

$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \varphi_1)$ . Правая часть имеет простые нули при  $\varphi = \pm \varphi_1$ ; маятник будет совершать колебательные периодические движения амплитуды  $\varphi_1$ ,  $-\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1$ . Период одного качания есть

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_1}}.$$

Наконец, значению  $C = 0$  соответствует устойчивое положение равновесия  $\varphi = 0$ . При  $C < 0$  движения невозможны.

### § 3. Промежуточные интегралы. Уравнения, допускающие понижение порядка.

1. Промежуточный интеграл. Если мы имеем уравнение  $n$ -го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

то, как уже сказано, соотношение

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (15)$$

определенное решение этого уравнения и связывающее  $y$ ,  $x$  и  $n$  существенных произвольных постоянных, называется общим интегралом уравнения (1). Иначе, общий интеграл можно определить так: соотношение (15) называется общим интегралом уравнения (1), если, исключая из него и из уравнений, получаемых дифференцированием его по  $x$  (причём  $y$  рассматривается как функция от  $x$ ), произвольные постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , мы приходим к уравнению (1) (глава I, § 1).

Пусть теперь мы имеем соотношение:

$$\psi(x, y, y', \dots, y^{(k)}, C_{k+1}, C_{k+2}, \dots, C_n) = 0, \quad (23)$$

в которое входят производные до  $k$ -го порядка (производная  $y^{(k)}$  входит непременно) и  $n - k$  произвольных постоянных.

Дифференцируем это уравнение  $n - k$  раз по  $x$ , считая  $y$  функцией  $x$ ; имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y^{(k)}}, y^{(k+1)} &= 0, \\ \vdots &\quad \vdots \\ \frac{\partial^{n-k} \psi}{\partial x^{n-k}} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y^{(k)}} y^{(n)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23')$$

Если в результате исключения из  $n - k + 1$  уравнений (23) и (23')  $n - k$  постоянных  $C_i (i = k + 1, \dots, n)$  мы получим уравнение (1), то соотношение (23) называется промежуточным интегралом.

уравнения (1). В частности, если соотношение (23) содержит только одно произвольное постоянное, т. е. имеет вид:

$$\psi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, C) = 0,$$

то оно называется *первым интегралом* уравнения (1).

Промежуточный интеграл (23), если в нём рассматривать  $y$  как искомую функцию, сам является дифференциальным уравнением порядка  $k$ , где  $k < n$ . Легко видеть, что каждое решение уравнения (23) является решением уравнения (1); в самом деле, если  $y = \varphi(x)$  есть решение уравнения (23), то, подставляя это значение  $y$  в уравнения (23) и (23'), мы обратим их в тождество; а значит, и уравнение (1), которое является следствием системы (23) и (23'), обратится в тождество, что и требовалось доказать. Если мы найдём общее решение уравнения (23), то оно должно содержать  $k$  новых произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_k$  сверх входящих в самое уравнение параметров  $C_{k+1}, \dots, C_n$ , и мы получим решение уравнения (1), содержащее  $n$  произвольных постоянных, т. е. общее решение этого последнего уравнения. Таким образом, знание *промежуточного интеграла* вида (23) позволяет *свести задачу интеграции уравнения  $n$ -го порядка к интеграции уравнения порядка  $k < n$* , т. е. к задаче, теоретически говоря, более простой.

В предыдущем параграфе мы уже встречались с промежуточными интегралами; так, в пункте 1, при решении уравнения (17), мы писали последовательно промежуточные интегралы с одним, двумя, ...,  $n - 1$  произвольными постоянными, пока не получили, наконец, общий интеграл (18); в пункте 2 для уравнения (20') мы снова находили промежуточный интеграл  $z = \varphi(x, C_1)$ , где  $z = y^{(n-1)}$ , с одним произвольным постоянным (первый интеграл); для уравнения (21) мы имеем первый интеграл  $(y^{(n-1)})^2 = 2 \int f(z) dz + C_1$  и, далее, промежуточный интеграл с двумя произвольными постоянными. И в настоящем параграфе, в дальнейших разделах, интеграция дифференциального уравнения  $n$ -го порядка будет распадаться на два шага: 1) нахождение промежуточного интеграла и 2) интеграция уравнения, представляемого этим промежуточным интегралом.

