141. $(x^2+2)\,y''' - 2xy'' + (x^2+2)\,y' - 2xy = x^4 + 12.$

Указание. Уравнения $y''' + y' = 0$ и $y'' + y = 0$ имеют два общих решения.

142. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{1}{x^2 \ln x}\,y = e^x\left(\dfrac{2}{x} + \ln x\right)$; частное решение однородного уравнения есть $y_1 = \ln x$.

§ 4. Сопряжённое уравнение.

1. Множитель линейного выражения. Поставим себе такую задачу: *дано линейное дифференциальное выражение*:

$$L[y] \equiv a_n y + a_{n-1} y' + a_{n-2} y'' + \ldots + a_1 y^{(n-1)} + a_0 y^{(n)}; \quad (29)$$

найти такую функцию $z(x)$, *чтобы по умножении на неё выражение* (29) *стало точной производной* по x при любой (n раз дифференцируемой) функции y. Эта функция $z(x)$ называется *множителем* дифференциального выражения $L[y]$. При этом мы предположим, что a_i суть функции от x, непрерывные в рассматриваемом интервале и имеющие непрерывные производные всех тех порядков, которые войдут в наши формулы. Умножаем выражение (29) на искомую функцию z и вычисляем неопределённый интеграл

$$\int zL[y]\,dx,$$

причём каждый член интегрируем по частям, понижая порядок производной от y до тех пор, пока под интегралом не останется множитель y. Таким образом, будем иметь:

$$\int a_n yz\,dx = \int a_n yz\,dx,$$

$$\int a_{n-1} y' z\,dx = a_{n-1}\,zy - \int y\,(a_{n-1}z)'\,dx,$$

$$\int a_{n-2} y'' z\,dx = a_{n-2} zy' - \int (a_{n-2}z)'\,y'\,dx =$$

$$= a_{n-2}\,zy' - (a_{n-2}z)'\,y + \int y\,(a_{n-2}z)''\,dx.$$

. . . . . .

$$\int a_1 y^{(n-1)} z\,dx = a_1\,zy^{(n-2)} - (a_1 z)'\,y^{(n-3)} + (a_1 z)''\,y^{(n-4)} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-2}\,(a_1 z)^{(n-2)} y + (-1)^{n-1} \int y\,(a_1 z)^{(n-1)}\,dx,$$

$$\int a_0 y^{(n)} z\,dx = a_0 zy^{(n-1)} - (a_0 z)'\,y^{(n-2)} + (a_0 z)''\,y^{(n-3)} - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\,(a_0 z)^{(n-1)}\,y + (-1)^n \int y\,(a_0 z)^{(n)}\,dx.$$

Собирая отдельно члены, не содержащие интегралов, и под общим знаком интеграла члены, содержащие квадратуру, получаем:

$$\int zL[y]\,dx = a_{n-1}zy - (a_{n-2}z)'y + \ldots + (-1)^{n-1}(a_0z)^{(n-1)}y +$$
$$+ a_{n-2}zy' - (a_{n-3}z)'y' + \ldots + (-1)^{n-2}(a_0z)^{(n-2)}y' +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_1zy^{(n-2)} - (a_0z)'y^{(n-2)} + a_0zy^{(n-1)} +$$
$$+ \int y\{a_nz - (a_{n-1}z)' + (a_{n-2}z)'' - \ldots + (-1)^n(a_0z)^{(n)}\}\,dx,$$

или, перенося интеграл в левую часть и вводя новые обозначения,

$$\int \{zL[y] - yM[z]\}\,dx = \Psi[y, z]; \tag{30}$$

дифференциальное выражение

$$M[z] = a_nz - (a_{n-1}z)' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_1z)^{(n-1)} + \\ + (-1)^n(a_0z)^{(n)} \tag{31}$$

называется *сопряжённым с* $L[y]$ *дифференциальным выражением* (или оператором), а $\Psi[y, z]$ есть билинейная форма относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, с одной стороны, и $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$, с другой стороны, а именно:

$$\Psi[y, z] = y\{a_{n-1}z - (a_{n-2}z)' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_0z)^{(n-1)}\} +$$
$$+ y'\{a_{n-2}z - (a_{n-3}z)' + \ldots + (-1)^{n-2}(a_0z)^{n-2}\} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ y^{(n-2)}\{a_1z - (a_0z)'\} + y^{(n-1)}\cdot a_0z. \tag{31'}$$

