§ 2. Линейные уравнения второго порядка.

1. Приведение к простейшим формам. Мы будем рассматривать однородные линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{38}$$

или же

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0. \tag{38'}$$

Коэффициенты P, Q или p_0, p_1, p_2 будем предполагать непрерывными функциями от x.

Рассмотрим некоторые упрощённые формы уравнения второго порядка.

Как известно из главы V (стр. 209), *самосопряжённое* уравнение второго порядка имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy = 0. \tag{39}$$

Докажем, что *всякое уравнение второго порядка может быть приведено к самосопряжённой форме умножением на некоторую функцию от x.*

Уравнение (39), написанное в раскрытом виде,

$$py'' + p'y' + qy = 0,$$

показывает, что коэффициент при y' есть производная от коэффициента при y''. Умножим обе части уравнения (38′) на некоторую функцию $\mu(x)$ и постараемся подобрать эту функцию так, чтобы для нового уравнения выполнялось условие:

$$(\mu p_0(x))' = \mu p_1(x).$$

Преобразуем это уравнение для μ:

$$p_0\mu' + p_0'\mu = p_1\mu; \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{p_1 - p_0'}{p_0}, \quad \ln\mu = \int\frac{p_1}{p_0}dx - \int\frac{p_0'\,dx}{p_0},$$

$$\mu = \frac{1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}.$$

По умножении на μ уравнение (38′) примет вид:

$$e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y'' + \frac{p_1}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y' + \frac{p_2}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y = 0,$$

или

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}\frac{dy}{dx}\right) + \frac{p_2}{p_0}e^{\int\frac{p_1}{p_0}dx}y = 0,$$

т. е., действительно, вид (39), где $p = e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx}$, $q = \frac{p_2}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx}$. Заметим, что коэффициенты p, q непрерывны во всяком интервале, где p_0 не обращается в 0; кроме того, в этом интервале $p > 0$.

Пример 17. Привести к самосопряжённому виду уравнение Бесселя: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$. Здесь $p_0 = x^2$, $p_1 = x$; $\mu = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$. Искомый вид: $\frac{d}{dx}(xy') + \left(x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0$.

Заменой независимого переменного можно привести линейное уравнение второго порядка к виду:

$$y'' + Q(x)y = 0. \tag{40}$$

Пусть уравнение уже приведено к форме (39). Вводим новое независимое переменное ξ уравнениями $d\xi = \frac{dx}{p(x)}$, $\xi = \int \frac{dx}{p(x)}$; ξ как функция x определена во всяком интервале оси x, где $p \neq 0$. Так как $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{p} > 0$, то, обратно, x определяется как непрерывная и дифференцируемая функция от ξ в соответствующих интервалах оси ξ, $x = \chi(\xi)$. Тогда $\frac{du}{dx} = \frac{1}{p}\frac{du}{d\xi}$ для любой функции u. Подставляя в уравнение (39), находим:

$$\frac{1}{p}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi}\right) + qy = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{d\xi^2} + Q(\xi)y = 0$$

— уравнение вида (40), где $Q(\xi)$ есть результат подстановки в $p(x)q(x)$ значения $x = \chi(\xi)$. Если вернуться к форме (38′), то мы получим:

$$d\xi = e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx} dx, \qquad Q = \frac{p_2}{p_0} e^{2\int \frac{p_1}{p_0} dx}.$$

Это преобразование, упрощая уравнение, приводит его иногда к виду, для которого известно общее решение уравнения.

Пример 18. $xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0$. Приводим к самосопряжённому виду умножением на $x^{-\frac{1}{2}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}\right) - x^{-\frac{1}{2}}y = 0, \text{ или } x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}y\right) - y = 0.$$

Вводим переменное ξ: $x^{-\frac{1}{2}}dx = d\xi$, $\xi = 2\sqrt{x}$.

Преобразованное уравнение: $\frac{d^2y}{d\xi^2} - y = 0$; его общее решение $y = C_1e^{\xi} + C_2e^{-\xi}$. Возвращаясь к переменному x, находим:

$$y = C_1e^{2\sqrt{x}} + C_2e^{-2\sqrt{x}}.$$

Линейной заменой искомой функции также можно уничтожить член с первой производной, т. е. привести уравнение к виду (40). Возьмём исходное уравнение с коэффициентом при второй производной, равным единице:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{38}$$

Введём новую искомую функцию z, связанную со старой соотношением

$$y = u(x)z, \tag{41}$$

и подберём функцию u так, чтобы в преобразованном уравнении обратился в **0** коэффициент при z'. Дифференцируем (41) два раза:

$$y' = uz' + u'z, \quad y'' = uz'' + 2u'z' + u''z.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$uz'' + (2u' + Pu)z' + (u'' + Pu' + Qu)z = 0. \tag{42}$$

Приравниваем нулю коэффициент при z':

$$2u' + Pu = 0.$$

Находим значение u и подставляем в уравнение (42), сокращая на показательный множитель:

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx}; \; u' = -\frac{1}{2}Pe^{-\frac{1}{2}\int P\,dx}; \; u'' = \left(\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P'\right)e^{-\frac{1}{2}\int P\,dx};$$

$$z'' + \left(-\frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P' + Q\right)z = 0. \tag{42'}$$

Мы получили уравнение вида (40). Функция от x

$$I(x) = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P' \tag{43}$$

называется *инвариантом* уравнения (38). Очевидно, эта функция не изменяет своей величины при всех преобразованиях уравнения помощью подстановок вида (41), так как все уравнения, в которых искомые функции отличаются только множителем $u(x)$, приводятся к одному и тому же уравнению вида (42′). Равенство инвариантов двух уравнений второго порядка есть необходимое и достаточное условие того, чтобы одно из них могло быть преобразовано в другое подстановкой вида (41).

Замечание. Следует отметить, что во всяком линейном уравнении без правой части можно произвести понижение порядка, поскольку такое уравнение будет однородным относительно искомой функции и её производных, однако при таком понижении порядка мы получим нелинейное уравнение.

