В главе VII мы докажем, что *определённое таким образом решение $y(x)$ линейного уравнения существует во всём интервале* $[a, b]$; для общего уравнения n-го порядка мы могли в предыдущей главе утверждать существование решения только в интервале $[x_0 - h, x_0 + h]$.

§ 2. Общая теория линейного однородного уравнения.

1. Рассмотрим линейное уравнение без правой части:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0. \qquad (3')$$

Через $L[y]$ мы будем сокращённо обозначать результат применения к функции y совокупности операций [дифференцирование, умножение на функции $p_i(x)$ и сложение], указываемых левой частью уравнения (3′), и будем называть $L[y]$ *линейным дифференциальным выражением* или *линейным дифференциальным оператором*. Линейный оператор обладает следующими двумя важными свойствами:

1) $$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2], \qquad (6)$$

где y_1 и y_2 — любые функции, имеющие n непрерывных производных. В самом деле, раскрывая значения символа оператора, имеем:

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1 (y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(y_1 + y_2)' + \\ + p_n (y_1 + y_2) = (y_1^{(n)} + p_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + p_n y_1) + \\ + (y_2^{(n)} + p_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + p_n y_2) = L[y_1] + L[y_2].$$

Оператор от суммы равен сумме операторов слагаемых. Это свойство доказано для суммы двух слагаемых, но оно, очевидно, распространяется на сумму любого числа слагаемых.

2) $$L[Cy] = CL[y], \qquad (7)$$

где y — любая n раз дифференцируемая функция, а C — постоянная, т. е. *постоянный множитель можно вынести за знак линейного оператора.* Доказательство легко проводится подобно тому как в предыдущем случае. На основании свойств линейного оператора, выражаемых тождествами (6) и (7), легко получаются следующие теоремы о решениях однородного линейного уравнения.

ТЕОРЕМА 1. *Если y_1 и y_2 суть два (частных) решения уравнения* (3′), *то $y_1 + y_2$ есть также решение этого уравнения.*

Доказательство. Так как y_1, y_2 суть решения, то имеем тождества: $L[y_1] = 0$, $L[y_2] = 0$. Но, в силу (6),

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2],$$

что, в силу условия, равно нулю тождественно. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Если y_1 есть решение уравнения* (3′), *то Cy_1 есть также решение этого уравнения* (C — *любая постоянная*).

Доказательство. В силу свойства (7), $L[Cy_1] = CL[y_1]$, а по условию $L[y_1] = 0$, откуда и следует теорема.

Следствие 1. Если имеем частные решения уравнения (3′) $y_1, y_2, \ldots, y_k$, то выражение $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_k y_k$ есть также решение этого уравнения ($C_1, C_2, \ldots, C_k$ — любые постоянные).

Следствие 2. Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть частные решения линейного однородного уравнения n-го порядка, то выражение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{8}$$

есть решение, содержащее n произвольных постоянных; если все эти постоянные существенны, то выражение (8) представляет общее решение [1]).

2. Вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять частные решения, чтобы выражение (8) являлось общим решением однородного уравнения, разрешается в связи с понятием *линейной зависимости функций*. Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, определённые в интервале (a, b), называются *линейно зависимыми* в этом интервале, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что для всех значений x в рассматриваемом интервале выполняется тождественно соотношение:

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n \varphi_n(x) = 0. \tag{9}$$

Если не существует таких постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, чтобы равенство (9) имело место для всех рассматриваемых значений x (причём предполагается, что не все α_i равны нулю), то функции называются *линейно независимыми* (в данном интервале). В последующем мы часто будем иметь дело с интервалом $(-\infty, +\infty)$.

Рассмотрим один частный случай и несколько примеров.

1) Если одна из функций, например φ_n, равна в данном интервале нулю, то все функции линейно зависимы, так как мы имеем тождество:

$$\alpha_n \varphi_n(x) = 0,$$

в котором можно взять $\alpha_n \neq 0$.