**П р и м е ч а н и е.** Если мы знаем два различных первых интеграла уравнения (1):

$$\psi_1(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) = 0, \quad \psi_2(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, C_2) = 0,$$

то исключение из этих соотношений производной  $y^{(n-1)}$  приведёт к промежуточному интегралу, содержащему две произвольные постоянные. Аналогичный результат получим для трёх, четырёх, ...,  $n - 1$  первых интегралов. Наконец, если мы знаем  $n$  различных первых интегралов уравнения (1), то, исключая из них  $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ , мы придём к соотношению, связывающему  $x, y, C_1, C_2, \dots, C_n$ , т. е. к общему интегралу данного уравнения. Таким образом, если известны  $n$  (различных) первых интегралов, то общее решение уравнения получается без интеграции, при помощи исключения.

2. Уравнения, не содержащие явно искомой функции или независимого переменного. Пусть уравнение  $n$ -го порядка не содержит явно искомой функции  $y$ ; для общности предположим, что оно не содержит также её  $k - 1$  первых производных  $y'$ , ...,  $y^{(k-1)}$ , и низшая производная, явно входящая в уравнение, есть  $y^{(k)}$  ( $1 \leq k \leq n - 1$ ).

Уравнение имеет вид:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (24)$$

Полагая  $y^{(k)} = z$ , мы заменяем уравнение (24) уравнением

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \quad (24')$$

порядка  $n - k$ . В противоположность случаям, рассмотренным в § 2, здесь мы не можем утверждать, что уравнение (24') всегда интегрируется в квадратурах. Но вместо уравнения  $n$ -го порядка мы получили уравнение порядка  $n - k < n$ . Допустим, что мы сумели найти общий интеграл уравнения (24'):

$$\Phi(x, z, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0,$$

или

$$\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) есть промежуточный интеграл уравнения (24), содержащий  $n - k$  постоянных. Само уравнение (25) принадлежит к типу (17') § 2, т. е. заведомо интегрируется в квадратурах, и, решая его, мы найдём общий интеграл уравнения (24). Если  $k = n$ , мы непосредственно имеем уже рассмотренное нами уравнение (17').

Пусть, далее, уравнение (1) не содержит явно  $x$ , т. е. имеет вид:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (26)$$

Здесь мы проведём такую замену переменных: в качестве новой искомой функции вводим  $p = \frac{dy}{dx}$ ; за независимое переменное принимаем  $y$ . Вычисляем в этом предположении производные различных порядков:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(p \frac{dp}{dy})}{dy} \frac{dy}{dx} = p \left[ p \frac{d^2p}{dy^2} + \left( \frac{dp}{dy} \right)^2 \right] = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p \left( \frac{dp}{dy} \right)^2.$$

Таким образом, вторая производная от  $y$  по  $x$  выражается через  $p$  и  $\frac{dp}{dy}$ , третья производная выражается через  $p$  и его производные не выше второго порядка. Легко доказать методом полной индукции, что  $\frac{dy}{dx^k}$  выражается через  $p$ ,  $\frac{dp}{dy}$ , ...,  $\frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}$ . Подставляя выражения

для  $y'', y''', \dots, y^{(n)}$  в новых переменных в уравнение (26), получим новое дифференциальное уравнение порядка  $n - 1$ :

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Если его удастся проинтегрировать, то его общий интеграл

$$\Phi(y, p, C_1, \dots, C_{n-1}) = 0, \text{ или } \Phi\left(y, \frac{dy}{dx}, C_1, \dots, C_{n-1}\right) = 0,$$

который является промежуточным для уравнения (26), даёт дифференциальное уравнение первого порядка, интегрируемое в квадратурах.

**Пример 7. Линия погони.** Рассмотрим такую кинематическую задачу. На оси  $Ox$  в положительном направлении движется с постоянной скоростью  $a$  точка  $P$ ; на плоскости  $xOy$  движется точка  $M$  с постоянной скоростью  $v$  так, что вектор

скорости всегда направлен в точку  $P$ ; найти траекторию точки  $M$  (черт. 25).

