ГЛАВА V.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. Определения и общие свойства.

1. Дифференциальное уравнение n-го порядка называется *линейным*, если оно первой степени относительно совокупности величин y, $\frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}$ (y — искомая функция, x — независимое переменное). Таким образом, линейное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = F(x), \tag{1}$$

где «коэффициенты» $a_0, a_1, \ldots, a_n$ (так же как F) суть данные непрерывные функции от x (в частности, они могут быть постоянными или нулями). Если уравнение действительно имеет порядок n, то коэффициент a_0 не должен быть тождественно равен нулю. Допустим, что для значений x в интервале

$$a < x < b \tag{2}$$

$a_0(x) \neq 0$ и что все остальные коэффициенты и $F(x)$ непрерывны в этом интервале. Разделив обе части уравнения на $a_0(x)$ и введя обозначения: $p_i = \frac{a_i}{a_0} (i = 1, 2, \ldots, n)$, $f(x) = \frac{F(x)}{a_0}$, мы приведём уравнение (1) к виду:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \tag{1'}$$

где $p_1, \ldots, p_n$ и $f(x)$ — известные непрерывные функции от x. В дальнейшем мы будем преимущественно рассматривать линейное уравнение, приведённое к виду (1′).

Уравнение (1) или (1′) называется *неоднородным линейным уравнением* или *уравнением с правой частью*. Если же «правая часть» (или «свободный член») уравнения, $F(x)$ или $f(x)$, тождественно равна нулю, то уравнение называется *однородным линейным*:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{3}$$

или

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \tag{3'}$$

Если уравнение (3) или (3′) имеет те же коэффициенты, как (1) или (1′), то оно называется однородным уравнением, *соответствующим* неоднородному уравнению (1) или (1′).

2. Отметим следующие общие свойства линейных дифференциальных уравнений:

1) *Уравнение остаётся линейным при замене независимого переменного.* В самом деле, преобразуем независимое переменное подстановкой

$$x = \varphi(\xi), \tag{4}$$

где φ есть произвольная непрерывная дифференцируемая n раз функция, производная которой $\varphi'(\xi)$ не обращается в нуль в рассматриваемом интервале $\alpha < \xi < \beta$, причём этот интервал соответствует изменению x в интервале (2) [это условие достаточно для существования обратной функции $\xi = \psi(x)$, определённой в интервале (2)]. Из равенства (4) имеем: $dx = \varphi'(\xi)\,d\xi$. Вычисляя выражения производных от y по x через производные по новому независимому переменному, находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{dy}{d\xi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{dy}{d\xi}\right) = \frac{1}{\varphi'^2(\xi)}\frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'^3(\xi)}\frac{dy}{d\xi}, \ldots$$

Легко видеть, что вообще $\frac{d^ky}{dx^k}$ выразится линейно (и однородно) через $\frac{dy}{d\xi}, \frac{d^2y}{d\xi^2}, \ldots, \frac{d^ky}{d\xi^k}$, с коэффициентами — непрерывными функциями от ξ; вставляя эти выражения в уравнение (1) и производя в коэффициентах a_i и в свободном члене $F(x)$ замену (4), мы опять получим линейное уравнение:

$$b_0\frac{d^ny}{d\xi^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{d\xi^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}\frac{dy}{d\xi} + b_ny = \Phi(\xi),$$

причём $b_0(\xi) = \frac{a_0[\varphi(\xi)]}{[\varphi'(\xi)]^n} \neq 0$ в интервале $\alpha < \xi < \beta$.

Примечание. Очевидно, подстановка (4) преобразует однородное линейное уравнение снова в однородное.

2) *Уравнение остаётся линейным при линейном преобразовании зависимого переменного.* Вводим новую функцию η, связанную с y уравнением:

$$y = v(x)\eta + \gamma(x), \tag{5}$$

где v, γ допускают непрерывные производные до порядка n включительно и $v(x) \neq 0$ в интервале (2). Мы имеем:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{d\eta}{dx} + v'\eta + \gamma',$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v\frac{d^2\eta}{dx^2} + 2v'\frac{d\eta}{dx} + v''\eta + \gamma''.$$

Очевидно, что вообще производная k-го порядка от y по x выразится линейно (но неоднородно) через k первых производных от η по x; результат подстановки этих выражений в (1) даёт опять линейное уравнение; его коэффициент при старшей производной $a_0 v(x)$, в силу сделанных предположений, не обращается в нуль в интервале (2).