2) Функции

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

линейно независимы в интервале $(-\infty, +\infty)$, а также в любом конечном интервале. Допустив противное, мы получили бы равенство

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

для всех рассматриваемых значений x (не все α равны нулю). Между тем написанное равенство есть алгебраическое уравнение

---

[1]) Очевидно, всякое линейное однородное уравнение допускает частное решение $y = 0$. Это решение называется тривиальным; в теории интеграции мы его не будем принимать в расчёт.

степени не выше n; оно может быть справедливым не более как для n значений x.

3) Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — любые действительные не равные между собой числа, $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$. Тогда функции, определённые для $x > 0$,

$$x^{k_1},\ x^{k_2},\ \ldots,\ x^{k_n}$$

линейно независимы. Допустим противное; пусть имеет место тождество

$$\alpha_1 x^{k_1} + \alpha_2 x^{k_2} + \ldots + \alpha_n x^{k_n} = 0$$

для всех значений $x > 0$. Умножая предполагаемое тождество на x^{-k_1}, получаем тождество:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x^{k_2 - k_1} + \ldots + \alpha_n x^{k_n - k_1} = 0;$$

замечая, что все показатели > 0, получим переходом к пределу при $x \to 0$, что необходимо $\alpha_1 = 0$. Поэтому тождество может иметь только такой вид:

$$\alpha_2 x^{k_2} + \alpha_3 x^{k_3} + \ldots + \alpha_n x^{k_n} = 0.$$

Повторяя последовательно то же рассуждение, получим $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$, т. е. противоречие с предположением, что не все α_i равны нулю. Это противоречие доказывает наше утверждение (такое же рассуждение можно было бы применить и к предыдущему примеру).

4) Примером линейно зависимой системы являются функции $\varphi_1 = \sin^2 x$, $\varphi_2 = \cos^2 x$, $\varphi_3 = 1$. Действительно, полагая $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -1$, получаем тождество (для $-\infty < x < \infty$):

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0.$$

3. Пусть мы имеем n функций от x, имеющих непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка:

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n.$$

Определитель

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv W(x) \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots, & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots, & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots, & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (10)$$

называется *определителем Вронского* этих функций. Легко доказывается следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3. *Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, то определитель Вронского тождественно равен нулю.*

Пусть функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, т. е. существует тождественное соотношение:

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0, \tag{11}$$

где не все α_i равны нулю. Без ограничения общности мы можем допустить, что $a_n \neq 0$ (иначе мы изменили бы нумерацию функций). Разрешая соотношение (11) относительно y_n, получаем тождество:

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1} \tag{11'}$$
$$\left(\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\right).$$

Из тождества (11′) дифференцированием по x получаем:

$$\left.\begin{array}{l} y_n' = \beta_1 y_1' + \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(n-1)} = \beta_1 y_1^{(n-1)} + \beta_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}. \end{array}\right\} \tag{11''}$$

Умножаем в выражении (10) первый столбец на $-\beta_1$, второй на $-\beta_2, \ldots, (n-1)$-й на $-\beta_{n-1}$ и прибавляем к последнему; величина определителя W не изменится, но, в силу соотношений (11′) и (11″), последний столбец нового определителя будет состоять из нулей, откуда следует, что $W \equiv 0$, а это и требовалось доказать.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ суть частные решения однородного уравнения (3′), то справедлива обратная, притом более сильная теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Если решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы* [в интервале (2)], *то $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ не обращается в нуль ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Допустим противное: пусть $W(x_0) = 0$, $a < x_0 < b$. Обозначим величины y_i при $x = x_0$ через y_{i0} и значения $y_i^{(k)}(x_0)$ — через $y_{i0}^{(k)}$ и составим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} = 0, \\ C_1 y_{10}' + C_2 y_{20}' + \ldots + C_n y_{n0}' = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = 0. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Рассматривая в уравнениях (12) величины $C_1, C_2, \ldots, C_n$ как неизвестные, мы получим для определителя системы (12) значение $W(x_0) = 0$. Следовательно, однородная система (12) из n уравнений с n неизвестными имеет систему решений $C_1, C_2, \ldots, C_n$, причём не все C_i равны нулю. Составим функцию

$$\tilde{y}(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n; \tag{8'}$$

в силу следствия 1 теорем 1 и 2 она является решением уравнения (3′); в силу условий (12), мы имеем при $x = x_0$:

$$\tilde{y}(x_0) = 0, \ \tilde{y}'(x_0) = 0, \ \ldots, \ \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = 0. \qquad (12')$$

