ГЛАВА VII.

СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

§ 1. Нормальная форма системы дифференциальных уравнений.

1. Задача интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем случае ставится так: дано k уравнений

$$F_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(m_2)}; \ldots; y_k, y_k', \ldots, y_k^{(m_k)}) = 0 \quad (1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

связывающих независимое переменное x, k искомых функций $y_1, y_2, \ldots, y_k$ и их производные до порядков, соответственно, $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Требуется определить искомые функции. Заметим, что всегда предполагается, что число уравнений равно числу неизвестных функций [1]). Теория уравнений, заданных в общем виде (1), приводит к рассмотрению ряда случаев; мы рассмотрим лишь важнейший случай и потому сразу введём ограничение: мы предположим, что система (1) может быть разрешена относительно старших производных всех входящих в неё функций, т. е. относительно $y_1^{(m_1)}, y_2^{(m_2)}, \ldots, y_k^{(m_k)}$; при выполнении этого допущения система (1) в разрешённом виде будет:

$$\left.\begin{aligned}
y_1^{(m_1)} &= f_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}),\\
y_2^{(m_2)} &= f_2(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_k^{(m_k)} &= f_k(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \ldots, y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_k, \ldots, y_k^{(m_k-1)}).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Система вида (2) называется *канонической*.

---

[1]) Системы дифференциальных уравнений, в которых число уравнений меньше числа искомых функций, называются уравнениями Монжа. В этом курсе мы встретимся с уравнением Монжа и его частным видом — уравнением Пфаффа — в главе IX.

Каноническую систему из k уравнений высших порядков можно заменить эквивалентною ей системою $n = m_1 + m_2 \ldots + m_k$ уравнений первого порядка, разрешённых относительно производных всех n искомых функций. Для этого вводим новую систему искомых функций, числом $n - k$, следующим образом: обозначим для симметрии $y_1 = y_{10}$ и введём новые функции:

$$y_1' = y_{11},\ y_1'' = y_{12}, \ldots,\ y_1^{(m_1-1)} = y_{1,\,m_1-1}.$$

Далее, аналогично:

$$y_2 = y_{20},\ y_2' = y_{21},\ y_2'' = y_{22}, \ldots,\ y_2^{(m_2-1)} = y_{2,\,m_2-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_k = y_{k0},\ y_k' = y_{k1},\ y_k'' = y_{k2}, \ldots,\ y_k^{(m_k-1)} = y_{k,\,m_k-1}.$$

Мы имеем всего $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ функций y_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, k$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m_i - 1$); для них система (2) заменится следующею, ей эквивалентною:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_{10}}{dx} = y_{11},\quad \frac{dy_{11}}{dx} = y_{12}, \ldots,\quad \frac{dy_{1,\,m_1-2}}{dx} = y_{1,\,m_1-1},\\
&\frac{dy_{1,\,m_1-1}}{dx} = f_1(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,\,m_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,\,m_k-1}),\\
&\frac{dy_{20}}{dx} = y_{21},\quad \frac{dy_{21}}{dx} = y_{22}, \ldots,\quad \frac{dy_{2,\,m_2-2}}{dx} = y_{2,\,m_2-1},\\
&\frac{dy_{2,\,m_2-1}}{dx} = f_2(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,\,m_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,\,m_k-1}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{dy_{k0}}{dx} = y_{k1},\quad \frac{dy_{k1}}{dx} = y_{k2}, \ldots,\quad \frac{dy_{k,\,m_k-2}}{dx} = y_{k,\,m_k-1},\\
&\frac{dy_{k,\,m_k-1}}{dx} = f_k(x, y_{10}, y_{11}, \ldots, y_{1,\,m_1-1}, \ldots, y_{k0}, \ldots, y_{k,\,m_k-1}).
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Каждая (например i-я) из k групп уравнений (3) содержит $m_i - 1$ уравнений, которые непосредственно следуют из определения функций y_{ij}, и последнее уравнение, которое получается из i-го уравнения системы (2), если в его правой части входящие в него производные заменить вновь введёнными функциями. Заменяя, в силу первых уравнений первой строки системы (3), последовательно y_{11} через $\frac{dy_1}{dx}$, y_{12} через $\frac{dy_{11}}{dx} = \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{dy_{1,\,m_1-1}}{dx} = \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}}$ и аналогично для других групп и внося эти значения в последние уравнения каждой группы, мы, очевидно, возвращаемся к системе (2). Отвлекаясь