Дифференциальное уравнение n-го порядка

$$M[z] = 0. \tag{32'}$$

называется *уравнением, сопряжённым с уравнением*

$$L[y] = 0. \tag{32}$$

Соотношение (30) есть тождество не только по x, — оно справедливо при любых функциях y и z. Если мы теперь возьмём в качестве z решение уравнения (32′), $z = \bar{z}$, то формула (30) примет вид:

$$\int \bar{z}L[y]\,dx = \Psi[y, \bar{z}],$$

или, дифференцируя,

$$\bar{z}L[y] = \frac{d}{dx}\Psi[y, \bar{z}].$$

Таким образом, поставленная в начале настоящего параграфа задача решена: если умножить данное дифференциальное выражение (29) на любое решение $\bar{z}$ сопряжённого уравнения (32′), то оно становится полной производной от дифференциального выражения $(n-1)$-го порядка $\Psi[y, \bar{z}]$. Обратно, для того чтобы функция $\bar{z}$ по умножении на $L[y]$ делала его точной производной при любой функции y, необходимо, чтобы $M[\bar{z}] \equiv 0$.

В самом деле, если $\bar{z}$ есть какой-нибудь множитель выражения (29), то имеет место равенство:

$$\bar{z}L[y] = \frac{d}{dx}\Psi_1[y], \tag{30′}$$

где, как легко видеть, Ψ_1 есть линейное выражение относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$:

$$\Psi_1[y] = b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + b_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \ldots + b_1(x)y' + b_0(x)y.$$

С другой стороны, подставляя $\bar{z}$ вместо z в тождество (30) и дифференцируя по x, находим:

$$\bar{z}L[y] = \frac{d}{dx}\Psi[y, \bar{z}] + yM[\bar{z}]. \tag{30″}$$

Из (30′) и (30″) получаем:

$$\frac{d}{dx}\{\Psi_1[y] - \Psi[y, \bar{z}]\} - yM[\bar{z}] = 0. \tag{30‴}$$

В левой части (30‴) стоит линейное выражение n-го порядка относительно y; так как равенство нулю выполняется тождественно для любой функции y, то коэффициенты при y и всех его производных тождественно равны нулю, иначе (30″) было бы дифференциальным уравнением для y. Из вида (31′) билинейного выражения для Ψ следует:

$$b_{n-1} = a_0\bar{z}, \quad b_{n-2} = a_1\bar{z} - (a_0\bar{z})', \ldots,$$

$$b_0 = a_{n-1}\bar{z} - (a_{n-2}\bar{z})' + \ldots + (-1)^{n-1}(a_0\bar{z})^{(n-1)},$$

т. е. $\Psi_1[y] \equiv \Psi[y, \bar{z}]$, и равенство (30‴) даёт: $M[\bar{z}] \equiv 0$.

Следовательно, мы можем сделать такой вывод:

Для того чтобы функция z при всякой функции $y(x)$ обращала произведение $\bar{z}L[y]$ в точную производную, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{z}$ являлось решением сопряжённого уравнения (32′).

Каждое решение сопряжённого уравнения (32′) является множителем уравнения (32′); по умножении на него левая часть уравнения (32)

становится точной производной[1]). Таким образом, уравнение (32) допускает первый интеграл:

$$\Psi[y, \bar{z}] = C, \tag{33}$$

который сам является (неоднородным) уравнением порядка $n-1$. Очевидно, если нам дано неоднородное уравнение $L[y] = f(x)$, то та же функция $\bar{z}$ является его множителем, и мы получим первый интеграл:

$$\Psi[y, \bar{z}] = \int f(x)\bar{z}\,dx + C.$$

Если имеем линейное уравнение первого порядка в форме $y' + Py = Q$, то уравнение, сопряжённое соответствующему однородному, будет: $Pz - z' = 0$; его решение $\bar{z} = e^{\int P\,dx}$ будет множителем данного уравнения, в согласии со сказанным в главе II, § 3, 3.