В применении к уравнению (38) после замены $y = e^{\int z\,dx}$ мы получим уравнение типа Рикатти:

$$z' = -(z^2 + P(x)z + Q(x)).$$

Легко видеть, что каждое уравнение типа Рикатти:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

при помощи замены $y = -\frac{1}{p(x)}\frac{u'}{u}$ сведётся к линейному однородному уравнению 2-го порядка.

Пример 19. Доказать, что уравнение

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0$$

подстановкой вида (41) приводится к уравнению Бесселя нормального вида $z'' + \frac{1}{x}z' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)z = 0$, и выразить n через m.

Для заданного уравнения имеем: $I_1 = 1 - \frac{m^2}{x^2} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{m^2 + \frac{3}{4}}{x^2}$. Для уравнения Бесселя: $I_2 = 1 - \frac{n^2}{x^2} - \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x^2} = 1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2}$. Очевидно, равенство $I_1 = I_2$ удовлетворяется, если $m^2 + \frac{3}{4} = n^2 - \frac{1}{4}$. Отсюда $n^2 = m^2 + 1$.

ЗАДАЧА.

169. Какое преобразование вида (41) приводит уравнение примера 19 к нормальному виду Бесселя?

Преобразование линейного уравнения к виду (40) подстановкой (41) иногда даёт возможность притти к одному из типов уравнений, которые мы умеем интегрировать.

Пример 20. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$. Применяем преобразование $y = u(x)z$; $uz'' + \left(2u' + \frac{2}{x}u\right)z' + \left(u'' + \frac{2}{x}u' + u\right)z = 0$. Приравниваем нулю коэффициент при z'; это даёт нам $u = \frac{1}{x}$; далее, $u' = -\frac{1}{x^2}$, $u'' = \frac{2}{x^3}$. Подставляем в уравнение:

$$\frac{1}{x}z'' + \left(\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}\right)z = 0,$$

или $z'' + z = 0$. Отсюда $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, или $y = C_1 \frac{\cos x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x}$. См. также пример 14.

ЗАДАЧИ.

170. Привести к нормальном виду Бесселя уравнение $y'' + \frac{2p}{x} y' + y = 0$

Проинтегрировать уравнения:

171. $xy'' - y' - x^3 y = 0$.

172. $y'' - 4xy' + (4x^2 - 1) y = -3e^{x^2} \sin 2x$.

173. $y'' - \frac{1}{\sqrt{x}} y' + \frac{y}{4x^2} (-8 + x^{\frac{1}{2}} + x) = 0$.

2. Интегрирование посредством степенных рядов. Ввиду большой важности многих дифференциальных линейных уравнений второго порядка для приложений, в тех случаях, когда их интегрирование при помощи элементарных функций не удаётся, их решения вводятся в качестве новых трансцендентных функций. Таковы, например, *функции Бесселя* первого и второго рода — два линейно независимых решения уравнения Бесселя. Для определения этих функций часто пользуются представлением решения уравнения в виде степенного ряда по возрастающим степеням $x - x_0$, где x_0 — начальное значение. В аналитической теории дифференциальных уравнений доказывается, что если коэффициенты p_0, p_1, p_2 уравнения (38′) являются многочленами или степенными рядами из целых неотрицательных степеней $x - x_0$, причём $p_0(x_0)$ не равно нулю, то решения уравнения (38′) тоже выражаются сходящимися степенными рядами по целым неотрицательным степеням $x - x_0$. Не доказывая здесь этого общего положения, мы сумеем в каждом отдельном случае доказать сходимость рядов, представляющих решения данного уравнения.

Пример 21. Найти общее решение уравнения $y'' + xy = 0$. Ищем это решение в виде степенного ряда по степеням x: $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots$ Формальным дифференцированием находим: $y'' = 2 \cdot 1 \cdot A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3 x + \ldots + n(n-1) A_n x^{n-2} + \ldots$ Подставляем в уравнение и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$2 \cdot 1 \cdot A_2 = 0, \quad 3 \cdot 2 \cdot A_3 + A_0 = 0,$$
$$4 \cdot 3 \cdot A_4 + A_1 = 0, \ \ldots, \quad n(n-1) A_n + A_{n-3} = 0, \ \ldots$$

Из этих уравнений находим:

$$A_2 = 0, \ A_3 = -\frac{A_0}{2 \cdot 3}, \ A_4 = -\frac{A_1}{3 \cdot 4}, \ A_5 = -\frac{A_2}{4 \cdot 5} = 0,$$
$$A_6 = -\frac{A_3}{5 \cdot 6} = \frac{A_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \ A_7 = -\frac{A_4}{6 \cdot 7} = \frac{A_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$$

и, вообще, $A_{3k-1} = 0$, $A_{3k} = (-1)^k \frac{A_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (3k-1) 3k}$, $A_{3k+1} = (-1)^k \frac{A_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3k(3k+1)}$. Коэффициенты A_0 и A_1 не опре-

деляются этими уравнениями, это — два произвольных постоянных. Общее решение имеет вид:

$$y = A_0\left\{1 - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{3k}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\ldots(3k-1)\,3k} + \ldots\right\} +$$
$$+ A_1\left\{x - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} - \ldots + \right.$$
$$\left. + (-1)^k \frac{x^{3k+1}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\ldots 3k\,(3k+1)} + \ldots\right\} = A_0 y_1(x) + A_1 y_2(x).$$

С помощью элементарных признаков легко установить сходимость рядов $y_1(x)$ и $y_2(x)$ для всех значений x; по общим свойствам степенных рядов эти ряды, так же как полученные из них формальным дифференцированием, сходятся равномерно на любом конечном отрезке оси x. Следовательно, формальное получение этих решений оправдано, и они являются, в самом деле, решениями данного уравнения[1]).

ЗАДАЧА.

174. Проинтегрировать с помощью ряда, расположенного по степеням x, уравнение $y'' + xy' + y = 0$.

Метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений рядами, расположенными по степеням $x - x_0$, применим также в некоторых случаях, когда коэффициент $p_0(x)$ обращается в нуль при $x = x_0$. Однако получаемые при этом степенные ряды (сходящиеся) содержат, вообще говоря, не целые степени $x - x_0$, а имеют вид:

$$A_0(x - x_0)^r + A_1(x - x_0)^{r+1} + \ldots + A_n(x - x_0)^{r+n} + \ldots, \qquad (44)$$

где r — некоторое число, вообще не целое. Уже из (44) ясно, что полное значение такого разложения может обнаружиться лишь при рассмотрении x как комплексного переменного, так как при $x - x_0 < 0$ и дробном или иррациональном r выражение $(x - x_0)^r$ в действительной области может не иметь смысла. Теория Фукса даёт условия, при которых уравнение n-го порядка имеет n частных решений вида (44) или ещё более общего — произведения многочлена от $\ln(x - x_0)$ на ряд этого вида. Мы опять ограничимся рассмотрением одного случая, имеющего, однако, большой теоретический интерес, — так называемого гипергеометрического уравнения.

Рассмотрим уравнение вида:

$$(x^2 + Ax + B)\frac{d^2y}{dx^2} + (Cx + D)\frac{dy}{dx} + Ey = 0. \qquad (45)$$

Корни многочлена второй степени, стоящего множителем при y'', пусть будут различны и действительны (однако последнее ограничение от-

---

[1]) Очевидно, описанный здесь приём применим к линейному дифференциальному уравнению любого порядка.

падёт, если рассматривать переменное x в комплексной области). Чтобы не вводить мнимых величин, мы предположим также, что A, B, C, D, E — действительные числа. В таком случае можно переписать уравнение (45) в виде:

$$(x-x_1)(x-x_2)y''+(Cx+D)y'+Ey=0, \qquad (45')$$

где x_1 и x_2 — корни многочлена x^2+Ax+B. Это показывает, что коэффициент при y'' обращается в нуль при значениях $x=x_1$ и $x=x_2$. Преобразуем независимое переменное так, чтобы эти значения были 0 и 1. Для этого вводим новое переменное z, связанное с x соотношением:

$$x=x_1-z(x_1-x_2).$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{dy}{dz}\frac{1}{x_1-x_2}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{(x_1-x_2)^2},$$

$$x-x_1=-z(x_1-x_2), \quad x-x_2=(1-z)(x_1-x_2),$$

и мы получаем:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+\left[\frac{Cx_1+D}{x_1-x_2}-Cz\right]\frac{dy}{dz}-Ey=0.$$

Вводя обозначения $\frac{Cx_1+D}{x_1-x_2}=\gamma$, $C=\alpha+\beta+1$, $E=\alpha\beta$ и обозначая независимое переменное снова через x, мы получим *гипергеометрическое уравнение* в обычном его виде:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0. \qquad (46)$$

Пример 22. Привести к виду (46) *уравнение Лежандра* $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$. Замена переменного $x=1-2z$ даёт:

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2}+(1-2z)\frac{dy}{dz}+n(n+1)y=0.$$

Здесь $\gamma=1$, $\alpha=n+1$, $\beta=-n$.

Мы видим, что уравнение (46) зависит от трёх параметров: α, β, γ, причём параметры α и β входят симметрично. Найдём решения уравнения (46) в виде рядов по степеням x. Подставляем в уравнение ряды:

$$\left.\begin{aligned}
y&=A_0x^r+A_1x^{r+1}+\ldots+A_nx^{r+n}+\ldots,\\
y'&=rA_0x^{r-1}+(r+1)A_1x^r+\ldots+(r+n)A_nx^{r+n-1}+\ldots,\\
y''&=r(r-1)A_0x^{r-2}+(r+1)rA_1x^{r-1}+\ldots\\
&\qquad\ldots+(r+n)(r+n-1)A_nx^{r+n-2}+\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Последний из рядов (47) умножаем на $1-x^2$, второй ряд — на

$\gamma-(\alpha+\beta+1)x$, первый — на — $\alpha\beta$, складываем, собираем коэффициенты при одинаковых степенях x и приравниваем их нулю. Низшая степень x в результате будет $r-1$; приравниваем нулю коэффициент при x^{r-1}:

$$r(r-1)A_0+\gamma rA_0=0.$$

Без ограничения общности можно положить $A_0\neq 0$. Тогда для r получается квадратное уравнение:

$$r(r-1+\gamma)=0,$$

откуда $r_1=0$, $r_2=1-\gamma$.

Исследуем решение, соответствующее значению $r_1=0$. Ряды (47) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} y &= A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n+\ldots,\\ y' &= A_1+2A_2x+3A_3x^2+\ldots+nA_nx^{n-1}+\ldots,\\ y'' &= 2A_2+6A_3x+\ldots+n(n-1)A_nx^{n-2}+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (47')$$

Подстановка в уравнение (46) рядов (47′) даёт свободный член в виде $\gamma A_1-\alpha\beta A_0=0$, откуда, предполагая $\gamma\neq 0$,

$$A_1=A_0\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}.$$

Собирая члены при x, получим:

$$2A_2+2\gamma A_2-(\alpha+\beta+1)A_1-\alpha\beta A_1=0,$$

или

$$2(\gamma+1)A_2=(\alpha+1)(\beta+1)A_1;$$

следовательно (если $\gamma\neq-1$),

$$A_2=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}A_1=\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}A_0.$$

Вообще, члены, содержащие x^n, дают:

$$(n+1)nA_{n+1}-n(n-1)A_n+\gamma(n+1)A_{n+1}-$$
$$-(\alpha+\beta+1)nA_n-\alpha\beta A_n=0,$$

или

$$(n+1)(\gamma+n)A_{n+1}-(\alpha+n)(\beta+n)A_n=0,$$

откуда (если $\gamma\neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -n$)

$$A_{n+1}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}A_n=\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)(\beta+n)(\beta+n-1)}{(n+1)n(\gamma+n)(\gamma+n-1)}A_{n-1}=\ldots$$
$$\ldots=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{1\cdot 2\ldots(n+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)}A_0.$$

Полагая произвольное постоянное $A_0=1$, получаем, в предположении, что γ не равно нулю или целому отрицательному числу, частное

решение уравнения (46) — так называемый *гипергеометрический ряд*:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n)}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n)} x^{n+1} + \ldots \quad (48)$$

Признак сходимости Даламбера показывает, что ряд (48) сходится при $|x| < 1$; как известно из теории степенных рядов, он сходится равномерно в любом замкнутом интервале, внутреннем к $(-1, +1)$, и допускает почленное дифференцирование любое число раз; следовательно, он удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению (46). Итак, первое частное решение уравнения (46) есть

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \quad (\gamma \neq 0, -1 -2, \ldots).$$

Чтобы получить второе частное решение, можно было бы воспользоваться рядами (47), полагая в них $r = 1 - \gamma$. Но мы скорее придём к цели, если в уравнение (46) введём новую функцию w, связанную с y соотношением:

$$y = x^{1-\gamma} w.$$

Тогда

$$y' = x^{1-\gamma} w' + (1-\gamma) x^{-\gamma} w,$$
$$y'' = x^{1-\gamma} w'' + 2(1-\gamma) x^{-\gamma} w' - \gamma(1-\gamma) x^{-\gamma-1} w.$$

Подставляем в уравнение (46):

$$x^{1-\gamma} x(1-x) \frac{d^2 w}{dx^2} + x^{1-\gamma}[\gamma - (\alpha+\beta+1)x + 2(1-\gamma)(1-x)] \frac{dw}{dx} +$$
$$+ x^{1-\gamma}[-\alpha\beta + \gamma(1-\gamma)x^{-1} - (\alpha+\beta+1)(1-\gamma) -$$
$$- \gamma(1-\gamma)x^{-1} + \gamma(1-\gamma)] w = 0,$$

или

$$x(1-x) \frac{d^2 w}{dx^2} + [2 - \gamma - (\alpha+\beta-2\gamma+3)x] \frac{dw}{dx} -$$
$$- (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma) w = 0,$$

т. е. мы получили опять гипергеометрическое уравнение, в которое вместо параметров α, β, γ входят соответственно $\alpha+1-\gamma$, $\beta+1-\gamma$, $2-\gamma$. Его решение в виде ряда, начинающегося с члена, не содержащего x, есть $F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x)$. Итак, второе частное решение уравнения (46) есть

$$y_2 = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma; x).$$

Оно имеет смысл, если $2-\gamma$ не равно нулю или целому отрицательному числу. В частности, оно имеет смысл всегда, когда γ равно нулю или целому отрицательному числу, т. е. когда теряет смысл y_1. Мы не останавливаемся на нахождении второго частного решения в указанных исключительных случаях.

Гипергеометрический ряд, содержащий три параметра, α, β, γ, даёт при частных значениях этих параметров весьма большое число различных элементарных функций. Например, при $\alpha=\gamma$ получаем:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \alpha;\ x)=1+\frac{\beta}{1}x+\frac{\beta(\beta+1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!}x^n+\ldots=(1-x)^{-\beta}.$$

Далее, при $\alpha=\beta=1$, $\gamma=2$, имеем:

$$F(1,\ 1,\ 2;\ x)=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n+1}+\ldots=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}.$$

Заметим, наконец, что при α или β, равном целому отрицательному числу $-n$, ряд (48) обрывается на члене, содержащем x^n, т. е. является многочленом относительно x. Так, например, при n целом одно решение уравнения Лежандра (см. пример 22) является многочленом; с точностью до постоянного множителя A_n этот так называемый многочлен Лежандра выражается так:

$$P_n(x)=A_nF\left(n+1,\ -n,\ 1;\ \frac{1-x}{2}\right).$$

Метод, применённый нами для интегрирования гипергеометрического уравнения, применим к большому числу уравнений второго порядка, встречающихся в физике и механике. Так, например, для уравнения Бесселя:

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0;$$

в случае, если n не равно целому числу, он даёт два ряда по возрастающим степеням x, начинающихся соответственно с x^n и x^{-n}; эти ряды определяют *функции Бесселя* $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$; общее решение уравнения Бесселя есть $C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x)$.

Если n равно целому числу (можно принять $n\geqslant 0$), то только одно частное решение выражается степенным рядом: $J_n(x)$ — *функция Бесселя первого рода*; второе частное решение содержит ещё $\ln x$; оно называется функцией Бесселя второго рода.

Тот же способ без изменений может быть применён к нахождению решений уравнений порядка выше второго.

3. Линейные уравнения второго порядка с колеблющимися решениями. Рассмотрение двух простейших уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''-a^2y=0, \tag{49$_1$}$$

$$y''+a^2y=0 \tag{49$_2$}$$

показывает глубокую разницу между характером функций, являющихся их частными решениями. Каждое решение уравнения (49_1) может на всём интервале $(-\infty, +\infty)$ обратиться в нуль не более одного раза (это можно доказать непосредственным вычислением). Между тем каждое решение уравнения (49_2), выражаемое формулой $A\sin(ax+\delta)$, имеет бесчисленное множество нулей, расстояние между которыми равно $\frac{\pi}{a}$; каждый интервал длины $>\frac{\pi}{a}$ содержит, по крайней мере, один нуль любого решения уравнения (49_2), а интервал длины $>\frac{2\pi}{a}$ — по крайней мере два нуля.

Если решение дифференциального уравнения имеет в данном интервале не более одного нуля, оно называется *неколеблющимся* в этом интервале, в противоположном случае — *колеблющимся*.

Итак, *уравнение вида $y''+qy=0$ имеет неколеблющиеся в любом интервале интегралы, если $q\leqslant 0$, и колеблющиеся в достаточно большом интервале, если $q>0$.*

Мы обобщим этот результат на уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Для наших целей достаточно ограничиться рассмотрением уравнений вида:

$$y''+Q(x)y=0, \tag{40}$$

так как к этому типу мы можем привести любое уравнение подстановкой:

$$y=u(x)z. \tag{41}$$

При этом, если первоначальное уравнение было вида:

$$p_0y''+p_1y'+p_2y=0, \tag{38'}$$

то $u(x)=e^{-\frac{1}{2}\int\frac{p_1}{p_0}dx}$. Мы будем рассматривать лишь те интервалы, где p_0 не обращается в 0. В этих интервалах $u(x)$ остаётся непрерывным и не обращается в 0; поэтому функции y и z имеют одни и те же нули.

