§ 3. Неоднородные линейные уравнения.

1. Общие свойства. Рассмотрим неоднородное линейное дифференциальное уравнение вида:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = f(x), \tag{1'}$$

где $f \not\equiv 0$.

Однородное линейное уравнение с теми же коэффициентами, но с правой частью, равной нулю,

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0, \tag{3'}$$

называется, как указано выше, однородным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению (1'). Очевидно, уравнения (1') и (3') не имеют общих решений.

ТЕОРЕМА. *Если известно какое-нибудь частное решение Y неоднородного уравнения* (1'), *то общее его решение есть сумма этого частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.*

Так как Y есть решение уравнения (1'), то имеем тождество:

$$L[Y] = f(x); \tag{24}$$

введём новую искомую функцию z, полагая

$$y = Y + z. \tag{25}$$

Подставляя выражение (25) в уравнение (1'), имеем, в силу свойства (6) линейного оператора $L[y]$,

$$L[Y] + L[z] = f(x);$$

принимая во внимание тождество (24), получаем отсюда:

$$L[z] = 0$$

— однородное уравнение, соответствующее (1').

Пусть фундаментальная система соответствующего уравнению (1') однородного уравнения (3') будет:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Тогда общее решение уравнения (3') имеет вид (§ 2):

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

Подставляя это выражение вместо z в формулу (25), получаем общее решение неоднородного уравнения (1'):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + Y. \tag{26}$$

Это уравнение содержит n произвольных постоянных; чтобы доказать, что эти постоянные существенные, покажем, что из выражения (26) при надлежащем выборе значений постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$

получится решение, удовлетворяющее любым начальным данным Коши, т. е. при $x = x_0$, где x_0 — любое значение из интервала (2), мы будем иметь:

$$y = y_0,\ y' = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любая данная система n чисел. Последовательным дифференцированием выражения (26) находим:

$$\left.\begin{aligned} y' &= C_1 y'_1 + C_2 y'_2 + \ldots + C_n y'_n + Y', \\ y'' &= C_1 y''_1 + C_2 y''_2 + \ldots + C_n y''_n + Y'', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)} &= C_1 y_1^{(n-1)} + C_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n y_n^{(n-1)} + Y^{(n-1)}. \end{aligned}\right\} \quad (26')$$

В выражениях (26) и (26′) надо в левых частях вместо $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ подставить соответственно $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, а в правых частях во всех функциях дать переменному x значение x_0; получится система n линейных уравнений с n неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Определитель этой системы есть значение определителя Вронского $W(x)$ при $x = x_0$; при этом $W(x_0) \neq 0$, так как система $y_1, y_2, \ldots, y_n$, по предположению, фундаментальная. Таким образом, для $C_1, C_2, \ldots, C_n$ получим вполне определённые значения, и решение (26), действительно, является общим. Теорема доказана.

Пример 4. Рассмотрим уравнение $y'' + y = 3x$. Легко видеть, что частным решением будет $y = 3x$. Соответствующее однородное уравнение $y'' + y = 0$ имеет два линейно независимых частных решения: $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. В силу изложенного общее решение будет: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 3x$. Решим теперь для данного уравнения задачу Коши: найти решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 1$, $y' = -1$ при $x = 0$. Имеем: $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 3$. Подставляя начальные значения, находим: $C_1 = 1$, $C_2 + 3 = -1$, откуда $C_2 = -4$; искомое решение есть $y = \cos x - 4 \sin x + 3x$.