от частного вида первых уравнений каждой группы системы (3) и от разделения уравнений этой системы на группы, мы пронумеруем искомые функции в виде одного простого ряда:

$$y_1, y_2, \ldots, y_n,$$

и будем рассматривать вместо системы (3) следующую:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Система n уравнений первого порядка вида (4), т. е. разрешённых относительно входящих в систему производных от искомых функций, называется системой, имеющей *нормальную форму Коши*. Такими системами мы будем преимущественно заниматься в дальнейшем. Очевидно, что система (3), как частный случай системы (4), имеет также нормальную форму.

Примечание. Частным случаем канонической системы является одно уравнение n-го порядка, разрешённое относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Мы уже видели (глава IV), что введением новых функций:

$$y_1 = y', \; y_2 = y'', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}$$

оно заменится следующей системой n уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \quad \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

2. Можно утверждать и обратно, что, вообще говоря, нормальная система n уравнений первого порядка (4) эквивалентна одному уравнению порядка n.

В самом деле, дифференцируем первое из уравнений (4) по x:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx};$$

заменяем в результате $\frac{dy_i}{dx}$ через их выражения $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$; получим:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n,$$

т. е. выражение вида:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{4_2}$$

Полученное уравнение (4_2) снова дифференцируем по x; принимая во внимание уравнения (4), получим:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} f_n,$$

или

$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{4_3}$$

Продолжая этот же процесс, получим далее:

$$\frac{d^4y_1}{dx^4} = F_4(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{4_4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{4_{n-1}}$$

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \tag{4_n}$$

Из системы (A) $n-1$ уравнений, составленной из первого уравнения группы (4) и из (4_2), (4_3), ..., (4_{n-1}), можно, вообще говоря, определить $n-1$ величин $y_2, y_3, \ldots, y_n$ через $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$; внося эти выражения в (4_n), мы получим уравнение вида:

$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right), \tag{5}$$

т. е. одно уравнение n-го порядка. Из самого способа его получения следует, что если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ представляют решение системы (4), то y_1 удовлетворяет уравнению (5). Обратно, если мы имеем решение $y_1(x)$ уравнения (5), то, дифференцируя это решение, мы вычислим $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$. Вставим эти значения, как известные функции от x, в систему (A); мы, по предположению, можем разрешить эту систему относительно $y_2, y_3, \ldots, y_n$, т. е. получить выражения $y_2, y_3, \ldots, y_n$ как функции от x. Остаётся доказать, что функции

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

удовлетворяют системе (4).

В самом деле, условие разрешимости системы (A) относительно $y_2, y_3, \ldots, y_n$ состоит в том, что якобиан $\frac{D(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \ldots, y_n)}$ отличен от нуля при рассматриваемых значениях $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

В наших предположениях функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ обращают в тождества все уравнения системы (A); в частности, имеем тождество $\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Дифференцируя это тождество по x, получаем: $\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$, но, в силу (4_2), имеем тождественно:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} f_n.$$

Вычитая одно тождество из другого, находим:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1\right) + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_1\right) + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n\right) = 0.$$

Аналогично, дифференцируя тождество (4_2) по x и вычитая из полученного результата тождество (4_3), получим:

$$\frac{\partial F_2}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1\right) + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_2\right) + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n\right) = 0$$

и т. д., наконец,

$$\frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1}\left(\frac{dy_1}{dx} - f_1\right) + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_2}\left(\frac{dy_2}{dx} - f_2\right) + \ldots + \frac{\partial F_{n-1}}{dy_n}\left(\frac{dy_n}{dx} - f_n\right) = 0.$$

Замечая, что, в силу тождества $\frac{dy_1}{dx} = f_1$, первые члены всех равенств исчезают, и рассматривая оставшиеся равенства как систему $n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными $\frac{dy_i}{dx} - f_i$, $i = 2, 3, \ldots, n$, заключаем, так как, по условию, определитель системы не равен нулю, что имеют место тождества $\frac{dy_2}{dx} = f_2, \ldots, \frac{dy_n}{dx} = f_n$, т. е. $y_1(x), y_2(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$ действительно суть решения системы (4).