ТЕОРЕМА. *Если в интервале (a, b) имеем всюду $Q(x)\leqslant 0$, то все решения уравнения*

$$y''+Q(x)y=0 \tag{40}$$

суть неколеблющиеся.

Допустим, что некоторое решение $y_1(x)$ уравнения (40) имеет, по крайней мере, два нуля; пусть нули будут x_0, x_1, $x_0<x_1$, и пусть в интервале (x_0, x_1) функция y_1 не имеет других

нулей [1]). Тогда $y_1(x)$, как непрерывная функция, сохраняет постоянный знак в интервале (x_0, x_1); всегда можно допустить, что в этом интервале $y_1(x) > 0$ [иначе мы взяли бы решение $-y_1(x)$]. Мы имеем $y_1'(x_0) > 0$ (так как y_1 возрастает вправо от x_0; при этом $y_1'(x_0) \neq 0$, иначе было бы $y_1 \equiv 0$).

Если $Q(x) \leqslant 0$, то из уравнения (40) следует, что $y_1''(x) \geqslant 0$ во всём интервале (x_0, x_1). Следовательно, $y_1'(x)$ не убывает в интервале (x_0, x_1), т. е. $y_1'(x) \geqslant y_1'(x_0)$ для $x_0 < x \leqslant x_1$; отсюда, в силу теоремы о конечном приращении, имеем:

$$y_1(x_1) \geqslant y_1(x_0) + y_1'(x_0)(x_1 - x_0) = y_1'(x_0)(x_1 - x_0) > 0,$$

что противоречит условию $y_1(x_1) = 0$. Противоречие доказывает теорему.

ТЕОРЕМА ШТУРМА. *Если x_0 и x_1 суть два последовательных нуля решения $y_1(x)$ дифференциального уравнения второго порядка, то всякое другое линейно независимое решение $y_2(x)$ того же уравнения имеет в точности один нуль между x_0 и x_1.*

Для доказательства нет нужды пользоваться приведённой формой уравнения (40). Будем рассматривать уравнение хотя бы вида (38′), причём, как всегда, предполагаем, что в нашем интервале и на его концах $p_0(x) \neq 0$. Составляем определитель Вронского:

$$y_1'(x)\, y_2(x) - y_2'(x)\, y_1(x) = W(x). \tag{50}$$

Допустим, что во всём интервале (x_0, x_1) решение $y_2(x)$ не имеет нулей. В силу линейной независимости решений y_1 и y_2, последнее не обращается в нуль также при $x = x_0$ и $x = x_1$; в самом деле, если бы было, например, $y_2(x_0) = 0$, то мы имели бы $W(x_0) = 0$, что противоречит известному свойству определителя Вронского. Так как $W(x)$ не обращается в нуль, то он сохраняет постоянный знак; допустим для определённости $W(x) > 0$. Деля обе части

---

[1]) Все нули любого не тождественно равного нулю решения $y_1(x)$ дифференциального уравнения в интервале, где коэффициенты p_0, p_1, p_2 непрерывны и p_0 не обращается в нуль, являются изолированными, т. е. существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ каждого нуля x_0, не содержащая других нулей. В противном случае точка x_0 была бы предельной точкой для нулей $y_1(x)$, т. е. существовала бы последовательность нулей $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Тогда мы имели бы: $\dfrac{y_1(x_n) - y_1(x_0)}{x_n - x_0} = 0$. Так как функция y_1 дифференцируема, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_1(x_n) - y_1(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{y_1(x_0 + h) - y_1(x_0)}{h} = y_1'(x_0) = 0.$$

Итак, в точке $x = x_0$ мы имели бы: $y_1(x_0) = 0$, $y_1'(x_0) = 0$, т. е. по теореме Коши $y_1 \equiv 0$, против предположения. Из доказанного следует ещё, что функция $y_1(x)$ имеет конечное число нулей во всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, внутреннем к (a, b).

тождества (50) на $[y_2(x)]^2$, получаем:

$$\frac{y_1'(x)\,y_2(x)-y_2'(x)\,y_1(x)}{[y_2(x)]^2}=\frac{W(x)}{[y_2(x)]^2},\quad \text{или}\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)=\frac{W(x)}{[y_2(x)]^2}.$$

В силу допущения, что $y_2(x)\neq 0$, мы имеем в правой части непрерывную функцию от x; интегрируем последнее тождество в пределах от x_0 до x_1. Получаем:

$$\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right]_{x=x_0}^{x=x_1}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{W(x)}{[y_2(x)]^2}\,dx.$$

Левая часть равна нулю в силу условий $y_1(x_0)=y_1(x_1)=0$, а в правой части стоит интеграл от положительной функции, т. е. положительная величина. Противоречие доказывает, что между двумя последовательными нулями $y_1(x)$ существует, по крайней мере, один нуль $y_2(x)$. Если бы их было два, $y_2(\bar{x}_0)=y_2(\bar{x}_1)=0$, $x_0<\bar{x}_0<\bar{x}_1<x_1$, то, переменяя роли y_1 и y_2, мы доказали бы существование нуля функции $y_1(x)$ между $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_1$, следовательно, между x_0 и x_1, а это противоречит условию, что $y_1(x)$ не имеет нулей между x_0 и x_1. Теорема доказана.

Теорему Штурма можно ещё сформулировать так: *нули двух линейно независимых решений взаимно разделяют друг друга.*

Примером, иллюстрирующим теорему Штурма, является $\sin x$ и $\cos x$, два линейно независимых решения уравнения $y''+y=0$; их нули действительно взаимно разделяют друг друга.

Следствие. Если в интервале (a, b) одно решение линейного уравнения имеет более двух нулей, то все решения — колеблющиеся.

Теорема Штурма устанавливала, что все решения одного и того же уравнения, вообще говоря, имеют одинаковый характер колебания. Следующая теорема может служить для сравнения характера колебаний решений двух различных уравнений. Мы будем предполагать уравнения данными в виде, не заключающем члена с первой производной.

ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ. *Если имеем два уравнения*

$$y''+Q_1(x)\,y=0,\qquad z''+Q_2(x)\,z=0 \tag{51}$$

и если $Q_2(x)\geqslant Q_1(x)$ в интервале (a, b), то между каждыми двумя нулями любого решения $\bar{y}(x)$ первого уравнения заключён, по крайней мере, один нуль каждого решения $\bar{z}(x)$ второго уравнения.

Пусть x_0 и x_1 суть два последовательных нуля функции $\bar{y}(x)$; допустим, что между ними нет ни одного нуля функции $\bar{z}(x)$. Без ограничения общности мы можем предположить, что $\bar{y}(x)>0$, $\bar{z}(x)>0$ в интервале (x_0, x_1). Тогда $\bar{y}(x)$ будет возрастать вправо

от x_0 и возрастать влево от x_1; следовательно, в силу уже применённого рассуждения, $\bar{y}'(x_0) > 0$, $\bar{y}'(x_1) < 0$. Подставляем $\bar{y}(x)$ и $\bar{z}(x)$ в соответствующие уравнения (51); первое из полученных тождеств умножаем на $\bar{z}(x)$, второе — на $\bar{y}(x)$ и вычитаем второе из первого:

$$\bar{y}''(x)\bar{z}(x) - \bar{z}''(x)\bar{y}(x) = [Q_2(x) - Q_1(x)]\bar{y}(x)\bar{z}(x).$$

Левая часть есть производная от выражения $\bar{y}'(x)\bar{z}(x) - \bar{z}'(x)\bar{y}(x)$. Интегрируя обе части последнего тождества в пределах от x_0 до x_1, имеем:

$$[\bar{y}'(x)\bar{z}(x) - \bar{z}'(x)\bar{y}(x)]_{x=x_0}^{x=x_1} = \int_{x_0}^{x_1} (Q_2 - Q_1)\bar{y}\bar{z}\,dx. \qquad (52)$$

В силу наших предположений интеграл в правой части (52) не отрицателен (он строго > 0, если не везде $Q_2 = Q_1$). В левой части (52) имеем: $\bar{y}'(x_1)\bar{z}(x_1) - \bar{y}'(x_0)\bar{z}(x_0)$; в силу допущения, что $\bar{z} > 0$, принимая во внимание знаки $\bar{y}'(x_0)$ и $\bar{y}'(x_1)$, получаем в левой части отрицательное число. Противоречие доказывает теорему. Мы скажем, что решения второго из уравнений (51) являются *более колеблющимися*, чем решения первого уравнения.

Если, сохраняя условия теоремы, предположить, дополнительно, что $Q_2(x) > Q_1(x)$ хотя бы для некоторых значений x интервала $(x_0\ x_1)$ и что $\bar{z}(x_0) = 0$, то следующий вправо нуль $\bar{z}(x)$ будет лежать левее x_1. Действительно, из обратного предположения вытекало бы, что левая часть (52) отрицательна, в то время как правая положительна. Итак, мы получаем ещё теорему:

Если для уравнений (51) x_0 *является общим нулём двух каких-либо частных решений* $\bar{y}(x)$ *и* $\bar{z}(x)$ *каждого из этих уравнений и если в промежутке между* x_0 *и следующим за* x_0 *нулём* x_1 *решения* $\bar{y}(x)$ *существуют точки, где* $Q_2(x) > Q_1(x)$, *а всюду, кроме них,* $Q_2(x) - Q_1(x)$ *не отрицательно, то ближайший справа к* x_0 *нуль* $\bar{z}(x)$ *расположен левее, чем* x_1.

Теорему сравнения большей частью применяют, используя в качестве одного из уравнений (51) уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + a^2 y = 0. \qquad (49_2)$$

Пусть нам дано уравнение:

$$y'' + Q(x)y = 0, \qquad (40)$$

в котором $Q(x) > 0$ в замкнутом интервале $[a, b]$, и пусть M есть максимум Q в этом интервале, а m — минимум. Предположим, что $M > m$, т. е. что $Q(x)$ не равно постоянному в рассматриваемом интервале. Принимая за первое уравнение (51) уравнение $y'' + my = 0$, а за второе — данное, получаем следующий результат: *расстояние между двумя последовательными нулями уравнения* (40) *меньше,*

чем $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Принимая затем данное уравнение за первое из уравнений (51), а в качестве второго принимая $y''+My=0$, получаем второе предложение: *расстояние между двумя последовательными нулями уравнения* (40) *больше, чем* $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$.

Эта теорема даёт оценку сверху и снизу расстояния между нулями колеблющихся решений дифференциальных уравнений.

Пример 23. Рассмотрим уравнение Бесселя для $x>0$:

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0.$$

Чтобы уничтожить член с первой производной, надо применить подстановку $y=x^{-\frac{1}{2}}z$; получаем уравнение:

$$z''+\left(1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)z=0.$$

Сравнивая с уравнением $w''+w=0$, заключаем: расстояние между двумя последовательными нулями всякого решения уравнения Бесселя больше π при $n>{}^1/_2$ и меньше π при $0\leqslant n<{}^1/_2$. С другой стороны, замечая, что при достаточно большом x выражение $1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}$ может быть сделано сколь угодно близким к единице, находим: при достаточно больших значениях x расстояние между последовательными нулями решений уравнения Бесселя как угодно близко к π.

Пример 24. Уравнение $y''+xy=0$ при $x>0$. Возьмём любое малое число $\alpha>0$. Если взять $x>\frac{\pi^2}{\alpha^2}$, то коэффициент при y будет $>\frac{\pi^2}{\alpha^2}$; сравнивая с уравнением $z''+\frac{\pi^2}{\alpha^2}z=0$, находим, что при рассматриваемых значениях x нули решений нашего уравнения находятся на расстоянии $<\pi:\frac{\pi}{\alpha}=\alpha$. Таким образом, при неограниченном возрастании x последовательные нули всякого решения неограниченно сближаются.