Начальные условия (12′), по теореме существования, определяют единственное решение уравнения (3′). Но таким решением, очевидно, является тривиальное решение $y = 0$, следовательно, $\tilde{y}(x) \equiv 0$ в интервале $a < x < b$), и мы получаем из равенства (8′):

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = 0$$

для всякого x в интервале (2), причём не все C_i равны нулю, т. е. функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы против предположения. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теоремы 3 и 4 можно объединить в следующей формулировке: *определитель Вронского, составленный для системы n решений линейного уравнения n-го порядка* (3′), *или тождественно равен нулю, или не обращается в нуль ни в одной точке того интервала, где коэффициенты уравнения непрерывны.*

Любая система из n линейно независимых частных решений линейного однородного уравнения (3′) называется *фундаментальной системой.*

Следствие теоремы 4. Функции, образующие фундаментальную систему, линейно независимы во всяком частичном интервале (α, β), содержащемся в (a, b). Это следует из необращения в нуль определителя Вронского.

ТЕОРЕМА 5. *Для всякого линейного однородного дифференциального уравнения существует фундаментальная система.*

В самом деле, возьмём любую систему таких n^2 чисел a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, чтобы составленный из них определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

был отличен от нуля. Определим n частных решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения (3′) начальными условиями: при $x = x_0$ имеем $y_i = a_{i1}$, $y_i' = a_{i2}, \ldots, y_i^{(n-1)} = a_{in}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Согласно замечанию в конце § 1, функции определены во всём интервале (2).

Определитель (13) представляет значение определителя Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ при $x = x_0$. Таким образом, $W(x)$ заведомо не равен нулю при $x = x_0$, откуда, в силу теоремы 3, следует, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы, т. е. образуют фундаментальную систему. [Вспомним, что $W(x)$ не равен нулю ни для какого x в интервале (a, b).]

Примечание. Матрицу a_{ik} с определителем (13), отличным от нуля, часто бывает полезно выбрать по следующему закону: $a_{ik}=0$, когда $i \neq k$, $a_{ik}=1$ при $i=k$. Очевидно, определитель (13) равен в этом случае единице. Соответствующую фундаментальную систему $y_1, y_2, \ldots, y_n$ мы будем называть *нормальной* фундаментальной системой; составляющие эту систему функции удовлетворяют следующим начальным условиям: при $x=x_0$

$$\begin{gathered} y_1=1,\ y_1'=0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}=0, \\ y_2=0,\ y_2'=1,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=0,\ y_n'=0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}=1. \end{gathered}$$

ТЕОРЕМА 6. *Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L[y]=0$, то общее решение даётся формулой:*

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n. \tag{8}$$

По определению, решение, содержащее n произвольных постоянных, называется общим, если из него при определённых числовых значениях постоянных получается любое частное решение. А как было указано, в силу теоремы существования и единственности, любое частное решение однозначно определяется начальными условиями: при $x=x_0$

$$y=y_0,\ y'=y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)},=y_0^{(n-1)}, \tag{14}$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любые числа, и $a<x_0<b$. Мы докажем, что решение (8) есть общее, если покажем, что можно в формуле (8) определить постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (14). Для определения постоянных C_i мы получаем систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1y_{10}+C_2y_{20}+\ldots+C_ny_{n0}=y_0, \\ C_1y_{10}'+C_2y_{20}'+\ldots+C_ny_{n0}'=y_0', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1y_{10}^{(n-1)}+C_2y_{20}^{(n-1)}+\ldots+C_ny_{n0}^{(n-1)}=y_0^{(n-1)}. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Здесь y_{i0} обозначает значение функции $y_i(x)$ при $x=x_0$; $y_{i0}^{(k)}$ есть значение производной $y_i^{(k)}(x)$ при $x=x_0$. Определитель системы (15) есть определитель Вронского, в котором вместо x подставлено x_0, т. е. $W(x_0)$; в силу теоремы 4, $W(x_0)\neq 0$; следовательно, система уравнений (15) всегда допускает, и притом единственную, систему решений $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Выражение (8), в котором C имеют полученные таким образом значения, очевидно, удовлетворяет начальным условиям (14). Теорема доказана.