Пусть, далее, известно одно частное решение y'_1 однородного уравнения (3′), соответствующего уравнению (1′). Подобно тому, как в случае однородного уравнения, применяем подстановку $y = y_1 z$ и получаем уравнение, не содержащее явно искомой функции z; после этого, полагая $z' = u$, получим линейное уравнение (неоднородное) порядка $n - 1$. Итак, *если известно одно частное решение соответствующего однородного уравнения, преобразование переменного* $u = \left(\frac{y}{y_1}\right)'$ *понижает порядок неоднородного уравнения на единицу*. Аналогично § 2, 5, легко получается также следующий результат: *если известны r частных линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения, то порядок неоднородного уравнения может быть понижен на r единиц.*

Предположим теперь, что известны m частных решений неоднородного уравнения (1′) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$. Введём новую искомую функцию z, связанную с y уравнением:

$$y = Y_1 + z, \text{ или } z = y - Y_1.$$

Как показано выше, z удовлетворяет однородному уравнению, которое соответствует неоднородному уравнению (1′). Подставляя вместо y функции $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, мы, кроме тривиального решения $z = 0$, получим $m - 1$ решений однородного уравнения:

$$z_1 = Y_2 - Y_1, \quad z_2 = Y_3 - Y_1, \ldots, \quad z_{m-1} = Y_m - Y_1.$$

Таким образом, нам известны $m - 1$ решений однородного уравнения (3′), и если они линейно независимы, то его порядок может быть понижен на $m - 1$ единиц. Итак, *если известны m частных решений неоднородного линейного уравнения*, то при указанном условии *его интегрирование приводится к интегрированию линейного однородного уравнения порядка $n - m + 1$.*

Пример 5. Уравнение $(2x - x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$ имеет, как легко проверить, два частных решения: $Y_1 = 1$, $Y_2 = x$; следовательно, соответствующее однородное уравнение имеет решение $y_1 = x - 1$. Комбинируя обе подстановки (25) и (22), вводим новую искомую функцию z при помощи уравнения:

$$y = 1 + (x-1)z,$$

откуда

$$y' = (x-1)z' + z, \quad y'' = (x-1)z'' + 2z'.$$

Подставляя полученные выражения в данное уравнение, находим:

$$(2x - x^2)(x-1)z'' + 2[(2x - x^2) + (x-1)^2]z' = 0,$$

откуда

$$\frac{z''}{z'} = -\frac{2}{x-1} + \frac{2-2x}{2x-x^2}, \quad z' = C_1\frac{2x-x^2}{(x-1)^2} = -C_1 + \frac{C_1}{(x-1)^2};$$

$$z = -C_1 x - \frac{C_1}{x-1} + C_2;$$

подставляя в выражение для y, получаем: $y = -C_1x^2 + C_2(x-1) + 1$ — общее решение.

ЗАДАЧА.

139. Решить уравнение $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3$, зная частное решение $y = x$ соответствующего однородного уравнения.

2. Метод вариации постоянных. Из изложенного в предыдущем разделе следует, что для решения неоднородного уравнения достаточно знать фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения и одно частное решение неоднородного

уравнения; в рассматриваемых примерах это частное решение являлось заданным.

Теперь мы докажем следующую теорему:

Если известна фундаментальная система соответствующего однородного уравнения, то общее решение неоднородного уравнения может быть найдено при помощи квадратур.

Мы дадим способ решения неоднородного уравнения, принадлежащий Лагранжу и называемый *методом вариации постоянных*.

Пусть дано неоднородное линейное уравнение:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x), \qquad (1')$$

где $f(x)$ не равно тождественно нулю, и пусть нам известна фундаментальная система $y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответствующего однородного уравнения:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y'+p_ny=0. \qquad (3')$$

Общее решение уравнения (3′) будет:

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n, \qquad (8)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Выражение (8) удовлетворяет уравнению (3′) и, следовательно, не может удовлетворять уравнению (1′), пока C_i остаются постоянными. Поставим себе цель — получить решение уравнений (1′) в той же форме (8), где, однако, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ будут функциями независимого переменного x. Мы получаем n новых неизвестных функций; для их определения нужно иметь n уравнений, — одно из них получится из условия, что выражение (8) (с переменными C_i) удовлетворяет уравнению (1′), остальные $n-1$ уравнений мы можем задать произвольно; мы их будем задавать таким образом, чтобы выражения для производных от y имели наиболее простой вид.