Обозначим декартовы прямоугольные координаты точки  $M$  через  $(x, y)$  и абсциссу точки  $P$  через  $X$ . Из условия задачи имеем:

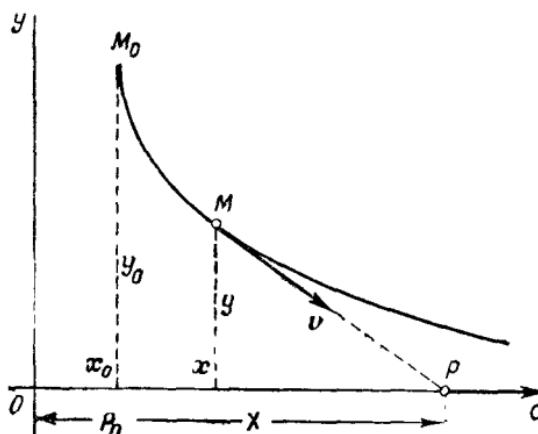
$$X = X_0 + at, \quad (A)$$

$$dx^2 + dy^2 = v^2 dt^2, \quad (B)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{X-x}. \quad (C)$$

Из уравнения (A) имеем:  $X - x = X_0 - x + at$ ; затем из (C):

$$X_0 - x + at = -\frac{y}{\frac{dy}{dx}}. \quad (D)$$



Черт. 25.

Принимаем  $x$  за независимое переменное (обозначаем производные от  $y$  по  $x$  штрихами) и исключаем  $t$ ; из уравнения (B) имеем:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \sqrt{1+y'^2};$$

из уравнения (D), дифференцируя по  $x$ , находим:

$$-1 + a \frac{dt}{dx} = \frac{yy'' - y'^2}{y'^2}, \text{ или } \frac{dt}{dx} = \frac{yy''}{ay'^2}.$$

Приравнивая оба найденных выражения для  $\frac{dt}{dx}$ , получаем дифференциальное уравнение линии погони:

$$y'' = \frac{a}{v} \frac{y'^2}{y} \sqrt{1+y'^2}.$$

Уравнение не содержит независимого переменного; согласно изложенному нами общему методу вводим новое переменное:  $y' = p$ , откуда  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ ; получаем:

$$p \frac{dp}{dy} = \frac{a}{v} \frac{p^2}{y} \sqrt{1+p^2}, \text{ или } \frac{dp}{dy} = \frac{a}{v} \frac{p}{y} \sqrt{1+p^2}.$$

Переменные разделяются:

$$\frac{dp}{p \sqrt{1+p^2}} = \frac{a}{v} \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, находим (замечая, что  $p$  отрицательно):

$$\frac{dp}{p \sqrt{1+p^2}} = -\frac{\frac{dp}{p^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{p}\right)^2}},$$

$$\ln\left(\frac{1}{p} + \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1}\right) = \frac{a}{v} (\ln y + \ln C),$$

откуда

$$\frac{1}{p} + \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} = (Cy)^{\frac{a}{v}}.$$

Чтобы ввести произвольные постоянные наиболее простым образом, предположим, что в момент, когда точки  $P$  и  $M$  находились на одной параллели к оси  $y$ , ордината точки  $M$  была равна  $y_0$  (т. е. что погоня начинается с положения  $M_0P_0$ ): в этот момент, очевидно,  $\frac{1}{p} = 0$ , и мы находим  $C = \frac{1}{y_0}$ ; промежуточный интеграл пишется так:

$$\frac{1}{p} + \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}}.$$

Освобождаясь от радикала, как в примере 5, находим:

$$-\frac{1}{p} + \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2 + 1} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}},$$

откуда

$$\frac{2}{p} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}}, \text{ или } dx = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\frac{a}{v}} - \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-\frac{a}{v}} \right\} dy.$$

Предполагая  $a \neq v$  (мы будем считать, что  $a < v$ , т. е. что точка  $M$  может догнать точку  $P$ ), получаем искомое уравнение линии погони при помощи второй квадратуры:

$$x = \frac{y_0}{2\left(1 + \frac{a}{v}\right)} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1 + \frac{a}{v}} - \frac{y_0}{2\left(1 - \frac{a}{v}\right)} \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1 - \frac{a}{v}} + C_1,$$

<sup>1)</sup> Решение  $p = 0$  в силу уравнения (C) даёт  $y = 0$ , т. е. движение по прямой — оси  $Ox$ .