Таким образом, при сделанных допущениях *интеграция одного уравнения n-го порядка* (5) *даёт возможность путём дифференцирований и разрешений найти решение системы* (4).

Примечание. Последнее доказательство содержало предположение о разрешимости системы уравнений (A) относительно y_2, $y_3, \ldots, y_n$. Если это условие не выполнено, то указанные выкладки не приводят к одному уравнению n-го порядка, эквивалентному системе (4). Простейший случай этого рода представляет система:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2).$$

Здесь невозможно заменить систему эквивалентным ей уравнением второго порядка относительно y_1; если f_2 действительно зависит от y_1, то можно зато составить уравнение второго порядка относительно y_2, эквивалентное этой системе.

Если же второе уравнение имеет вид:

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_2),$$

то нельзя составить также уравнения второго порядка относительно y_2, эквивалентного данной системе.

Пример 1. $\frac{dy}{dx} = z$, $\frac{dz}{dx} = -y$. Дифференцируем первое уравнение: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$; используя второе, находим: $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, откуда $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$; далее, из первого уравнения

$$z = \frac{dy}{dx} = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

ЗАДАЧИ.

Привести следующие системы к одному уравнению высшего порядка и таким образом найти их общие решения:

175. $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = z$, $\frac{dz}{dt} = x$.

176. $\frac{dy}{dx} = y + z$, $\frac{dz}{dx} = y + z + x$.

177. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}y$.

178. $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y - x}$.

3. В главе IV проведено доказательство теоремы существования решений для канонической системы дифференциальных уравнений первого порядка: если правые части уравнений (4) непрерывны в некоторой области, заключающей точку $(x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ и удовлетворяют в этой области условиям Липшица по $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то существует одно и только одно решение системы (4), определённое в некотором замкнутом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ и удовлетворяющее начальным условиям: при $x = x_0$

$$y_1 = y_1^0, \; y_2 = y_2^0, \ldots, \; y_n = y_n^0.$$

Замечая, что общая каноническая система (2) путём введения вспомогательных функций приводится к системе (4), мы можем непосредственно получить теорему существования для системы (2):

Если правые части уравнений (2) *непрерывны в некоторой окрестности начальных значений* x_0, $(y_i^{(j)})_0$ *и удовлетворяют в этой окрестности условиям Липшица по* $y_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\; j = 1, 2, \ldots, m_i - 1)$, *то существует единственная система функций* $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_k(x)$, *определённая в интервале* $(x_0 - h, x_0 + h)$ *и удовлетворяющая начальным условиям:*

$$y_i(x_0) = (y_i)_0, \; y_i'(x_0) = (y_i')_0, \ldots, \; y_i^{(m_i - 1)}(x_0) = (y_i^{(m_i - 1)})_0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

В дальнейшем мы всегда будем рассматривать системы уравнений первого порядка.

Мы имели геометрическую интерпретацию решений системы (4): мы называли их кривыми в $(n+1)$-мерном пространстве $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Теорема существования и единственности получила такое истолкование: *через каждую точку рассматриваемой области $(n+1)$-мерного пространства проходит единственная интегральная кривая.*

4. Можно дать ещё одну интерпретацию системы дифференциальных уравнений первого порядка, особенно важную для приложений к механике и физике. Будем обозначать независимое переменное буквой t и рассматривать его как время; искомые функции обозначим буквами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причём систему значений этих переменных будем рассматривать как координаты точки n-мерного пространства, которое обычно называют *фазовым пространством* R^n.

Система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Мы скажем, что *система* (6) *определяет в каждый момент времени t в данной точке фазового пространства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ компоненты скорости $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ движущейся точки*[1]. Можно представить всю рассматриваемую область пространства R^n заполненной непрерывной движущейся средой, причём скорости частиц этой среды в каждый момент заданы уравнениями (6).

Задача нахождения решения системы (6) состоит в определении величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в функции t, если дано, что при $t = t_0$ координаты имеют начальные значения $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$. В нашей интерпретации это значит: *найти функции*

$$x_1 = \varphi_1(t; t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t; t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0), \tag{7}$$

дающие для любого момента времени t положение движущейся точки, которая в начальный момент t_0 занимала начальное положение $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$).

