Это — семейство подобных эллипсов с полуосями A и aA, зависящих от одного параметра A; на каждой траектории происходит ∞-движений, которые мы получим все по одному разу, давая C, например, следующие значения:

$$0 \leqslant C < \frac{2\pi}{a}.$$

Система дифференциальных уравнений вида (6′) обладает ещё одним замечательным свойством: *она определяет однопараметрическую группу преобразований пространства* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В самом деле, на равенства (7′), дающие решение системы (6′), можно смотреть как на формулы, определяющие преобразование, при котором точка $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ переходит в точку $(x_1, \ldots, x_n)$. Эти формулы определяют семейство преобразований, непрерывно зависящее от параметра t. Значению $t=0$ соответствует тождественное преобразование. Покажем, что преобразования (7′) образуют группу. Если к точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ применить преобразование, соответствующее значению τ параметра t, то преобразованная точка $(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ будет дана формулами (7‴); если затем к точке $(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ применить преобразование, соответствующее параметру t, то мы получим точку $(x_1, \ldots, x_n)$, определяемую формулами (7^{IV}); но она же даётся формулами (7″). Итак, два последовательных преобразования, соответствующих значениям параметра τ и t, эквивалентны одному преобразованию со значением параметра $t+\tau$:

$$\varphi_i(t; \varphi_1(\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0), \ldots, \varphi_n(\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0)) \equiv \varphi_i(t+\tau; x_1^0, \ldots, x_n^0),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

а эти равенства и выражают свойство группы. Легко видеть, что эта группа коммутативна: тот же результат получится, если сначала произвести преобразование t, а затем τ. Преобразование (7′) допускает обратное преобразование, соответствующее значению параметра $-t$. Все эти рассуждения справедливы для достаточно малых значений $|t|$, для которых существует решение (7′) системы (6′).

§ 2. Системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Теорема существования. Линейными дифференциальными уравнениями мы называем уравнения, в которые производные от искомых функций и сами эти функции входят линейно.

Мы будем рассматривать нормальные системы линейных уравнений. Такая система имеет вид ($y_1, y_2, \ldots, y_n$ — искомые

функции, x — независимое переменное):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=V_1, \\ \dfrac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=V_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=V_n, \end{array}\right\} \tag{8}$$

где a_{ik} и правые части V_i суть данные непрерывные функции от x. Если не все $V_i(x)$ тождественно равны нулю, линейная система называется неоднородной; если правые части V_i равны тождественно нулю, то линейная система однородна; она имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=0, \\ \dfrac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Если системы (8) и (9) имеют одни и те же коэффициенты, то однородная система (9) называется соответствующей неоднородной системе (8).

Пусть функции a_{ik} и V_i непрерывны (следовательно, ограничены) *на некотором замкнутом отрезке S, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$* (если эти функции непрерывны при всех значениях x, то можно взять за x_1 отрицательное число, сколь угодно большое по абсолютной величине, а в качестве x_2 сколь угодно большое положительное число).

Пусть K — верхняя граница абсолютных величин V_i и a_{ik} на S:

$$|a_{ik}| \leqslant K \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\ |V_i| \leqslant K\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Разрешая уравнения (9) относительно производных, мы видим, что правые части непрерывны при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и при любых значениях $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (но не остаются ограниченными при неограниченном возрастании этих последних переменных). Далее, условия Липшица выполняются при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ и при любых $y_1, y_2, \ldots, y_n$, так как частные производные по y_i суть коэффициенты a_{ik}, которые не зависят от $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и, по предположению, все ограничены на S. Доказанная в главе IV теорема существования позволяет утверждать, что система (8) [и (9), как её частный случай] имеет единственное решение $y_1(x), y_2(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$, принимающее при $x=x_0$, где $x_1 < x_0 < x_2$, любые

начальные значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$. Это решение определено в некотором замкнутом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$, концы которого, однако, a priori могут не достигать концов отрезка $[x_1, x_2]$.

Мы можем уточнить теорему существования для линейной системы: *решение, определяемое начальными данными* $(x_0, y_1^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)})$, *существует во всём отрезке* S, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ *непрерывности коэффициентов и правых частей; последовательные приближения равномерно сходятся также во всём этом отрезке.*

Припомним, что ограничение $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ в обозначениях главы IV имело своей главной целью гарантировать, что ни одно приближение не выйдет из границ $(y_i^{(0)} - b, y_i^{(0)} + b)$; в рассмотренном случае эта предосторожность является излишней, так как область определения и непрерывности относительно всех y_i простирается от $-\infty$ до $+\infty$. Могло бы составить затруднение лишь то обстоятельство, что мы заранее не знаем, как сильно возрастут m-ые последовательные приближения $y_i^{(m)}(x)$ при изменении x во всём отрезке S, и, следовательно, мы не можем ограничить абсолютные величины правых частей уравнений, разрешённых относительно производных, числом M, которое входило в оценки (8_1), (8_2), ..., (8_m) главы IV. Поэтому при доказательстве уточнённой теоремы существования для линейных уравнений надо слегка изменить рассуждение.

Обозначим через L верхнюю грань абсолютных величин начальных значений:

$$|y_i^{(0)}| \leqslant L \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Последовательные приближения определяем так же, как и в главе IV. Пусть x изменяется в отрезке $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$. Мы будем иметь:

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^{(0)} - \int_{x_0}^{x} (a_{i1}y_1^{(0)} + a_{i2}y_2^{(0)} + \ldots + a_{in}y_n^{(0)} - V_i)\,dx$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда

$$|y_i^{(1)}(x) - y_i^{(0)}| \leqslant (nKL + K)\int_{x_0}^{x} dx = K(nL + 1)(x - x_0) \qquad (10_1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

для любого значения x, $x_0 \leqslant x \leqslant x_2$. Далее,

$$y_i^{(2)} = y_i^{(0)} - \int_{x_0}^{x} (a_{i1}y_1^{(1)} + a_{i2}y_2^{(1)} + \ldots + a_{in}y_n^{(1)} - V_i)\,dx$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Оценим абсолютную величину $y_i^{(2)}-y_i^{(1)}$:

$$|y_i^{(2)}-y_i^{(1)}|=\left|\int_{x_0}^{x}[a_{i1}(y_1^{(1)}-y_1^{(0)})+\ldots+a_{in}(y_n^{(1)}-y_n^{(0)})]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x_0}^{x}\{|a_{i1}|\cdot|y_1^{(1)}-y_1^{(0)}|+\ldots+|a_{in}|\cdot|y_n^{(1)}-y_n^{(0)}|\}\,dx.$$

Замечая, что $|a_{ik}|\leqslant K$, и заменяя под интегралом $|y_i^{(1)}-y_i^{(0)}|$ их оценками (10_1), получаем:

$$|y_i^{(2)}-y_i^{(1)}|\leqslant nKK(nL+1)\int_{x_0}^{x}(x-x_0)\,dx=nKK(Ln+1)\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}\quad(10_2)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Далее, имеем подобным же образом при $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$:

$$|y_i^{(3)}-y_i^{(2)}|=$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x}[a_{i1}(y_1^{(2)}-y_1^{(1)})+a_{i2}(y_2^{(2)}-y_2^{(1)})+\ldots+a_{in}(y_n^{(2)}-y_n^{(1)})]\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{x_0}^{x}\{|a_{i1}|\cdot|y_1^{(2)}-y_1^{(1)}|+\ldots+|a_{in}|\cdot|y_n^{(2)}-y_n^{(1)}|\}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant(nK)^2K(nL+1)\int_{x_0}^{x}\frac{(x-x_0)^2}{1\cdot 2}\,dx=(nK)^2K(nL+1)\frac{(x-x_0)^3}{3!}.\quad(10_3)$$

Методом полной индукции легко докажем такую оценку:

$$|y_i^{(m)}-y_i^{(m-1)}|\leqslant(nK)^{m-1}K(nL+1)\frac{(x-x_0)^m}{m!}.\qquad(10_m)$$