где постоянное  $C_1$  легко определится через начальную абсциссу  $x_0$  при  $y = y_0$ . Окончательно имеем:

$$x = \frac{y_0}{2\left(1 + \frac{a}{v}\right)} \left[ \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\frac{a}{v}} - 1 \right] - \frac{y_0}{2\left(1 - \frac{a}{v}\right)} \left[ \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\frac{a}{v}} - 1 \right] + x_0.$$

Абсциссу точки встречи получаем, полагая  $y = 0$ ; её значение

$$x_1 = x_0 + \frac{ay_0}{v\left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right)} = x_0 + y_0 \frac{av}{v^2 - a^2}.$$

Наконец, продолжительность погони

$$T = \frac{x_1 - x_0}{a} = \frac{y_0 v}{v^2 - a^2}.$$

### ЗАДАЧИ.

110. Проинтегрировать до конца уравнение линии погони в случае  $v = a$ .  
Проинтегрировать уравнения:

111.  $2(2a - y)y'' = 1 + y'^2$ .

112.  $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$ .

113.  $yy'' + y'^2 = y^2 \ln y$ .

3. Понижение порядка в однородных уравнениях различных типов.

А) Пусть левая часть уравнения (1) есть однородная функция аргументов  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ , т. е. пусть выполняется тождественно

$$F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \quad (27)$$

для любого  $k$ ;  $m$  есть показатель однородности.

Заметим, что если  $y_1(x)$  есть решение такого уравнения, то  $Cy_1(x)$  есть также решение ( $C$  — произвольная постоянная). В самом деле, результат подстановки в левую часть уравнения (1) на место  $y$  выражения  $Cy_1(x)$  даёт произведение из  $C^m$  на результат подстановки в то же уравнение функции  $y_1(x)$ , что, по условию, тождественно равно нулю. Если мы введём новую искомую функцию

$$u = \ln y,$$

то, по предыдущему, если  $u_1(x)$  будет решением преобразованного уравнения, то  $u_1 + \ln C = u_1(x) + C_1$  будет также его решением. Иначе говоря, уравнение допускает группу преобразований  $x_1 = x, u_1 = u + C$ . Рассуждения, аналогичные проведённым в главе I (§ 3, 3), показывают, что в таком случае искомая функция  $u$  не входит явно в преобразованное уравнение. А тогда, как мы знаем, замена зависимости переменного

$$u' = z$$

приводит к уравнению порядка  $n - 1$ . Исключая промежуточное переменное  $u$ , получаем такую зависимость между  $y$  и  $z$ :

$$y = e^{\int z dx}. \quad (28)$$

Итак, порядок рассматриваемого уравнения может быть понижен на единицу введением новой неизвестной функции  $z$ , связанной с  $y$  соотношением (28).

Проверим это рассуждение непосредственным вычислением. Последовательно дифференцируя равенство (28) по  $x$ , находим:

$$y' = ze^{\int z dx}, \quad y'' = (z' + z^2)e^{\int z dx}, \quad y''' = (z'' + 3zz' + z^3)e^{\int z dx}, \dots,$$

и, вообще,  $y^{(k)}$  выразится как произведение  $e^{\int z dx}$  на выражение, содержащее  $z$  и его производные до порядка  $k - 1$ <sup>1)</sup>. Вносим эти выражения в уравнение и замечаем, что, в силу соотношения (27), имеем:

$$\begin{aligned} F(x, e^{\int z dx}, ze^{\int z dx}, (z' + z^2)e^{\int z dx}, \dots) &\equiv \\ &\equiv e^{m \int z dx} F(x, 1, z, z' + z^2, \dots) \end{aligned}$$