Примечание. Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ представляет нормальную фундаментальную систему, то решение, удовлетворяющее начальным условиям (14), получает особенно простую форму:

$$y = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n(x).$$

В справедливости этого утверждения убеждаемся, подставляя в это выражение и в выражения, полученные из него последовательным дифференцированием, значение $x = x_0$.

Пример 1. Уравнение $y'' - y = 0$ имеет, как легко проверить, два частных решения: $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$. Для выяснения вопроса об их линейной зависимости или независимости составляем определитель Вронского:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Следовательно, e^x и e^{-x} составляют фундаментальную систему, и общее решение напишется так: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Составим теперь нормальную фундаментальную систему $\bar{y}_1(x)$, $\bar{y}_2(x)$, удовлетворяющую начальным условиям: $\bar{y}_1(0) = 1$, $\bar{y}_1'(0) = 0$; $\bar{y}_2(0) = 0$, $\bar{y}_2'(0) = 1$. Очевидно, $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ представляются как линейные комбинации функций e^x и e^{-x}: $\bar{y}_1(x) = ae^x + be^{-x}$, $\bar{y}_2(x) = ce^x + de^{-x}$. Для определения коэффициентов a, b, c, d пользуемся начальными условиями решений $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$: $1 = a + b$, $0 = a - b$, $0 = c + d$, $1 = c - d$; отсюда

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{2},$$

$$\bar{y}_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x, \quad \bar{y}_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$$

При помощи функций $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ сразу напишем решение, удовлетворяющее условиям Коши: при $x = x_0$ $y = y_0$, $y' = y_0'$. Это решение будет:

$$y = y_0 \operatorname{ch} x + y_0' \operatorname{sh} x.$$

4. Мы видели, что формула (8) даёт любое решение линейного однородного уравнения n-го порядка, если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы. Отсюда легко получается доказательство такой теоремы:

ТЕОРЕМА 7. *Если мы имеем $n+1$ частных решений уравнения* (3′)

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n+1},$$

то между ними необходимо существует линейная зависимость.

Для доказательства рассмотрим первые n функций: $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Возможны два случая:

1) Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы; тогда теорема справедлива, так как линейное соотношение между n функциями есть частный случай линейного соотношения между $n+1$ функциями, где постоянный множитель при y_{n+1} равен нулю.

2) Функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы; тогда они образуют фундаментальную систему, через которую выражается линейным образом с постоянными коэффициентами любое частное решение; в частности, для y_{n+1} получим:

$$y_{n+1} = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \ldots + A_n y_n.$$

Это и есть искомая линейная зависимость. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. *Если два линейных однородных уравнения*

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0, \\ y^{(n)} + \bar{p}_1 y^{(n-1)} + \ldots + \bar{p}_n y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

имеют общую фундаментальную систему решений, то они тождественны между собой, т. е. $p_i(x) \equiv \bar{p}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Доказательство. Вычитая почленно уравнения (16), получаем новое уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$(p_1 - \bar{p}_1) y^{(n-1)} + (p_2 - \bar{p}_2) y^{(n-2)} + \ldots + (p_n - \bar{p}_n) y = 0. \quad (17)$$