Примечание 1. Чтобы левая часть данного дифференциального уравнения сама была точной производной, необходимо и достаточно, чтобы сопряжённое уравнение допускало решение $\bar{z} = 1$, т. е. чтобы коэффициент при z в уравнении (32′) был равен нулю. Раскрывая выражение (31) и подсчитывая в нём коэффициент при z, находим условие того, чтобы левая часть уравнения (32) была точной производной, в виде:

$$a_n - \frac{d}{dx}a_{n-1} + \frac{d^2}{dx^2}a_{n-2} - \ldots + (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}a_0 = 0. \tag{A}$$

Легко видеть, что условие (A) есть частный случай условия (33_n) главы IV для случая, когда уравнение оказывается линейным.

Примечание 2. Оператор $L[y]$ чётного порядка $n = 2m$ называется *самосопряжённым*, если он совпадает с сопряжённым оператором: $L[y] \equiv M[y]$. Уравнение $L[y] = 0$ называется в таком случае *самосопряжённым уравнением*. Для оператора второго порядка

$$L[y] \equiv a_2 y + a_1 y' + a_0 y''$$

сопряжённый оператор есть

$$M[z] \equiv a_2 z - (a_1 z)' + (a_0 z)'' =$$
$$= (a_2 - a_1' + a_0'')z + (-a_1 + 2a_0')z' + a_0 z'';$$

условия самосопряжённости

$$-a_1 + 2a_0' = a_1, \quad a_2 - a_1' + a_0'' = a_2$$

---

[1]) Новое уравнение, полученное умножением левой части на множитель, приходится рассматривать лишь в тех интервалах, где этот множитель, так же как и a_0, не обращается в нуль (§ 1, 1).

сводятся к одному первому: $a_1 = a_0'$. Итак, самосопряжённый оператор второго порядка имеет вид: $(a_0 y')' + a_2 y$.

Пример 7. $(1+x)y'' - xy' - y = 2x$. Здесь $a_2 = -1$, $a_1 = -x$, $a_0 = 1+x$; условие (А) выполняется: $-1 + \frac{d}{dx}x + \frac{d^2}{dx^2}(1+x) \equiv 0$. Следовательно, левая часть уравнения является точной производной, и оно допускает первый интеграл вида (33), где можно положить $\bar{z} = 1$. Выражение $\Psi[y, z]$ в нашем случае есть $a_1 zy - (a_0 z)' y + a_0 z y'$; подставляя в него значения a_0, a_1 и единицу вместо z, получаем первый интеграл $(1+x)y' + y(-x-1) = x^2 + C_1$, или $y' - y = \frac{x^2 + C_1}{x+1}$; для левой части сопряжённое выражение есть $-z - z'$; решение уравнения $z + z' = 0$, т. е. $\bar{z} = e^{-x}$, может быть принято в качестве множителя нового уравнения, и мы имеем: $e^{-x}y' - e^{-x}y = e^{-x}\frac{x^2 + C_1}{x+1}$; левая часть этого уравнения — опять полная производная, и общее решение данного уравнения получится в квадратурах:

$$y = e^x \int \frac{e^{-x}(x^2 + C_1)}{x+1}\,dx + C_2 e^x.$$

2. Свойства сопряжённых уравнений. Заметим сначала, что *сопряжённость двух выражений $L[y]$ и $M[z]$ есть свойство взаимное*, если $M[z]$ есть дифференциальный оператор, сопряжённый с $L[y]$, то и обратно, $L[y]$ сопряжён с $M[z]$ и определяется по $M[z]$ однозначно. Это следует из симметричности левой части формулы (30) относительно L и M; если $\bar{y}$ есть решение уравнения (32), то из формулы (30) имеем: $\bar{y}M(z) = -\frac{d}{dx}\Psi[\bar{y}, z]$, т. е. любое решение уравнения (32) есть множитель уравнения (32′), а это и показывает, что $L[y]$ есть оператор, сопряжённый с $M[z]$.

Мы уже видели, что знание одного частного решения сопряжённого уравнения даёт возможность без квадратур найти первый интеграл данного уравнения, т. е. понизить его порядок на единицу; зная $p < n$ линейно независимых частных решений уравнения (32′), мы получим p первых интегралов уравнения (32); исключая из них $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y^{(n-p+1)}$ (можно показать, что такое исключение всегда возможно и приводит к одному соотношению), мы получим уравнение порядка $n-p$, т. е. понизим порядок уравнения на p единиц.