Дифференцируем равенство (8) по x:

$$y'=C_1y_1'+C_2y_2'+\ldots+C_ny_n'+y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n\frac{dC_n}{dx}.$$

Мы записали члены, полученные от дифференцирования, в две строки; в качестве первого из числа $n-1$ дополнительных уравнений возьмём уравнение, которое получится, если вторую строку приравнять нулю:

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n\frac{dC_n}{dx}=0. \qquad (27_1)$$

В таком случае для y' получим выражение:

$$y'=C_1y_1'+C_2y_2'+\ldots+C_ny_n', \qquad (28_1)$$

которое имеет такой же вид, как и в случае постоянных C_i.

Для нахождения y'' дифференцируем равенство (28_1) по x; в полученном результате опять приравниваем нулю члены, содержащие производные функций C_i (это будет второе добавочное уравнение):

$$y_1'\frac{dC_1}{dx}+y_2'\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n'\frac{dC_n}{dx}=0, \qquad (27_2)$$

и для y'' получится выражение:

$$y''=C_1y_1''+C_2y_2''+\ldots+C_ny_n''. \qquad (28_2)$$

Продолжая таким образом, мы в последний раз введём добавочное условие на $(n-1)$-м шаге:

$$y_1^{(n-2)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n-2)}\frac{dC_n}{dx}=0, \qquad (27_{n-1})$$

и выражение для $y^{(n-1)}$ будет иметь вид:

$$y^{(n-1)}=C_1y_1^{(n-1)}+C_2y_2^{(n-1)}+\ldots+C_ny_n^{(n-1)}. \qquad (28_{n-1})$$

Вычисляем, наконец, $y^{(n)}$:

$$y^{(n)}=C_1y_1^{(n)}+C_2y_2^{(n)}+\ldots+C_ny_n^{(n)}+$$
$$+y_1^{(n-1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-1)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n-1)}\frac{dC_n}{dx}. \qquad (28_n)$$

Подставляя выражения (8), (28_1), ..., (28_{n-1}), (28_n) в уравнение $(1')$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}C_i(y_i^{(n)}+p_1y_i^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}y_i'+p_ny_i)+$$
$$+y_1^{(n-1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-1)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n-1)}\frac{dC_n}{dx}=f(x).$$

Замечаем, что множители при C_i под знаком суммы все равны нулю, так как они являются результатами подстановки в левую часть уравнения $(3')$ его решений, и мы получаем последнее уравнение для определения C_i:

$$y_1^{(n-1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(n-1)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n-1)}\frac{dC_n}{dx}=f(x). \qquad (27_n)$$

Мы получили систему n неоднородных линейных уравнений (27_1), (27_2), ..., (27_{n-1}), (27_n) с n неизвестными $\frac{dC_i}{dx}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Определитель этой линейной системы есть определитель Вронского для фундаментальной системы; он не обращается в нуль; следовательно, разрешая её, мы получим $\frac{dC_i}{dx}$ как известные непрерывные функции от x:

$$\frac{dC_i}{dx}=\varphi_i(x),$$

откуда квадратурами находим:

$$C_i = \int \varphi_i(x)\,dx + \gamma_i$$

(γ_i — новые произвольные постоянные).

Подставляя найденные значения C в выражение (8), мы найдём общее решение уравнения (1′):

$$y = \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \ldots + \gamma_n y_n + \sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x)\,dx.$$

Действительно, по самому его образованию это есть решение рассматриваемого уравнения; сумма членов, содержащих множители γ_i, представляет, как мы знаем, общее решение однородного уравнения (3′), а выражение

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x)\,dx$$

есть частное решение неоднородного уравнения (1′). Таким образом, действительно, при знании фундаментальной системы однородного уравнения мы получаем с помощью квадратур решение неоднородного уравнения.

