

Оставляя пока в стороне уравнение $p = 0$, рассмотрим уравнение:

$$\frac{dp}{du} + 2(1-u) = 0;$$

имеем:

$$dp = 2(u-1)du, \quad p = u^2 - 2u + C_1, \quad \frac{du}{u^2 - 2u + C_1} = d\xi.$$

Проведём до конца интеграцию последнего уравнения в случае, если корни двучлена в знаменателе действительны и различные, т. е. если $C_1 = 1 - \alpha^2$, где $\alpha \neq 0$ — новая произвольная постоянная:

$$\begin{aligned} \frac{du}{(u-1)^2 - \alpha^2} &= d\xi, \quad \frac{du}{u-1-\alpha} - \frac{du}{u-1+\alpha} = 2\alpha d\xi; \\ \ln \frac{u-1-\alpha}{u-1+\alpha} &= 2\alpha\xi + \ln C_2; \end{aligned}$$

возвращаясь к первоначальным переменным и потенцируя, находим:

$$\frac{y-(1+\alpha)x^2}{y-(1-\alpha)x^2} = C_2 x^{2\alpha},$$

откуда

$$y = \frac{(1+\alpha)x^2 - C_2(1-\alpha)x^{2\alpha+2}}{1-C_2x^{2\alpha}}.$$

Уравнение $p = 0$ даёт $y = Cx^2$ — семейство решений, получаемое при $C_2 = 0$.

Примечание. В некоторых случаях уравнение высшего порядка удается проинтегрировать до конца, применяя к нему последовательно различные способы понижения порядка уравнения. Но надо помнить, что возможность понижения порядка, а тем более приведения к квадратурам является исключительным случаем для общего уравнения порядка n . Если для практических надобностей надо проинтегрировать уравнение n -го порядка, неразрешимое в квадратурах, приходится прибегать к численным или графическим методам; так как при этом задача, вообще говоря, является тем более трудной, чем выше порядок уравнения, то представляющуюся возможность понижения порядка следует использовать перед численным интегрированием и в тех случаях, когда она не даёт возможности довести уравнение до квадратур.

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать уравнения:

$$116. nx^3y'' = (y - xy')^2.$$

$$117. y^3(x^2y''' - xy' + y) = x^3.$$

$$118. x^2y^2y'' - 3xy^2y' + 4y^3 + x^6 = 0.$$

§ 4. Уравнения, левая часть которых является точной производной.

Если нам удалось убедиться, что левая часть уравнения (1) есть полная производная по x от некоторого дифференциального выражения $(n-1)$ -го порядка, т. е. что мы имеем тождественно по x , y , y' , ..., $y^{(n)}$ соотношение

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

или

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}, \quad (31)$$

то очевидно, что каждое решение уравнения (1) является решением дифференциального уравнения:

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C, \quad (32)$$

и, обратно, каждое решение уравнения (32) является решением уравнения (1). Таким образом, соотношение (32) является первым интегралом уравнения (1); нам удалось понизить порядок уравнения на единицу.

Пример 11. $y'' - xy' - y = 0$. Левая часть есть, очевидно, точная производная по x от дифференциального выражения $y' - xy$; следовательно, имеем первый интеграл $y' - xy = C_1$. В данном случае легко получить в квадратурах общее решение, так как полученное уравнение — линейное первого порядка. Мы находим:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \left(C_1 \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + C_2 \right).$$

В некоторых случаях левая часть уравнения (1) не есть точная производная, но можно так преобразовать данное уравнение, чтобы в новом уравнении левая часть оказалась точной производной. Не останавливаясь на общей теории этого вопроса, покажем, как применяется это замечание на практике. Один случай применения этого метода мы имели при интегриации уравнения (22'), которое, по умножении на производную искомой функции, обращалось в такое уравнение, обе части которого были точными производными. Рассмотрим ещё примеры.

Пример 12. $y''y + 2y^2y'^2 + y'^2 = \frac{2yy'}{x}$. Разделив обе части на yy' , имеем: $\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} = \frac{2}{x}$. Обе части суть точные производные. Первый интеграл имеет вид: $\ln y' + y^2 + \ln y = 2 \ln x + \ln C_1$, откуда $yy'e^{y'} = C_1 x^2$; обе части опять являются точными производными. Отсюда полный интеграл $\frac{1}{2} e^{y'} = \frac{C_1 x^3}{3} + C_2$, или $y = \sqrt{\ln(C_1 x^3 + C_2)}$ (C_1 и C_2 — произвольные постоянные).

Пример 13. Уравнение $yy'' = 2y'^2$ проще всего интегрируется следующим образом: делим обе части на $y'y$; получаем: $\frac{y''}{y'} = \frac{2y'}{y}$ — в обеих частях точные производные. Далее,

$$\ln y' = 2 \ln y + \ln C_1, \quad \frac{dy}{dx} = C_1 y^2, \quad \frac{dy}{y^2} = C_1 dx, \quad y = -\frac{1}{C_1 x + C_2}.$$

ЗАДАЧИ.

119. Найти первый интеграл уравнения

$$y'y'' - x^2yy' - xy^2 = 0.$$

Проинтегрировать до конца уравнения:

120. $x(x^2y' + 2xy)y'' + 4xy'^2 + 8xyy' + 4y^2 - 1 = 0.$

121. $x(xy + 1)y'' + x^2y'^2 + (4xy + 2)y' + y^2 + 1 = 0.$

Проинтегрировать уравнения:

122. $yy'' - y'^2 - y'^4 = 0.$

123. $a^2y'' = 2x(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}.$

124. $x^3yy'' + x^2y'^2 - 5xyy' + 4y^2 = 0.$

125. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$ (см. пример 1 на стр. 153).

126. $5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0$ (дифференциальное уравнение парабол).

127. Найти дифференциальное уравнение кривых, у которых радиус кривизны пропорционален отрезку нормали между её основанием M и пересечением N с осью x (множитель пропорциональности μ ; разобрать случаи $\mu = 1$, $\mu = -1$, $\mu = 2$; постоянное μ есть положительное или отрицательное число, смотря по тому, совпадает ли направление от M к центру кривизны с направлением MN или они противоположны).

128. Проинтегрировать уравнение конических сечений:

$$40y'''^3 - 45y''y''y^{IV} + 9y''^2y^V = 0.$$

Проинтегрировать уравнения:

129. $y''^2 + 2xy'' - y' = 0.$

130. $y''^2 - 2xy'' - y' = 0.$