---

[1]) Для обеспечения существования и единственности решения системы (6) мы предполагаем все функции X_i в рассматриваемой ограниченной и замкнутой области пространства R^n для рассматриваемого промежутка времени (обычно от $-\infty$ до $+\infty$) непрерывными и удовлетворяющими условиям Липшица по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Обычно при такой интерпретации система (6) называется *динамической системой*, а каждое её решение (7) — *движением*. Кривая, описываемая точкой при движении, называется *траекторией движения*. Уравнения траектории движения, определённого начальными значениями $(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, даются в параметрической форме теми же уравнениями (7), причём параметром является время t.

Общее решение системы (6) зависит от n произвольных постоянных, например от начальных значений координат $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ при $t = t_0$, и, следовательно, определяет ∞^n траекторий.

Наибольший интерес представляет частный случай системы (6), когда правые части не зависят явно от t:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \quad (6')$$

Уравнения (6′) определяют *стационарное движение* среды; скорость в каждой точке пространства не зависит от времени и, следовательно, является постоянной в этой точке в течение всего времени. Общее решение уравнения опять зависит от n произвольных постоянных $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ — координат начального положения точки, траектория которой рассматривается. Мы опять имеем ∞^n движений. Но заметим, что уравнения (6′) не изменяются, если заменить независимое переменное t через $t + \tau$ (τ — постоянное).

Пусть решение системы (6′), соответствующее начальным данным $t = 0$, $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, $\ldots$, $x_n = x_n^0$, будет:

$$x_1 = \varphi_1(t; x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, x_n = \varphi_n(t; x_1^0, \ldots, x_n^0). \quad (7')$$

В силу последнего замечания, решением будет также система функций:

$$x_1 = \varphi_1(t + \tau; x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, x_n = \varphi_n(t + \tau; x_1^0, \ldots, x_n^0), \quad (7'')$$

где τ — произвольное постоянное. Уравнения (7″) представляют ту же траекторию, что и уравнения (7′), но при $\tau \neq 0$ они представляют, вообще, другое движение; в самом деле, в движении (7″) начальное положение (при $t = 0$) движущейся точки определяется координатами:

$$x_1^{(1)} = \varphi_1(\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, x_n^{(1)} = \varphi_n(\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0); \quad (7''')$$

эта точка лежит на траектории (7′), но проходится в движении (7′) не в момент $t = 0$, а в момент $t = \tau$. Движение (7″) может быть также записано в форме (7′) с начальными данными $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$:

$$x_1 = \varphi_1(t; x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}), \ldots, x_n = \varphi_n(t; x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}). \quad (7^{\mathrm{IV}})$$

Итак, в случае стационарного движения на каждой траектории совершается ∞^1 движений; все частицы, лежащие в начальный

момент на данной траектории, описывают одну и ту же линию в фазовом пространстве, следуя по этой линии одна за другой. Подсчитаем, от скольких параметров зависит в стационарном случае семейство траекторий, рассматриваемых как кривые n-мерного пространства. Предполагая, что в некоторой области функция $X_n(x_1, \ldots, x_n)$ не обращается в нуль, мы можем в системе (6′) принять за независимое переменное x_n и заменить эту систему следующей:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n}; \quad \frac{dt}{dx_n} = \frac{1}{X_n}. \qquad (6'')$$

Система первых $n-1$ дифференциальных уравнений (6″) определяет те же кривые, что система (6′); время в эту систему вовсе не входит. Из предыдущего следует, что эта система $n-1$ уравнений определяет семейство кривых, зависящее от $n-1$ параметров, причём через каждую точку рассматриваемой области фазового пространства проходит одна кривая семейства. *Таким образом, в случае стационарного движения семейство траекторий зависит от $n-1$ параметров.* Эти траектории часто называются *линиями тока.*

После того как система $n-1$ первых уравнений (6″) проинтегрирована, для полной характеристики движения нужно ещё определить связь между координатами и временем. Для этого берём последнее уравнение системы (6″): $dt = \frac{dx_n}{X_n}$; заменяя в выражении X_n величины $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ найденными функциями от x_n, получаем выражение вида:

$$dt = \psi(x_n, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})\, dx_n,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ — постоянные, вошедшие при интеграции системы $n-1$ первых уравнений; отсюда

$$t + \tau = \int_{x_n^0}^{x_n} \psi\, dx_n = \Psi(x_n, C_1, \ldots, C_{n-1})$$

(τ — постоянное интеграции). Из полученного уравнения можно определить, обратно, x_n через $t+\tau$, так как

$$\frac{d\Psi}{dx_n} = \psi(x_n) = \frac{1}{X_n} \neq 0;$$

получаем:

$$x_n = \varphi_n(t + \tau).$$

Отсюда и остальные координаты, найденные в функции x_n, могут быть выражены через время; мы получим выражение всех движений в виде:

$$x_i = \varphi_i(t + \tau, C_1, \ldots, C_{n-1}) \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