Итак, все члены рядов

$$y_i^{(0)}+(y_i^{(1)}-y_i^{(0)})+(y_i^{(2)}-y_i^{(1)})+\ldots+(y_i^{(m)}-y_i^{(m-1)})+\ldots\qquad(11)$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

начиная со второго, меньше по абсолютной величине, чем члены сходящегося ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{K(nL+1)}{nK} \frac{[nK(x_2-x_0)]^m}{m!}$$

с постоянными положительными членами (мы заменили $x-x_0$ его наибольшим значением x_2-x_0). Следовательно, ряды (11) сходятся равномерно на интервале (x_0, x_2) и представляют непрерывные функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. То, что эти функции удовлетворяют системе уравнений (8) и являются единственными решениями этой системы, доказывается так же, как в главе IV, § 1, 2. Аналогичные рассуждения устанавливают существование решения в отрезке $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Примечание 1. Если коэффициенты a_{ij} и правые части V_i непрерывны в открытом интервале (a, b) (где может быть $a=-\infty$, $b=+\infty$), то приведённое рассуждение доказывает существование и единственность решения системы (8) в любом замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$, лежащем внутри (a, b). Беря последовательность замкнутых интервалов $[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \ldots, [\alpha_n, \beta_n], \ldots$, из которых каждый последующий заключает предыдущий, причём $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = b$, мы определим решение в любом из этих интервалов $[\alpha_n, \beta_n]$, следовательно, в силу единственности решения, и в их сумме, т. е. во всём открытом интервале (a, b). Очевидно, функции, представляющие решение, будут непрерывными и удовлетворяющими системе (8) во всём интервале (a, b); в любом замкнутом интервале $[\alpha, \beta]$, содержащемся в (a, b), эти функции являются равномерно непрерывными, а последовательные приближения $y_i^{(m)}(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — равномерно сходящимися при $m \to \infty$.

Примечание 2. Линейное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = V(x)$$

эквивалентно нормальной системе линейных уравнений специального вида:

$$\frac{dy}{dx} - y_1 = 0, \quad \frac{dy_1}{dx} - y_2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dy_{n-2}}{dx} - y_{n-1} = 0,$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \ldots + a_{n-1} y_1 + a_n y = V(x).$$

Применяя доказанную теорему, мы получаем следующий результат: *линейное уравнение n-го порядка с коэффициентом при старшей производной, равным единице, имеет непрерывные и n раз дифференцируемые решения во всём открытом интервале, в котором коэффициенты и правая часть уравнения непрерывны.*

2. Линейные однородные системы. Такая система имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=0, \\ \dfrac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=0. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Мы предполагаем, что коэффициенты a_{ik} непрерывны в интервале $a<x<b$.

Пусть частным решением системы (9) является система функций $y_1^{(1)}(x)$, $y_2^{(1)}(x)$, ..., $y_n^{(1)}(x)$, так что по подстановке в уравнения (9) эти функции обращают их в тождества. Легко видеть, что в таком случае *система функций* $Cy_1^{(1)}$, $Cy_2^{(1)}$, ..., $Cy_n^{(1)}$ *также является решением системы* (9). Далее, *если* $y_1^{(1)}$, $y_2^{(1)}$, ..., $y_n^{(1)}$ *и* $y_1^{(2)}$, $y_2^{(2)}$, ..., $y_n^{(2)}$ *суть два частных решения, то* $y_1^{(1)}+y_1^{(2)}$, $y_2^{(1)}+y_2^{(2)}$, ..., $y_n^{(1)}+y_n^{(2)}$ *также является решением системы* (9).