Если p_1 и $\bar{p}_1$ не тождественно равны между собой, то найдётся, в силу их непрерывности, интервал $\alpha < x < \beta$, в котором $p_1 - \bar{p}_1 \neq 0$. Разделив обе части уравнения (17) на $p_1 - \bar{p}_1$, мы получим в интервале (α, β) уравнение вида (3′), т. е. со старшим коэффициентом, равным 1. Очевидно по самому построению уравнения (17), что оно допускает те же решения, что уравнения (16), т. е. уравнение $(n-1)$-го порядка со старшим коэффициентом, равным 1, допускает (см. следствие теоремы 4) n независимых интегралов. Противоречие с теоремой 7 показывает, что $p_1(x) \equiv \bar{p}_1(x)$; таким образом, уравнение (17) имеет вид:

$$(p_2 - \bar{p}_2) y^{(n-2)} + (p_3 - \bar{p}_3) y^{(n-3)} + \ldots + (p_n - \bar{p}_n) y = 0.$$

Рассуждение, подобное предыдущему, показывает, что $p_2 \equiv \bar{p}_2$, и далее, таким же образом докажем, что

$$p_3 \equiv \bar{p}_3, \ \ldots, \ p_n \equiv \bar{p}_n.$$

Следствие. Фундаментальная система вполне определяет линейное однородное уравнение со старшим коэффициентом, равным 1.

Решим теперь такую задачу:

Дана фундаментальная система (в интервале $a < x < b$): $y_1, y_2, \ldots, y_n$; построить соответствующее дифференциальное уравнение.

Для этой цели приравниваем нулю следующий определитель, в котором y обозначает искомую функцию:

$$W[y_1, y_2, \ldots, y_n, y] \equiv \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' & y' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (18)$$

Разлагая его по элементам последнего столбца, мы убеждаемся в том, что равенство (18) представляет собой однородное дифференциальное уравнение n-го порядка относительно функции y. При подстановке вместо y функций y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ мы получаем определитель с двумя равными столбцами. Он тождественно равен нулю; следовательно, уравнение (18) допускает частные решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Коэффициент при $y^{(n)}$ есть $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$; он, как нам известно, не обращается в нуль в интервале (a, b). Разделив на него обе части уравнения (18), получим уравнение n-го порядка со старшим коэффициентом, равным единице, а по доказанному такое уравнение однозначно определяется фундаментальной системой. Задача, таким образом, решена.

Напишем уравнение (18) в развёрнутом виде:

$$y^{(n)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} -$$

$$- y^{(n-1)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n y \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \ldots y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Если исходное уравнение было написано в виде:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=0, \tag{3'}$$

то сравнение коэффициентов даёт нам тождество:

$$p_1=-\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}.$$

Легко убедиться в том, что определитель в числителе есть производная от определителя Вронского, стоящего в знаменателе; в самом деле, производная по x определителя, составленного из функций от x, равна сумме n определителей, из которых у первого в первой строке функции заменены производными, а остальные не изменены, у второго во второй строке функции заменены производными и т. д., у n-го в последней строке функции заменены производными. Применяя это правило дифференцирования к определителю Вронского, мы получим $n-1$ первых слагаемых в виде определителей, имеющих две равные строки, т. е. обращающиеся в нуль, а последнее слагаемое, не равное нулю, есть как раз числитель в выражении для p_1. Итак, мы имеем:

$$p_1=-\frac{W'(x)}{W(x)},$$

откуда $W(x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x} p_1\,dx}$. Выражаем постоянное C через начальное значение $W(x)$ при $x=x_0$; получаем окончательно:

$$W(x)=W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x} p_1\,dx}. \tag{19}$$

Равенство (19), определяющее определитель Вронского (с точностью до постоянного множителя) через коэффициент данного уравнения при $y^{(n-1)}$, носит название *формулы Остроградского — Лиувилля.*

Применим формулу Остроградского — Лиувилля к нахождению общего решения уравнения второго порядка:

$$y''+p_1y'+p_2y=0,$$

у которого нам известно одно частное решение y_1. Пусть y есть любое решение этого уравнения, отличное от y_1

Составляем $W[y_1, y]$ и пишем его значение по формуле (19):

$$\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1\,dx}.$$

Получаем для y линейное уравнение первого порядка. Раскрывая определитель, имеем:

$$y_1 y' - y_1' y = Ce^{-\int p_1\,dx};$$

деля обе части на y_1^2, находим:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{1}{y_1^2}\,Ce^{-\int p_1\,dx},$$