семейство движений зависит, таким образом, от n параметров:

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{n-1},\ \tau.$$

Рассмотрим, с точки зрения этой интерпретации, движение материальной точки в одном измерении; уравнение движения имеет в общем случае вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right)$$

(сила зависит от времени, положения и скорости точки). Преобразуем это уравнение в систему; вводя вторую искомую функцию $y=\frac{dx}{dt}$, получаем систему:

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=f(t,\ x,\ y).$$

Каждая траектория этой системы на фазовой плоскости xOy будет показывать в любой момент t положение точки (абсцисса x) и её скорость (ордината y). Семейство траекторий зависит от двух параметров: из каждой точки $(x_0,\ y_0)$ в момент t_0 выходит одна траектория.

Если же сила не зависит от времени, то система имеет вид:

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=f(x,\ y).$$

Чтобы определить траектории в этом случае, можно исключить dt; получаем: уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx}=\frac{f(x,y)}{y}$. Семейство траекторий зависит от одного параметра, через каждую точку фазовой плоскости xOy, в которой функция f определена и где числитель и знаменатель одновременно не обращаются в нуль, проходит единственная траектория.

Пример 2. Уравнение упругих колебаний в одном измерении имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-a^2x;$$

переходя к системе, получаем:

$$\frac{dx}{dt}=y;\quad \frac{dy}{dt}=-a^2x.$$

Общее решение исходного уравнения можно написать в виде $x=A\sin a(t+C)$; по самому определению функции y имеем: $y=aA\cos a(t+C)$, где A и C — произвольные постоянные. Семейство траекторий в фазовой плоскости мы получим, если исключим t; будем иметь:

$$x^2+\frac{y^2}{a^2}=A^2.$$

Это — семейство подобных эллипсов с полуосями A и aA, зависящих от одного параметра A; на каждой траектории происходит ∞-движений, которые мы получим все по одному разу, давая C, например, следующие значения:

$$0 \leqslant C < \frac{2\pi}{a}.$$

Система дифференциальных уравнений вида (6′) обладает ещё одним замечательным свойством: *она определяет однопараметрическую группу преобразований пространства* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В самом деле, на равенства (7′), дающие решение системы (6′), можно смотреть как на формулы, определяющие преобразование, при котором точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ переходит в точку $(x_1, \ldots, x_n)$. Эти формулы определяют семейство преобразований, непрерывно зависящее от параметра t. Значению $t=0$ соответствует тождественное преобразование. Покажем, что преобразования (7′) образуют группу. Если к точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ применить преобразование, соответствующее значению τ параметра t, то преобразованная точка $(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ будет дана формулами (7‴); если затем к точке $(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ применить преобразование, соответствующее параметру t, то мы получим точку $(x_1, \ldots, x_n)$, определяемую формулами (7^{IV}); но она же даётся формулами (7″). Итак, два последовательных преобразования, соответствующих значениям параметра τ и t, эквивалентны одному преобразованию со значением параметра $t+\tau$:

$$\varphi_i(t; \varphi_1(\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, \varphi_n(\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0)) \equiv \varphi_i(t+\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

а эти равенства и выражают свойство группы. Легко видеть, что эта группа коммутативна: тот же результат получится, если сначала произвести преобразование t, а затем τ. Преобразование (7′) допускает обратное преобразование, соответствующее значению параметра $-t$. Все эти рассуждения справедливы для достаточно малых значений $|t|$, для которых существует решение (7′) системы (6′).

§ 2. Системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Теорема существования. Линейными дифференциальными уравнениями мы называем уравнения, в которые производные от искомых функций и сами эти функции входят линейно.

Мы будем рассматривать нормальные системы линейных уравнений. Такая система имеет вид ($y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые