geqslant 0.$$

Интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{+\sqrt{F(x)}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{(x_1 - x)\sqrt{\psi(x)}}$$

расходится. Следовательно, из формулы (D) имеем: когда x, возрастая, стремится к x_1, t возрастает неограниченно. Отсюда следует, что при $t \to +\infty$ точка стремится асимптотически к положению $x = x_1$, которое [в силу ранее сделанного замечания, см. стр. 163] есть положение равновесия. Уравнение $\frac{dx}{dt} = -\sqrt{F(x)}$ *может быть получено* из предыдущего заменой t на $-t$; следовательно, движение, соответствующее начальному положению x_0, асимптотически приближается к положению покоя x_1, когда $t \to -\infty$. Рассматривая ту же траекторию при t возрастающем, начиная с того момента, когда движущаяся точка находится в сколь угодно малой окрестности положения x_1, мы видим, что в некоторый момент она займёт положение x_0, т. е. удалится от x_1 на расстояние, превышающее некоторую положительную величину — положение равновесия является неустойчивым (при данном постоянном C).

Пусть теперь x_0 лежит между двумя корнями уравнения (C):

$$x_2 < x_0 < x_1, \quad F(x_1) = F(x_2) = 0, \quad F(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_2 < x < x_1.$$

Наибольший интерес представляет случай, когда оба корня простые:

$$F'(x_2) > 0, \quad F'(x_1) < 0.$$

Мы уже видели, что движущаяся точка, движение которой определено начальными данными x_0, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = +\sqrt{F(x_0)}$, по истечении времени t_1 займёт положение x_1, после чего x начнёт убывать. Это убывание будет иметь место в течение промежутка времени

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{-\sqrt{F(x)}} = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}},$$

по истечении которого точка займёт положение x_2; рассуждение, подобное вышеприведённому, показывает, что в момент $t_1 + T$ произойдёт опять изменение знака скорости; x будет возрастать, пока не достигнет значения x_1, т. е. в течение времени

$$\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = T;$$

при этом точка займёт начальное положение x_0 в момент

$$t_1 + T + \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = t_1 + 2T - \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = t_1 + 2T - t_1 = 2T.$$

В этот момент скорость опять будет $+\sqrt{F(x_0)}$. Рассматривая момент $2T$ как начальный, мы, ввиду независимости правой части уравнения (B′) от t, получим повторение того же самого движения. Итак, в рассматриваемом случае *решение уравнения* (A) *есть периодическая функция времени* t *с периодом*

$$2T = 2\int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{F(x)}}.$$

Это предложение есть частный (одномерный) случай общей теоремы Вейерштрасса об «условно-периодических» движениях.

Другие случаи наличия двух корней уравнения (C) легко разрешаются на основании предыдущего. Если $x_2 < x_0 < x_1$ и оба корня x_1 и x_2 кратные, то движения асимптотически стремятся к x_1 при $t \to +\infty$ и к x_2 при $t \to -\infty$, если $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 > 0$, и $\lim\limits_{t \to +\infty} x = x_2$, $\lim\limits_{t \to -\infty} x = x_1$ при $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 < 0$.

Если x_1 — кратный корень, а x_2 — простой, то всякое движение при $t \to \pm\infty$ имеет пределом x_1, а в промежутке координата x один раз принимает минимальное значение x_2.

Отметим, наконец, что если $2\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx = (x - x_0)^2 \psi(x)$, где $\psi(x) < 0$, то при значении $C = 0$ возможным движением является только покой: $x = x_0$. При малых положительных значениях C правая часть уравнения (B)

$$2\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C = (x - x_0)^2 \psi(x) + C$$

будет положительной лишь при малых значениях $|x - x_0|$; следовательно, при малом изменении C возле нуля точка при своём движении может лишь мало уклоняться от положения $x = x_0$, которое оказывается, таким образом, *устойчивым положением равновесия*. Называя функцию $-\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx - C = -\frac{1}{2}F(x)$ потенциальной энергией, мы приходим к заключению: *максимуму потенциальной энергии соответствует неустойчивое положение равновесия, минимуму — устойчивое.*

Пример 6. Уравнение *математического маятника*: $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi$. Положения равновесия даются из условия: $\sin\varphi = 0$, т. е. $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$; потенциальная энергия $V = -\frac{g}{l}\cos\varphi - C$ имеет минимум при $\varphi = 0$ — это устойчивое положение равновесия, и максимум при $\varphi = \pi$ — неустойчивое равновесие. Пишем интеграл живых сил:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\cos\varphi - 1) + C,$$

принимая для простоты за начальное положение $\overline{\varphi}_0 = 0$. Если $C > \frac{2g}{l}$, то правая часть всегда положительна и угол φ монотонно возрастает или убывает во время всего движения. Если $C = \frac{2g}{l}$, то правая часть равна $\frac{g}{l}(1 + \cos\varphi) = \frac{2g}{l}\cos^2\frac{\varphi}{2}$; она имеет двойные корни $\varphi = \pm\pi$, соответствующие положению равновесия; движения асимптотически стремятся к (неустойчивому) равновесию при $t \to \pm\infty$. Пусть, далее, $0 < C < 2\frac{g}{l}$; мы можем положить $C = \frac{g}{l}(1 - \cos\varphi_1)$, $0 < \varphi_1 < \pi$. Интеграл живых сил примет вид

$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_1)$. Правая часть имеет простые нули при $\varphi = \pm\varphi_1$; маятник будет совершать колебательные периодические движения амплитуды φ_1, $-\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1$. Период одного качания есть

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_1}}.$$

Наконец, значению $C = 0$ соответствует устойчивое положение равновесия $\varphi = 0$. При $C < 0$ движения невозможны.

§ 3. Промежуточные интегралы. Уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Промежуточный интеграл. Если мы имеем уравнение n-го порядка

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

то, как уже сказано, соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{15}$$

определяющее решение этого уравнения и связывающее y, x и n существенных произвольных постоянных, называется общим интегралом уравнения (1). Иначе, общий интеграл можно определить так: соотношение (15) называется общим интегралом уравнения (1), если, исключая из него и из уравнений, получаемых дифференцированием его по x (причём y рассматривается как функция от x), произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, мы приходим к уравнению (1) (глава I, § 1).

Пусть теперь мы имеем соотношение:

$$\psi(x, y, y', \ldots, y^{(k)}, C_{k+1}, C_{k+2}, \ldots, C_n) = 0, \tag{23}$$

в которое входят производные до k-го порядка (производная $y^{(k)}$ входит непременно) и $n-k$ произвольных постоянных.

Дифференцируем это уравнение $n-k$ раз по x, считая y функцией x; имеем:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}y' + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y^{(k)}}y^{(k+1)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^{n-k}\psi}{\partial x^{n-k}} + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial y^{(k)}}y^{(n)} = 0. \end{array}\right\} \tag{23'}$$

Если в результате исключения из $n-k+1$ уравнений (23) и (23′) $n-k$ постоянных C_i $(i = k+1, \ldots, n)$ мы получим уравнение (1), то соотношение (23) называется *промежуточным интегралом*