откуда y определяется квадратурой:

$$y = y_1\left\{\int \frac{Ce^{-\int p_1\,dx}}{y_1^2}\,dx + C'\right\}. \tag{20}$$

Полученное решение содержит два произвольных постоянных и, следовательно, является общим. Итак, *если известно одно частное решение линейного однородного уравнения второго порядка, общее решение находится квадратурами.*

Пример 2. Легко убедиться в том, что уравнение

$$(1 - x^2)\,y'' - 2xy' + 2y = 0$$

допускает частное решение $y_1 = x$. В нашем случае $p_1 = \frac{-2x}{1-x^2}$, и формула (20) даёт:

$$y = x\left\{\int \frac{Ce^{\int \frac{2x\,dx}{1-x^2}}}{x^2}\,dx + C'\right\} = x\left\{C\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} + C'\right\} =$$

$$= x\left\{C\int\left[\frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\,\frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{dx}{1+x}\right] + C'\right\} =$$

$$= x\left\{C\left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right] + C'\right\} = C'x + C\left(\frac{1}{2}\,x\ln\frac{1+x}{1-x} - 1\right).$$

Это — общее решение данного уравнения.

Примечание 1. Всякое линейное дифференциальное уравнение (3′) имеет бесконечное множество фундаментальных систем. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — какая-нибудь фундаментальная система этого

уравнения. Составим новую систему частных решений:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n, \\ Y_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Система $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ будет фундаментальной, если функции Y_i линейно независимы, а для этого необходимо и достаточно, чтобы определитель подстановки (21)

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. В самом деле, если система $\{Y_i\}$ есть фундаментальная, то через неё, в частности, выражаются решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е. система уравнений (21) должна быть разрешима относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, т. е. должно быть $D \neq 0$. Обратно, если $D \neq 0$, то y_i выражаются линейно через Y_i; так как любое решение выражается через $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то оно выразится и через $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, т. е. эти последние решения образуют фундаментальную систему.

Составляя определитель Вронского $W[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n]$, мы легко убеждаемся в том, что он представляет собой произведение (по правилу «строки на строки») определителей D и $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, т. е.

$$W[Y_1, Y_2, \ldots, Y_n] = DW[y_1, y_2, \ldots, y_n].$$

Следовательно, при переходе от одной фундаментальной системы данного уравнения к другой определитель Вронского изменяется только на постоянный множитель — определитель линейной подстановки.

Примечание 2. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — любая система n раз дифференцируемых линейно независимых функций. Если определитель Вронского не обращается в нуль в интервале $a < x < b$, то выражение (18) даёт дифференциальное уравнение, имеющее данную систему в качестве фундаментальной. Заметим, что так как функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ произвольны, то условие необращения в нуль определителя Вронского ни в одной точке рассматриваемого интервала надо ввести как новое требование.

Примечание 3. Если составлять дифференциальное уравнение, допускающее в качестве фундаментальной системы наперёд заданную систему из n линейно независимых функций, то точки, в которых

определитель Вронского этой системы обращается в нуль, будут особыми точками построенного уравнения; в них будет обращаться в нуль коэффициент при $y^{(n)}$.

Пример 3. Построить уравнение, имеющее в качестве фундаментальной системы функции x, x^2, x^3. Строим уравнение по формуле (18):

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & y \\ 1 & 2x & 3x^2 & y' \\ 0 & 2 & 6x & y'' \\ 0 & 0 & 6 & y''' \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по элементам последнего столбца, получаем:

$$2x^3y''' - 6x^2y'' + 12xy' - 12y = 0.$$

Здесь $W(x) = 2x^3$ и не обращается в нуль в интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Для этих интервалов имеем дифференциальное уравнение:

$$y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0.$$

ЗАДАЧИ.

Построить уравнения, имеющие фундаментальные системы:

131. $\cos x$, $\sin x$.