( $m$  — показатель однородности). Множитель  $e^{m \int z dx}$  в уравнении может быть отброшен, и мы получаем уравнение порядка  $n - 1$ :

$$F(x, 1, z, z' + z^2, \dots) = 0.$$

Если его удастся решить, мы получим промежуточный интеграл уравнения (1), зависящий от  $n - 1$  постоянных, вида

$$\Phi(z, x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) = 0, \text{ или } \Phi\left(\frac{y'}{y}, x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}\right) = 0.$$

Когда выражение функции  $z$  известно, то  $y$  получится квадратурой по формуле (28), причём войдёт новое постоянное  $C_n$ :

$$y = e^{\int z dx + \ln C_n} = C_n e^{\int z dx}.$$

Пример 8.  $x^2 y y'' = (y - xy')^2$ . Уравнение — однородное второй степени относительно  $y$ ,  $y'$ ,  $y''$ . Подстановка  $y = e^{\int z dx}$  даёт уравнение  $x^2(z' + z^2) = (1 - xz)^2$ , или  $x^2 z' + 2xz - 1 = 0$  — уравнение линейное. Решаем его:

$$z = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Отсюда

$$y = e^{\int \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) dx}, \quad \text{или} \quad y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

<sup>1)</sup> Этот факт легко доказывается полной индукцией.

## ЗАДАЧИ.

Решить уравнения:

$$114. yy'' - y'^2 = 0.$$

$$115. xyy'' + xy'^2 - yy' = 0.$$

В) Другим типом однородных дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка, являются уравнения, однородные относительно  $x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny$ . Для установления этой однородности пишем уравнение (1) в форме:

$$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny) = 0. \quad (29)$$

Уравнение принадлежит к рассматриваемому нами типу, если функция  $\Phi$  в формуле (29) однородна (степени  $m$ ) в отношении всех своих аргументов, т. е. если имеет место тождество:

$$\Phi(kx, ky, kdx, kdy, kd^2y, \dots, kd^ny) \equiv \\ \equiv k^m \Phi(x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny).$$

Вид уравнения показывает, что оно не изменяется, если заменить  $x$  через  $Cx$  и  $y$  через  $Cy$  ( $C$  — постоянное). Если мы введём переменные  $u = \frac{y}{x}$  и  $x$ , то преобразованное уравнение будет допускать группу преобразований  $u_1 = u, x_1 = Cx$ . Наконец, если ввести новое независимое переменное  $\xi = \ln x$ , то уравнение, связывающее  $u$  и  $\xi$ , будет допускать группу преобразований:

$$u_1 = u, \quad \xi_1 = \xi + C;$$

отсюда следует, что в последнее уравнение не входит явно  $\xi$  (см. главу I, § 3, 3); поэтому, как показано в п. 2 настоящего параграфа, оно допускает понижение порядка на единицу. Выписываем формулы непосредственного перехода от переменных  $x, y$  к переменным  $\xi, u$ :

$$x = e^\xi, \quad y = ue^\xi. \quad (30)$$

Проверим непосредственным вычислением результат этой замены.

Последовательным дифференцированием находим:

$$dx = e^\xi d\xi, \quad dy = e^\xi (du + u d\xi); \\ \frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi} + u.$$

Далее,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{du}{d\xi} + u \right) \frac{d\xi}{dx} = e^{-\xi} \left( \frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi} \right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{d\xi} \left[ e^{-\xi} \left( \frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi} \right) \right] \frac{d\xi}{dx} = e^{-2\xi} \left( \frac{d^3u}{d\xi^3} - \frac{du}{d\xi} \right)$$

и т. д. Итак, мы получаем:

$$\begin{aligned} x &= e^\xi, \quad y = ue^\xi, \quad dx = e^\xi d\xi, \quad dy = e^\xi (du + u d\xi), \\ d^2y &= e^\xi (d^2u + du d\xi), \quad d^3y = e^\xi (d^3u - du d\xi^2), \dots \end{aligned} \quad (30')$$