Пример 6. Рассмотрим уравнение $xy'' - y' = x^2$. Соответствующее однородное уравнение $xy'' - y' = 0$ легко интегрируется: $\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$, $y' = Ax$, $y = \frac{A}{2}x^2 + B$; его фундаментальная система есть 1, x^2. Полагаем теперь в неоднородном уравнении $y = C_1 + C_2 x^2$; для определения C_1, C_2 имеем два уравнения:

$$1 \cdot \frac{dC_1}{dx} + x^2 \frac{dC_2}{dx} = 0, \qquad 0 \cdot \frac{dC_1}{dx} + 2x \frac{dC_2}{dx} = x.$$

[Формула (27_n) выведена в предположении, что коэффициент при старшей производной равен 1.] Последовательно получаем:

$$\frac{dC_2}{dx} = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{x}{2} + \gamma_2, \quad \frac{dC_1}{dx} = -\frac{x^2}{2}, \quad C_1 = -\frac{x^3}{6} + \gamma_1.$$

Подставляя в выражение для y, находим общее решение:

$$y = \gamma_1 + \gamma_2 x^2 + \frac{x^3}{3}$$

(γ_1, γ_2 — произвольные постоянные).

ЗАДАЧИ.

140. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{x}{1-x}y' - \frac{1}{1-x}y = x - 1$, зная, что одно частное решение однородного уравнения есть $y = e^x$.

141. $(x^2+2)\,y''' - 2xy'' + (x^2+2)\,y' - 2xy = x^4 + 12.$

Указание. Уравнения $y''' + y' = 0$ и $y'' + y = 0$ имеют два общих решения.

142. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{x^2 \ln x}\,y = e^x\left(\dfrac{2}{x} + \ln x\right)$; частное решение однородного уравнения есть $y_1 = \ln x$.

§ 4. Сопряжённое уравнение.

1. Множитель линейного выражения. Поставим себе такую задачу: *дано линейное дифференциальное выражение*:

$$L[y] \equiv a_n y + a_{n-1} y' + a_{n-2} y'' + \ldots + a_1 y^{(n-1)} + a_0 y^{(n)}; \quad (29)$$

найти такую функцию $z(x)$, *чтобы по умножении на неё выражение* (29) *стало точной производной* по x при любой (n раз дифференцируемой) функции y. Эта функция $z(x)$ называется *множителем* дифференциального выражения $L[y]$. При этом мы предположим, что a_i суть функции от x, непрерывные в рассматриваемом интервале и имеющие непрерывные производные всех тех порядков, которые войдут в наши формулы. Умножаем выражение (29) на искомую функцию z и вычисляем неопределённый интеграл

$$\int zL[y]\,dx,$$

причём каждый член интегрируем по частям, понижая порядок производной от y до тех пор, пока под интегралом не останется множитель y. Таким образом, будем иметь:

$$\int a_n yz\,dx = \int a_n yz\,dx,$$

$$\int a_{n-1} y' z\,dx = a_{n-1}\,zy - \int y\,(a_{n-1}z)'\,dx,$$

$$\int a_{n-2} y'' z\,dx = a_{n-2} zy' - \int (a_{n-2}z)'\,y'\,dx =$$

$$= a_{n-2}\,zy' - (a_{n-2}z)'\,y + \int y\,(a_{n-2}z)''\,dx.$$

. . . . . .

$$\int a_1 y^{(n-1)} z\,dx = a_1\,zy^{(n-2)} - (a_1 z)'\,y^{(n-3)} + (a_1 z)''\,y^{(n-4)} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2}\,(a_1 z)^{(n-2)} y + (-1)^{n-1} \int y\,(a_1 z)^{(n-1)}\,dx,$$

$$\int a_0 y^{(n)} z\,dx = a_0 zy^{(n-1)} - (a_0 z)'\,y^{(n-2)} + (a_0 z)''\,y^{(n-3)} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\,(a_0 z)^{(n-1)}\,y + (-1)^n \int y\,(a_0 z)^{(n)}\,dx.$$