Пусть теперь нам известно полное решение уравнения (32), т. е. его фундаментальная система:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

В таком случае $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$. Мы покажем, как найти общее решение сопряжённого уравнения (32′). Заменим в определителе Вронского y_i через неизвестную функцию y и составим линейное дифференциальное выражение $(n-1)$-го порядка относительно y:

$$\theta_i[y] = \frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}.$$

Очевидно, мы имеем: $\theta_i[y_k]=0$ при $k\neq i$, $\theta_i(y_i)=1$. Следовательно, выражение $\frac{d}{dx}\theta_i[y]$ представляет линейное дифференциальное выражение порядка n, обращающееся в нуль при $y=y_1, y_2, \ldots, y_n$. Значит, оно только не зависящим от y множителем может отличаться от $L[y]$. Чтобы найти этот множитель, сравним в обоих выражениях $L[y]$ и $\frac{d}{dx}\theta_i[y]$ коэффициенты при $y^{(n)}$. В $L[y]$ этот коэффициент равен a_0, а коэффициент при $y^{(n)}$ в $\frac{d}{dx}\theta_i[y]$ таков же, как коэффициент при $y^{(n-1)}$ в выражении $\theta_i[y]$, а именно, это минор, соответствующий элементу последней строки и i-го столбца определителя Вронского, делённый на самый определитель, т. е.

$$(-1)^{n+i}\frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}\equiv\frac{\partial \ln W[y_1, \ldots, y_n]}{\partial y_i^{(n-1)}}.$$

Итак,

$$\frac{d\theta_i[y]}{dx}=z_iL[y], \tag{34}$$

где

$$z_i=(-1)^{n+i}\frac{1}{a_0}\frac{W[y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n]}{W[y_1, y_2, \ldots, y_n]}. \tag{34'}$$

Выражение z_i, являясь множителем уравнения (32), представляет, по сказанному выше, решение уравнения $M[z]=0$. Давая i значения $1, 2, \ldots, n$, мы получим без всяких интеграций n частных решений уравнения (32′) при помощи фундаментальной системы уравнения (32). Остаётся показать, что полученные выражения линейно независимы. В силу определения функций $z_1, z_2, \ldots, z_n$, мы имеем:

$$z_1y_1^{(n-1)}+z_2y_2^{(n-1)}+\ldots+z_ny_n^{(n-1)}=\frac{1}{a_0}. \tag{35'}$$

Действительно, левая часть (35′), согласно формулам (34′), равна дроби $\frac{1}{a_0W[y_1, \ldots, y_n]}$, умноженной на разложение определителя $W[y_1, \ldots, y_n]$ по элементам последней строки, т. е. равна $\frac{1}{a_0}$. Далее, если подставить в $W[y_1, \ldots, y_n]$ на место последней его строки $y_1^{(n-1)}, y_2^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(n-1)}$ последовательно первую строку, вторую, ... $(n-2)$-ю, то мы получим определитель с двумя равными строками, т. е. 0; деля каждый из этих определителей на $W[y_1, \ldots, y_n]$ и разлагая по элементам последней строки, мы получим, в силу определения (34′) функций z_i, следующие равенства:

$$\left.\begin{array}{l} z_1y_1+z_2y_2+\ldots+z_ny_n=0,\\ z_1y_1'+z_2y_2'+\ldots+z_ny'=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ z_1y_1^{(n-2)}+z_2y_2^{(n-2)}+\ldots+z_ny_n^{(n-2)}=0.\end{array}\right\} \tag{35}$$

Дифференцируя первое из равенств (35) по x и учитывая второе, получим:

$$z_1'y_1+z_2'y_2+\ldots+z_n'y_n=0. \tag{36'}$$

Дифференцируя второе и принимая во внимание третье, дифференцируя третье и принимая во внимание четвёртое и т. д. и, наконец, дифференцируя последнее из равенств (35) и принимая во внимание (35′), получим:

$$\left.\begin{array}{c} z_1'y_1'+z_2'y_2'+\ldots+z_n'y_n'=0, \\ z_1'y_1''+z_2'y_2''+\ldots+z_n'y_n''=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_1'y_1^{(n-2)}+z_2'y_2^{(n-2)}+\ldots+z_n'y_n^{(n-2)}=-\dfrac{1}{a_0}. \end{array}\right\} \tag{36}$$