Легко видеть, что подстановка:

$$y = v(x)\eta \tag{5'}$$

преобразует однородное линейное уравнение снова в однородное.

Преобразованием (5′) часто пользуются, чтобы в преобразованном уравнении обратился в 0 коэффициент при $(n-1)$-й производной. В самом деле, из уравнения (5′) получаем:

$$y^{(n)} = v\eta^{(n)} + nv'\eta^{(n-1)} + \ldots, \qquad y^{(n-1)} = v\eta^{(n-1)} + \ldots$$

Вставляя эти выражения в уравнение (3′), находим:

$$v\eta^{(n)} + (nv' + p_1 v)\eta^{(n-1)} + \ldots = 0.$$

Для того чтобы отсутствовал член с $\eta^{(n-1)}$, достаточно выбрать $v(x)$ так, чтобы было $nv' + p_1 v = 0$, т. е. $v = e^{-\frac{1}{n}\int p_1 dx}$.

Примечание. Мы ограничиваемся рассмотрением интервала (2), где коэффициент $a_0(x)$ не обращается в нуль, чтобы иметь возможность применять теорему о существовании и единственности решения; эта теорема доказана в предшествующей главе для уравнения n-го порядка, разрешённого относительно старшей производной. Заметим, что условия Липшица для уравнения (1′) выполнены во всяком замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$, лежащем внутри (a, b). В самом деле, написав уравнение (1′) в виде:

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - \ldots - p_n(x)y + f(x) \equiv$$
$$\equiv F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

мы имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -p_n(x), \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}} = -p_{n-i}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

В замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$ непрерывные функции $p_i(x)$ ограничены $(i = 1, 2, \ldots, n)$, откуда и следует выполнение условий Липшица; в том же интервале $F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна для любых значений $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Следовательно, в силу теоремы Коши, *существует одно и только одно решение $y(x)$ уравнения* (1′) *или* (3′), *которое при данном начальном значении $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$ принимает значение y_0, в то время как значения производных $y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, причём $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любые заданные числа.*

В главе VII мы докажем, что *определённое таким образом решение $y(x)$ линейного уравнения существует во всём интервале* $[a, b]$; для общего уравнения n-го порядка мы могли в предыдущей главе утверждать существование решения только в интервале $[x_0 - h, x_0 + h]$.

§ 2. Общая теория линейного однородного уравнения.

1. Рассмотрим линейное уравнение без правой части:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \qquad (3')$$

Через $L[y]$ мы будем сокращённо обозначать результат применения к функции y совокупности операций [дифференцирование, умножение на функции $p_i(x)$ и сложение], указываемых левой частью уравнения (3′), и будем называть $L[y]$ *линейным дифференциальным выражением* или *линейным дифференциальным оператором*. Линейный оператор обладает следующими двумя важными свойствами:

1) $$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2], \qquad (6)$$

где y_1 и y_2 — любые функции, имеющие n непрерывных производных. В самом деле, раскрывая значения символа оператора, имеем:

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1 (y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(y_1 + y_2)' + \\ + p_n (y_1 + y_2) = (y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n y_1) + \\ + (y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + p_n y_2) = L[y_1] + L[y_2].$$

Оператор от суммы равен сумме операторов слагаемых. Это свойство доказано для суммы двух слагаемых, но оно, очевидно, распространяется на сумму любого числа слагаемых.

2) $$L[Cy] = CL[y], \qquad (7)$$

где y — любая n раз дифференцируемая функция, а C — постоянная, т. е. *постоянный множитель можно вынести за знак линейного оператора.* Доказательство легко проводится подобно тому как в предыдущем случае. На основании свойств линейного оператора, выражаемых тождествами (6) и (7), легко получаются следующие теоремы о решениях однородного линейного уравнения.

ТЕОРЕМА 1. *Если y_1 и y_2 суть два (частных) решения уравнения* (3′), *то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.*

Доказательство. Так как y_1, y_2 суть решения, то имеем тождества: $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$. Но, в силу (6),

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2],$$

что, в силу условия, равно нулю тождественно. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Если y_1 есть решение уравнения* (3′), *то Cy_1 есть также решение этого уравнения* (C — *любая постоянная*).