(при этом  $d^2y, d^3y, \dots$  взяты в предположении, что независимое переменное есть  $x$ , а  $d^2u, d^3u, \dots$  — в предположении, что независимое переменное есть  $\xi$ ). Внося выражения (30') в уравнение (29), мы, в силу однородности, можем вынести за знак функции  $\Phi$  множитель  $e^{m\xi}$  и сократить на него уравнение; получим:

$$\Phi(1, u, d\xi, du + u d\xi, d^2u + du d\xi, \dots, d^n u + \dots) = 0.$$

Мы получили уравнение  $n$ -го порядка, в которое явно не входит независимое переменное  $\xi$ ; это уравнение принадлежит к типу, рассмотренному в п. 2 настоящего параграфа, и допускает понижение порядка на единицу.

Пример 9. Уравнение

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} - x^3 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3 + 3x^2y \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - (3xy^2 + 2x^3) \frac{dy}{dx} + 2x^2y + y^3 = 0$$

— однородное третьей степени относительно  $x, y, dx, dy, d^2y$ ; делаем подстановку  $x = e^\xi, y = ue^\xi$ ; тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi} + u, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-\xi} \left( \frac{d^2u}{d\xi^2} + \frac{du}{d\xi} \right).$$

Подставляем в уравнение и сокращаем на  $e^{3\xi}$ :

$$u'' + u' - (u' + u)^3 + 3u(u' + u)^2 - (3u^2 + 2)(u' + u) + 2u + u^3 = 0,$$

или, раскрывая скобки и производя приведение,

$$u'' - u' - u^3 = 0.$$

Новое уравнение не содержит явно ни  $\xi$ , ни  $u$ ; полагая  $u' = p$  и вводя  $u$  в качестве независимого переменного, имеем:

$$p \frac{dp}{du} - p - p^3 = 0.$$

Оставляя пока в стороне уравнение  $p = 0$ , имеем:  $du = \frac{dp}{1+p^2}$ ,  $p = \operatorname{tg}(u + C_1)$ , т. е.  $\frac{du}{d\xi} = \operatorname{tg}(u + C_1)$ , откуда  $\frac{dn}{\operatorname{tg}(u + C_1)} = d\xi$ ,  $\ln \sin(u + C_1) = \xi + \ln C_2$ ,  $\sin(u + C_1) = C_2 e^\xi$ , или, возвращаясь к начальным переменным,  $\sin\left(\frac{y}{x} + C_1\right) = C_2 x$ , или  $y = -C_1 x + x \arcsin(C_2 x)$ . Решение  $p = 0$  даёт  $u = C$  или  $y = Cx$ ; это решение получается из общего, если в нём положить  $C_2 = 0$ .

С) Можно рассмотреть несколько более общий класс однородных уравнений, именно уравнения вида (29), в которых функция  $\Phi$  однородна относительно своих аргументов, если считать  $x$  и  $dx$  первого измерения, а  $y, dy, d^2y, \dots$  — измерения  $m$ ; тогда  $\frac{dy}{dx}$  будет

иметь измерение  $m - 1$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2}$  — измерение  $m - 2$  и т. д. Для понижения порядка применяем подстановку:

$$x = e^\xi, \quad y = ue^{m\xi};$$

мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{m\xi} \left( \frac{du}{d\xi} + mu \right) \frac{d\xi}{dx} = e^{(m-1)\xi} \left( \frac{du}{d\xi} + mu \right), \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{d\xi} \left[ e^{(m-1)\xi} \left( \frac{du}{d\xi} + mu \right) \right] \frac{d\xi}{dx} = \\ &= e^{(m-2)\xi} \left[ \frac{d^2u}{d\xi^2} + (2m-1) \frac{du}{d\xi} + m(m-1)u \right], \dots \end{aligned}$$

Каждая производная содержит множитель  $e^\xi$  в такой степени, каково измерение этой производной в функции  $F$ ; поэтому  $e^\xi$  в некоторой степени выйдет за знак функции  $\Phi$ . Мы получим дифференциальное уравнение между  $u$  и  $\xi$ , не содержащее явно  $\xi$ , т. е. допускающее понижение порядка на единицу.