Аналогично, дифференцируя каждое из равенств (36′) и (36) и принимая во внимание следующее, получим группу:

$$z_1''y_1^{(i)}+z_2''y_2^{(i)}+\ldots+z_n''y_n^{(i)}=0 \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-4),$$

$$z_1''y_1^{(n-3)}+z_2''y_2^{(n-3)}+\ldots+z_n''y_n^{(n-3)}=\frac{1}{a_0}.$$

Продолжая те же операции, получим в итоге следующие равенства:

$$z_1^{(i)}y_1^{(k)}+z_2^{(i)}y_2^{(k)}+\ldots+z_n^{(i)}y_n^{(k)}=\begin{cases} 0, \text{ если } i+k<n-1, \\ \dfrac{(-1)^i}{a_0}, \text{ если } i+k=n-1. \end{cases} \tag{37}$$

Составим теперь произведение определителей $\Delta=W[y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n]$ и $\Delta_1=W[z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n]$ по правилу «строка на строку». Из соотношений (37) следует, что мы получим определитель, у которого на побочной диагонали стоят элементы $\dfrac{(-1)^n}{a_0}, \dfrac{(-1)^{n-1}}{a_0}, \ldots, \dfrac{1}{a_0}$, а выше этой диагонали — нули. Отсюда имеем: $\Delta\Delta_1=\dfrac{1}{a_0^n}$; таким образом, $\Delta_1\neq 0$, и, значит, функции $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ действительно образуют фундаментальную систему сопряжённого уравнения (32′). Итак, *из фундаментальной системы данного уравнения* по формулам (34′) *без всяких интеграций может быть получена фундаментальная система сопряжённого уравнения.* Решения z_i уравнения (32′), даваемые формулами (34′), называются *решениями, сопряжёнными с* y_i. Таким образом, *интегрирование данного уравнения и уравнения сопряжённого суть задачи эквивалентные.*

3. Формула Коши для неоднородного уравнения. Функция Грина. Пусть в уравнении (1′) коэффициенты и правая часть являются непрерывными функциями x в интервале $a\leqslant x\leqslant b$. Считая фундаментальную систему однородного уравнения известною, составим решение $K(x,\ \xi)$ однородного уравнения, зависящее от параметра ξ, а именно, решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$K(\xi,\ \xi)=0,\quad K_x'(\xi,\ \xi)=0,\ \ldots,\ K_x^{(n-2)}(\xi,\ \xi)=0,\ K_x^{(n-1)}(\xi,\ \xi)=1. \tag{38}$$

Тогда частное решение уравнения (1) даётся формулой:

$$Y(x)=\int_a^x K(x,\ \xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{38′}$$

В самом деле, дифференцируем последовательно равенство (38′) n раз по x; принимая во внимание условия (38), находим:

$$Y'(x) = \int_a^x K'_x(x, \xi) f(\xi)\, d\xi, \ \ldots, \ Y^{(n-1)}(x) = \int_a^x K_x^{(n-1)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$Y^{(n)}(x) = \int_a^x K_x^{(n)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi + f(x).$$

Подставляя эти выражения в левую часть уравнения (1′), получаем:

$$\int_a^x \left\{ K_x^{(n)}(x, \xi) + p_1(x) K_x^{(n-1)}(x, \xi) + \ldots + p_n(x) K(x, \xi) \right\} f(\xi)\, d\xi + f(x).$$

Но поскольку $K(x, \xi)$, как функция x, есть решение уравнения (3′) при любом ξ, выражение в фигурных скобках равно нулю, и подстановка выражения (38′) в уравнение (1′) даёт тождество. Наше утверждение доказано.

Заметим, что полученное решение удовлетворяет начальным условиям:

$$Y(a) = Y'(a) = \ldots = Y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Формуле (38′) можно придать другой вид. Для этого определим функцию Грина от двух переменных x, ξ (аргумента и параметра):

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 0, & a \leqslant x \leqslant \xi, \\ K(x, \xi), & \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Легко видеть, что G, как функция x, удовлетворяет однородному уравнению (3′), всюду кроме значения $x = \xi$, где она остаётся непрерывной вместе с $n-2$ производными, тогда как производная $(n-1)$-го порядка имеет в этой точке скачок:

$$G_x^{(n-1)}(\xi + 0, \xi) - G_x^{(n-1)}(\xi - 0, \xi) = 1.$$

С помощью функции Грина решение (38) уравнения (1′) может быть написано в форме определённого интеграла:

$$Y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Исследуем функцию Грина в её зависимости от параметра ξ. Для этого построим функцию Грина $G_1(x, \xi)$ уравнения (31), сопряжённого с уравнением (1′), в которой роли концов a и b переменены (коэффициент a предполагается равным 1). Именно, строим решение $K_1(x, \xi)$ уравнения (31), удовлетворяющее условиям:

$$K_1(\xi, \xi) = 0, \ K'_{1x}(\xi, \xi) = 0, \ \ldots, \ K_{1x}^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0, \ K_{1x}^{(n-1)}(\xi, \xi) = -1,$$

и полагаем:

$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} K_1(x, \xi), & a \leqslant x \leqslant \xi, \\ 0, & \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Далее применяем формулу (30), в которой положено $y = G(x, \xi)$, $z = G_1(x, \eta)$. Замечая, что в интервалах, не заключающих точек ξ и η, функ-

ции G и G_1 от x удовлетворяют соответствующим линейным уравнениям, в левой части мы имеем 0, в правой части все входящие функции непрерывны, кроме $G_x^{(n-1)}$, $G_{1x}^{(n-1)}$, претерпевающих разрыв соответственно при $x=\xi$ и при $x=\eta$. Поэтому имеем, полагая для определённости $\xi<\eta$:

$$0=\int_a^b [G_1L(G)-GM(G_1)]\,dx=$$

$$=\Psi[G,\ G_1]\Big|_{x=a}^{x=\xi-0}+\Psi[G,\ G_1]\Big|_{x=\xi+0}^{x=\eta-0}+\Psi[G,\ G_1]\Big|_{x=\eta+0}^{b}.$$

Так как $G(x,\ \xi)$ со всеми производными обращается в нуль при $x=a$, а при $x=b$ то же имеет место для $G_1(x,\ \eta)$, то имеем:

$$\Psi[G,\ G_1]\Big|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0}+\Psi[G,\ G_1]\Big|_{x=\eta+0}^{x=\eta-0}=0.$$

Принимая во внимание формулу (31′) для Ψ, а также непрерывность при $x=\xi$ и $x=\eta$ всех производных до порядка $n-2$ включительно, мы из последнего равенства получаем, оставляя лишь члены, где есть разрыв:

$$G_1G_x^{(n-1)}\Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0}+(-1)^{n-1}G_{1x}^{(n-1)}G\Big|_{x=\eta+0}^{x=\eta-0}=0,$$

или, в силу непрерывности G и G_1 при $x=\xi$ и при $x=\eta$,

$$G(\eta,\ \xi)=(-1)^n\cdot G_1(\xi,\ \eta),$$

т. е. $G(x,\ \xi)$ как функция ξ есть функция Грина сопряжённого уравнения с переменёнными ролями концов, в которой x является параметром.

Пример 8. Найти решение Y уравнения $y''+p^2y=f(x)$, удовлетворяющее условиям $Y(0)=Y'(0)=0$ (p — постоянное).

Функция $K(x,\ \xi)$, удовлетворяющая условиям $K(\xi,\ \xi)=0$, $K'_x(\xi,\ \xi)=1$, здесь будет $\sin p(x-\xi)$. Итак, искомое решение есть

$$Y(x)=\int_0^x \sin p(x-\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

ЗАДАЧИ.

143. Каким соотношением связаны коэффициенты уравнения $y''+p_1y'+p_2y=0$, если два частных решения y_1 и y_2 удовлетворяют соотношению $y_1y_2=1$? Найти при выполнении этого условия общее решение.

144. Какая подстановка приводит сразу к уравнению $(n-2)$-го порядка, если известны два частных решения y_1 и y_2 линейного уравнения n-го порядка?

145. Найти общее решение уравнения $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$, зная, что его частное решение имеет вид e^{mx}, где m — постоянное.

146. Проинтегрировать уравнение $\sin^2 x\cdot y''+\sin x\cdot\cos x\cdot y'=y$.