132. $\cos^2 x$, $\sin^2 x$.

В каких интервалах коэффициенты последнего уравнения являются непрерывными (если старший коэффициент $= 1$)? Показать, что другой фундаментальной системой того же уравнения является 1, $\cos 2x$.

133. Вычислить (с точностью до произвольного множителя) определитель Вронского для уравнения Лежандра:

$$(1 - x^2)\,y'' - 2xy' + n\,(n+1)\,y = 0.$$

134. Проинтегрировать уравнение $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, зная его частное решение $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

135. То же для уравнения $y''\sin^2 x = 2y$; частное решение $y = \operatorname{ctg} x$.

5. Понижение порядка линейного однородного уравнения. Линейное однородное уравнение

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0 \qquad (3')$$

относится к классу уравнений, однородных относительно y, y', y'', ...; поэтому подстановка $y = e^{\int z\,dx}$ приводит его к уравнению порядка $n-1$ (глава IV, § 3, **3**). Однако эта подстановка в большинстве случаев нецелесообразна, так как преобразованное уравнение (относительно z) уже не является линейным и, следовательно, теряет те простые свойства, которые характеризуют линейные уравнения. Мы

рассмотрим здесь метод понижения порядка, если известны частные решения; при этом окажется, что *каждое известное частное решение позволяет понизить порядок уравнения на единицу*, причём преобразованное уравнение остаётся линейным. Таким образом, каждое известное частное решение является шагом вперёд в нахождении общего решения.

Пусть $y=y_1$ есть частное решение уравнения (3′). Вводим новую искомую функцию z соотношением:

$$y=y_1z. \tag{22}$$

Соотношение (22) разрешимо относительно z в тех интервалах, где y_1 не обращается в нуль; только такие интервалы мы будем рассматривать. Вычисляем из соотношения (22) производные от y. Мы имеем:

$$\begin{aligned}
y' &= y_1z' + y_1'z,\\
y'' &= y_1z'' + 2y_1'z' + y_1''z,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
y^{(n)} &= y_1z^{(n)} + \binom{n}{1}y_1'z^{(n-1)} + \binom{n}{2}y_1''z^{(n-2)} + \dots + y_1^{(n)}z.
\end{aligned}$$

Подстановка в уравнение (3′) даёт:

$$\begin{aligned}
&y_1z^{(n)} + \left[\binom{n}{1}y_1' + p_1y_1\right]z^{(n-1)} + \dots\\
&\quad\dots + [y_1^{(n)} + p_1y_1^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y_1' + p_ny_1]\,z = 0.
\end{aligned}$$

Для z мы получили опять уравнение порядка n; но коэффициент при z есть $L[y_1]$, он тождественно равен нулю, так как y_1 есть решение уравнения (3′). Следовательно, в полученном уравнении порядок понижается, если ввести новую искомую функцию $u=z'$. Разделив, кроме того, все члены последнего уравнения на y_1, мы приведём его к виду:

$$u^{(n-1)} + q_1u^{(n-2)} + \dots + q_{n-1}u = 0 \tag{23}$$

— линейному уравнению порядка $n-1$. Выражение функции u через y, очевидно, следующее:

$$u = z' = \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right).$$

Пусть для последнего уравнения получена фундаментальная система:

$$u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_{n-1}.$$

Тогда система n решений для z будет:

$$1\ ^{1)},\quad \int u_1\,dx,\quad \int u_2\,dx,\ \ldots,\quad \int u_{n-1}\,dx,$$

а соответствующая система для y будет:

$$y_1,\ y_2 = y_1\int u_1\,dx,\quad y_3 = y_1\int u_2\,dx,\ \ldots,\ y_n = y_1\int u_{n-1}\,dx.$$

Покажем, что последние решения образуют фундаментальную систему уравнения (3′). Допустим, что между ними существует линейная зависимость:

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = 0;$$

деля на y_1 (который, по условию, в рассматриваемых интервалах отличен от нуля), получим:

$$C_1 + C_2\int u_1\,dx + C_3\int u_2\,dx + \ldots + C_n\int u_{n-1}\,dx = 0.$$

Дифференцируя последнее тождество по x, получаем:

$$C_2u_1 + C_3u_2 + \ldots + C_nu_{n-1} = 0,$$

что противоречит условию линейной независимости системы u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$. Следовательно, $C_2 = C_3 = \ldots = C_n = 0$; так как $y_1 \neq 0$, то, очевидно, также имеем $C_1 = 0$, и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему.