Пример 10.

$$x^4 \frac{d^2y}{dx^2} - (x^3 + 2xy) \frac{dy}{dx} + 4y^2 = 0.$$

Если  $x$  и  $dx$  рассматривать как величины первого измерения и  $y$ ,  $dy$ ,  $d^2y$  — как второго измерения, то данное уравнение является однородным четвёртого измерения. Согласно нашей теории, делаем замену переменных:  $x = e^\xi$ ,  $y = ue^{2\xi}$ . Находим:

$$\frac{dy}{dx} = e^\xi \left( \frac{du}{d\xi} + 2u \right), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2u}{d\xi^2} + 3 \frac{du}{d\xi} + 2u.$$

При подстановке в уравнение множитель  $e^{4\xi}$  сокращается, и мы получаем:

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + 3 \frac{du}{d\xi} + 2u - (1 + 2u) \left( \frac{du}{d\xi} + 2u \right) + 4u^2 = 0,$$

или

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} + 2(1-u) \frac{du}{d\xi} = 0.$$

Согласно сказанному в п. 2 настоящего параграфа, полагаем  $\frac{du}{d\xi} = p$ , откуда  $\frac{d^2u}{d\xi^2} = p \frac{dp}{du}$ . Получаем:

$$p \frac{dp}{du} + 2(1-u)p = 0.$$

Оставляя пока в стороне уравнение  $p = 0$ , рассмотрим уравнение:

$$\frac{dp}{du} + 2(1 - u) = 0;$$

имеем:

$$dp = 2(u - 1)du, \quad p = u^2 - 2u + C_1, \quad \frac{du}{u^2 - 2u + C_1} = d\xi.$$

Проведём до конца интеграцию последнего уравнения в случае, если корни двучлена в знаменателе действительны и различные, т. е. если  $C_1 = 1 - \alpha^2$ , где  $\alpha \neq 0$  — новая произвольная постоянная:

$$\begin{aligned} \frac{du}{(u-1)^2 - \alpha^2} &= d\xi, \quad \frac{du}{u-1-\alpha} - \frac{du}{u-1+\alpha} = 2\alpha d\xi; \\ \ln \frac{u-1-\alpha}{u-1+\alpha} &= 2\alpha\xi + \ln C_2; \end{aligned}$$

возвращаясь к первоначальным переменным и потенцируя, находим:

$$\frac{y - (1 + \alpha)x^2}{y - (1 - \alpha)x^2} = C_2 x^{2\alpha},$$

откуда

$$y = \frac{(1 + \alpha)x^2 - C_2(1 - \alpha)x^{2\alpha+2}}{1 - C_2x^{2\alpha}}.$$

Уравнение  $p = 0$  даёт  $y = Cx^2$  — семейство решений, получаемое при  $C_2 = 0$ .

**Примечание.** В некоторых случаях уравнение высшего порядка удается проинтегрировать до конца, применяя к нему последовательно различные способы понижения порядка уравнения. Но надо помнить, что возможность понижения порядка, а тем более приведения к квадратурам является исключительным случаем для общего уравнения порядка  $n$ . Если для практических надобностей надо проинтегрировать уравнение  $n$ -го порядка, неразрешимое в квадратурах, приходится прибегать к численным или графическим методам; так как при этом задача, вообще говоря, является тем более трудной, чем выше порядок уравнения, то представляющуюся возможность понижения порядка следует использовать перед численным интегрированием и в тех случаях, когда она не даёт возможности довести уравнение до квадратур.

### ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать уравнения:

$$116. nx^3y'' = (y - xy')^2.$$

$$117. y^3(x^2y''' - xy' + y) = x^3.$$

$$118. x^2y^2y'' - 3xy^2y' + 4y^3 + x^6 = 0.$$

### § 4. Уравнения, левая часть которых является точной производной.

Если нам удалось убедиться, что левая часть уравнения (1) есть полная производная по  $x$  от некоторого дифференциального выражения  $(n - 1)$ -го порядка, т. е. что мы имеем тождественно по  $x$ ,  $y$ ,  $y'$ , ...,  $y^{(n)}$  соотношение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$