Мы видим, что если на неограниченном интервале $x>a$ нижняя граница функции $Q(x)$ равна некоторому положительному числу, то решения уравнения (40) имеют нули более частые, чем некоторая синусоида, т. е. каждое решение имеет бесчисленное множество нулей. Рассмотрим теперь случай, когда $Q(x)$, оставаясь положительным, стремится к нулю при $x\to\infty$. За уравнение сравнения возьмём уравнение Эйлера (для $x>0$):

$$y''+\frac{a^2}{x^2}y=0. \tag{53}$$

Его решения имеют вид x^k, где k есть корень уравнения $k(k-1)+a^2=0$. Решаем это уравнение:

$$k=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-a^2}.$$

Если $a^2 > \frac{1}{4}$, то корни k_1 и k_2 — комплексные; решения

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \cos\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x\right), \qquad y_2 = x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}} \ln x\right)$$

имеют бесчисленное множество нулей в интервале $(1, \infty)$.

Если $a^2 < \frac{1}{4}$, мы имеем решения неколеблющиеся:

$$y_1 = x^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}}, \quad y_2 = x^{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a^2}};$$

точно так же, если $a^2 = \frac{1}{4}$, то

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}, \quad y_2 = x^{\frac{1}{2}} \ln x.$$

Сравнивая с уравнением (53) уравнения вида (40), можем сказать: *если, начиная с некоторого x, постоянно имеем $0 < Q(x) \leqslant \frac{1}{4x^2}$, то решение уравнения* (40) *не может иметь бесконечного числа нулей; если, начиная с некоторого значения x, имеем $Q(x) > \frac{1+\alpha}{4x^2}$, где $\alpha > 0$, то решение уравнения* (40) *имеет бесчисленное множество нулей* (теорема Кнезера).

Так, уравнение $y'' + \frac{A}{x^3} y = 0$ не может иметь решений с бесконечным числом нулей на интервале $(1, \infty)$.

Заметим, что все приведённые условия являются только достаточными для существования колеблющихся или неколеблющихся решений; они не дают ответа на вопрос о колебаниях, если функция $Q(x)$ меняет знак или если её нижняя граница на интервале (a, ∞) равна нулю, а верхняя положительна.

4. Теорема Шпета. Если в уравнении (40) $Q(x) \equiv 0$, то оно имеет фундаментальную систему решений $1, x$; теорема Шпета утверждает, что если $Q(x)$ достаточно быстро стремится к 0 при $x \to \infty$, то, независимо от знака Q, фундаментальная система соответствующего уравнения при больших значениях x мало отличается от $1, x$. Введём обозначение: если при $x \to \infty$ отношение $\frac{f(x)}{x^\alpha}$ остаётся ограниченным, мы будем писать $f(x) = O(x^\alpha)$.

Теорема. *Если $Q(x) = O\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right)$, где $k > 0$ $(0 \leqslant x < \infty)$, то уравнение* (40) *обладает такой фундаментальной системой y_1, y_2, что $y_1(x) - 1 = O\left(\frac{1}{x^k}\right)$; $y_2(x) - x = O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right)$ при $k \neq 1$, и $y_2(x) - x = O(\ln x)$ при $k = 1$.*

Для доказательства рассмотрим более общее уравнение, содержащее параметр λ,

$$y'' = \lambda Q(x) y, \tag{54}$$

которое обращается в заданное при $\lambda = -1$. Пусть $Q(x)$ определено для $0 \leqslant x < \infty$. Ищем решение уравнения (54) в виде ряда по степеням λ:

$$y = y^{(0)} + \lambda y^{(1)} + \ldots + \lambda^n y^{(n)} + \ldots \tag{55}$$

Сначала построим y_1; положим $y_1^{(0)} = 1$; подставляя выражение (55) в уравнение (54) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим рекуррентные уравнения для определения $y_1^{(n)}$:

$$y_1^{(1)''} = Q(x), \quad y_1^{(n)''} = Q(x)\, y^{(n-1)}, \quad n = 2, 3, \ldots;$$

$$y_1(x) = 1 + \lambda y_1^{(1)} + \ldots + \lambda^n y_1^{(n)} + \ldots \tag{55$_1$}$$

Функции $y_1^{(n)}$ последовательно найдутся квадратурами, которые мы возьмём в виде:

$$y_1^{(1)} = \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\, dt; \quad y_1^{(n)} = \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\, y_1^{(n-1)}(t)\, dt, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{56}$$

Докажем, что несобственные интегралы в формулах (56) сходятся, и оценим $|y_1^{(n)}|$.

Из условия $Q(x) = O\left(\frac{1}{x^{k+2}}\right)$ следует существование такой положительной постоянной A, что при $0 \leqslant x < \infty$ имеет место неравенство:

$$|Q(x)| < \frac{A}{(1+x)^{k+2}}.$$

Отсюда находим:

$$|y_1^{(1)}| < \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty \frac{A\, dt}{(1+t)^{k+2}} = A \int_x^\infty \frac{d\xi}{(k+1)(1+\xi)^{k+1}} = \frac{A}{k(k+1)} \frac{1}{(1+x)^k};$$

$$|y_1^{(2)}| < \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty \frac{A}{(1+t)^{k+2}} \frac{A}{k(k+1)} \frac{1}{(1+t)^k}\, dt = \frac{A^2}{k(k+1)\, 2k(2k+1)} \frac{1}{(1+x)^{2k}}.$$

Полной индукцией легко доказывается оценка:

$$|y_1^{(n)}| < \frac{A^n}{k(k+1)\, 2k(2k+1) \ldots nk(nk+1)} \frac{1}{(1+x)^{nk}}.$$

Из этих оценок следует, что ряд (55_1) сходится абсолютно и равномерно для $0 \leqslant x < \infty$ при любом λ (в частности при $\lambda = -1$) и представляет решение уравнения (54).