Итак, *если известно частное решение уравнения* (3′), *то задача интегрирования этого уравнения приводится к интегрированию линейного однородного уравнения порядка* $n-1$.

Пусть теперь известно два линейно независимых частных решения уравнения (3′), y_1 и y_2. Вводя, как выше, новую искомую функцию $u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'$, мы получаем для u уравнение (23) порядка $n-1$. Но теперь это уравнение имеет один известный интеграл $u_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$, и поэтому оно, в свою очередь, допускает понижение порядка на единицу [2]).

Итак, *если известны два частных линейно независимых решения, то порядок уравнения может быть понижен на две единицы.*

---

[1]) Легко видеть, что если в линейном однородном уравнении коэффициент при искомой функции равен нулю, то постоянная является частным решением такого уравнения, и обратно, если уравнение допускает в качестве решения постоянную, то коэффициент при искомой функции равен нулю.

[2]) Решение $\left(\frac{y_1}{y_1}\right)'$ есть тривиальное; с другой стороны, u_1 не есть тривиальное решение, если y_1 и y_2 линейно независимы; в самом деле, если $u_1 \equiv 0$, то $\frac{y_2}{y_1} = C$ (постоянной), откуда $Cy_1 - y_2 = 0$, против условия.

Пусть вообще известно r линейно независимых частных решений уравнения (3′) ($r < n$):

$$y_1, y_2, \ldots, y_r.$$

Подстановка $u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'$ опять приводит к уравнению (23), причём нам известно $r-1$ его частных решений:

$$u_1 = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \quad u_2 = \left(\frac{y_3}{y_1}\right)', \ldots, \quad u_{r-1} = \left(\frac{y_r}{y_1}\right)'.$$

Эти решения линейно независимы; в самом деле, если мы допустим существование соотношения:

$$\alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_2 + \ldots + \alpha_r u_{r-1} = 0,$$

то, интегрируя его по x, получим:

$$\alpha_2 \frac{y_2}{y_1} + \alpha_3 \frac{y_3}{y_1} + \ldots + \alpha_r \frac{y_r}{y_1} = -\alpha_1$$

($-\alpha_1$ есть постоянная интеграции), или

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_r y_r = 0,$$

что противоречит предположению о линейной независимости функций $y_1, y_2, \ldots, y_r$.

Уравнение (23) имеет, таким образом, $r-1$ известных линейно независимых решений; вводя подстановку $v = \left(\frac{u}{u_1}\right)'$ (v — новая искомая функция), мы получим для v линейное уравнение порядка $n-2$, имеющее $r-2$ линейно независимых частных решений $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)', \left(\frac{u_3}{u_1}\right)', \ldots, \left(\frac{u_{r-1}}{u_1}\right)'$. Мы можем применить к нему то же рассуждение, и в результате подобных преобразований придём, наконец, к уравнению порядка $n-r$. Следовательно, *если известно r частных линейно независимых решений линейного однородного уравнения, то порядок уравнения может быть понижен на r единиц.*

Примечание. Если известно $n-1$ частных решений, то в результате понижения мы придём к уравнению первого порядка, которое интегрируется в квадратурах; в этом случае общее решение может быть получено в квадратурах.

ЗАДАЧИ.

136. Найти общее решение уравнения $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$, зная частные решения $y_1 = x$, $y_2 = x^2$.

137. Найти общее решение уравнения $xy''' - y'' + xy' - y = 0$, зная его частное решение $y_1 = x$ (см. задачу 131).

138. То же для уравнения $(1-x^2)\,y''' - xy'' + y' = 0$, частное решение $y = x^2$.