Наконец, из неравенства

$$|y_1 - 1| < \frac{|\lambda| A}{k(k+1)} \frac{1}{(1+x)^k} \left\{ 1 + \frac{|\lambda| A}{2k(2k+1)} \frac{1}{(1+x)^k} + \right.$$
$$\left. + \frac{|\lambda|^2 A^2}{2k(2k+1)\, 3k(3k+1)} \frac{1}{(1+x)^{2k}} + \cdots \right\},$$

где в фигурных скобках стоит сходящийся ряд, сумма которого стремится к 1 при $x \to \infty$, получаем:

$$y_1(x) - 1 = O\left(\frac{1}{x^k}\right).$$

Для решения $y_1(x)$ теорема доказана.

Далее строим $y_2(x)$; полагаем в ряде (55) $y_2^{(0)} = x$; для определения $y_2^{(n)}$ имеем уравнения:

$$y_2^{(1)''} = Q(x)\,x, \qquad y_2^{(n)''} = Q(x)\,y_2^{(n-1)}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

$$y_2(x) = x + \lambda y_2^{(1)} + \ldots + \lambda^n y_2^{(n)} + \ldots \tag{55$_2$}$$

Если $k > 1$, то попрежнему берём квадратуры с бесконечными верхними пределами:

$$y_2^{(1)} = \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\,t\,dt, \quad y_2^{(n)} = \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\,y_2^{(n-1)}(t)\,dt, \quad n = 2, 3, \ldots \tag{56'}$$

Несобственные интегралы сходятся, и мы будем иметь оценки для $|y_2^{(n)}|$ при $0 \leqslant x < \infty$:

$$|y_2^{(1)}| < \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty \frac{A}{(1+t)^{k+2}}(1+t)\,dt = \frac{A}{k(k-1)}\frac{1}{(1+x)^{k-1}};$$

$$|y_2^{(n)}| < \frac{A^n}{k(k-1)\,2k(2k-1)\ldots nk(nk-1)}\frac{1}{(1+x)^{nk-1}}.$$

Ряд из правых частей сходится абсолютно и равномерно, и мы имеем аналогично предыдущему:

$$y_2(x) - x = O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right).$$

В этом случае теорема доказана полностью.

Пусть, наконец, $0 < k \leqslant 1$; найдётся такое натуральное m, что $mk \leqslant 1$, $(m+1)k > 1$. Тогда берём квадратуры следующим образом:

$$y_2^{(1)} = -\int_0^x d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\,t\,dt,$$

$$y_2^{(l)} = -\int_0^x d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\,y_2^{(l-1)}(t)\,dt, \qquad l = 2, 3, \ldots, m;$$

$$y_2^{(m+n)} = \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty Q(t)\,y_2^{(m+n-1)}(t)\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Теперь мы имеем оценки; если $mk < 1$:

$$\left.\begin{aligned}
&|y_2^{(1)}| < \int_{-1}^x d\xi \int_\xi^\infty \frac{A(1+t)}{(1+t)^{k+2}}\,dt = \int_{-1}^x \frac{A}{k}\frac{dt}{(1+t)^k} = \frac{A}{k(1-k)}(1+x)^{1-k};\\
&|y_2^{(2)}| < \int_{-1}^x d\xi \int_\xi^\infty \frac{A(1+t)^{1-k}}{k(1-k)}\cdot\frac{A}{(1+t)^{k+2}} =\\
&\qquad\qquad = \frac{A^2}{k(1-k)\,2k(1-2k)}(1+x)^{1-2k};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&|y_2^{(m)}| < \frac{A^m}{k(1-k)\ldots mk(1-mk)}(1+x)^{1-mk} = B(1+x)^{1-mk},
\end{aligned}\right\} \tag{57}$$

а если $mk = 1$, то

$$\left|y_2^{(m)}\right| < \frac{Am}{k(1-k)\ldots mk} \ln(1+x) = B' \ln(1+x). \tag{57'}$$

Мы можем обе оценки свести к одной. Выбираем положительное число $\delta < k$ и замечаем, что $\ln(1+x) < \frac{1}{\delta}(1+x)^{\delta}$ при $0 \leqslant x < \infty$; таким образом, вместо (57) и (57′) можем написать одно неравенство:

$$\left|y_2^{(m)}\right| < B(1+x)^{\delta}, \qquad B > 0, \qquad 0 < \delta < k.$$

Далее находим:

$$\left|y_2^{(m+1)}\right| < B \int_x^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{\infty} \frac{A}{(1+t)^{k-\delta+2}} dt = \frac{BA}{(k-\delta)(k-\delta+1)} \frac{1}{(1+x)^{x-\delta}};$$

$$\left|y_2^{(m+n)}\right| < \frac{BA^{n+1}}{(k-\delta)(k-\delta+1)(2k-\delta)\ldots(nk-\delta+1)} \frac{1}{(1+x)^{nk-\delta}}, \; n = 2, 3, \ldots$$

Легко доказывается равномерная сходимость для $0 \leqslant x < \infty$ ряда из правых частей неравенств, начиная с индекса $m+1$, причём порядок $y_2(x) - x$ равен порядку члена $y_2^{(1)}$, т. е. он равен $O(x^{1-k}) = O\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right)$, если $k \neq 1$, и равен $O(\ln x)$ для $k = 1$, в силу оценки (57′) при $m = 1$.

Теорема доказана полностью.

Пример 25. Линейное уравнение $y'' + x^{-4}y = 0$ принадлежит к рассматриваемому типу, здесь $m = 2$. Подстановкой $y = e^{-\int z\,dx}$, $\frac{y'}{y} = -z$ оно приводится к уравнению Риккати $z' = z^2 + z^{-4}$; решение этого последнего (см. задачу 44) есть $z = \frac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right) - \frac{1}{x}$. Итак, $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{x} + C\right)$; $y = Ax\sin\left(\frac{1}{x} + C\right) = C_1 x \sin\frac{1}{x} + C_2 x \cos\frac{1}{x}$.

Фундаментальная система:

$$y_1 = x\sin\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{5!}\frac{1}{x^4} - \ldots = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$y_2 = x\cos\frac{1}{x} = x - \frac{1}{2!}\frac{1}{x} + \frac{1}{4!}\frac{1}{x^3} - \ldots = x + O\left(\frac{1}{x}\right).$$