Пусть мы имеем n частных решений:

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(1)},\ y_2^{(1)},\ \ldots,\ y_n^{(1)}, \\ y_1^{(2)},\ y_2^{(2)},\ \ldots,\ y_n^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n)},\ y_2^{(n)},\ \ldots,\ y_n^{(n)}. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Назовём систему решений (12) *фундаментальной, если определитель*

$$D=\begin{vmatrix} y_1^{(1)}\,y_2^{(1)}\ldots y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)}\,y_2^{(2)}\ldots y_n^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ y_1^{(n)}\,y_2^{(n)}\ldots y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{12'}$$

не равен тождественно нулю в интервале (a, b). *Фундаментальные системы существуют*: достаточно взять n^2 чисел $b_i^{(k)}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$ таких, чтобы их определитель D_0 был не равен нулю; затем определим n частных решений $y_1^{(k)}(x)$, $y_2^{(k)}(x)$, ..., $y_n^{(k)}(x)$, принимающих при $x=x_0$ (где x_0 — некоторая точка интервала $a<x<b$) начальные значения $y_1^{(k)}(x_0)=b_1^{(k)}$, $y_2^{(k)}(x_0)=b_2^{(k)}$, ..., $y_n^{(k)}(x_0)=b_n^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Тогда, в силу непрерывности функций y_i^k, определитель D

будет отличен от нуля также в некотором интервале, окружающем точку x_0. Мы можем доказать больше.

ТЕОРЕМА. *Если $D(x_0) \neq 0$, то $D(x)$ не обращается в 0 ни в какой точке интервала (a, b).*

Для доказательства вычислим производную $D'(x)$; дифференцируем по столбцам:

$$D'(x) = \begin{vmatrix} \frac{dy_1^{(1)}}{dx} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ \frac{dy_1^{(2)}}{dx} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dy_1^{(n)}}{dx} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & \frac{dy_2^{(1)}}{dx} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & \frac{dy_2^{(2)}}{dx} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & \frac{dy_2^{(n)}}{dx} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & \frac{dy_n^{(1)}}{dx} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & \frac{dy_n^{(2)}}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & \frac{dy_n^{(n)}}{dx} \end{vmatrix}.$$

Заменив в каждом определителе в правой части производные $\frac{dy_i^{(k)}}{dx}$ их выражениями из уравнений (9), мы получим, например, для первого слагаемого:

$$-a_{11} \begin{vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} y_2^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_2^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_2^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} - \dots$$

$$\dots - a_{1n} \begin{vmatrix} y_n^{(1)} & y_2^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} \\ y_n^{(2)} & y_2^{(2)} & \dots & y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = -a_{11} D(x),$$

так как все определители, кроме первого, имеют по два равных столбца. Аналогично, второе слагаемое даёт $-a_{22}D(x)$, ..., n-е сла-

гаемое даёт $-a_{nn}D(x)$. Итак, имеем:

$$D'(x) = -(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn})D(x),$$

или

$$\frac{D'}{D} = -(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}),$$

откуда

$$D(x) = D_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x}(a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn})\,dx}.$$

Следовательно, если $D_0 \neq 0$, то $D(x) \neq 0$ во всём интервале, где коэффициенты a_{ii} (а следовательно, и решения) непрерывны, т. е. в интервале (a, b).

ТЕОРЕМА. *Если $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ образуют фундаментальную систему частных решений системы* (9), *то общее решение будет*:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \ldots + C_n y_1^{(n)}, \\ y_2 &= C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \ldots + C_n y_2^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Из сказанного в начале этого раздела следует, что формулы (13) представляют решение системы. Чтобы доказать, что это решение общее, нужно показать, что постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ можно определить так, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ будут при $x = x_0$ удовлетворять начальным условиям:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_n^{(0)},$$

где $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ — любые числа. Подставляя эти условия в выражения (13), мы получим для определения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ систему n линейных алгебраических уравнений:

$$C_1 y_i^{(1)}(x_0) + C_2 y_i^{(2)}(x_0) + \ldots + C_n y_i^{(n)}(x_0) = y_i^{(0)} \ (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (14)$$

Так как, по доказанному, $D(x_0) \neq 0$, то система (14) имеет определённую систему решений $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Подставляя в формулы (13) найденные значения произвольных постоянных, мы и получим искомое частное решение. Теорема доказана.

Примечание 1. Мы определили фундаментальную систему (12) по формальному признаку — необращению в нуль определителя $D(x)$.

Естественно ввести определение линейной независимости системы функций: *систему функций вида* (12) *мы назовём линейно независимой, если*

не существует такой системы постоянных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (которые не все равны нулю), *что имели бы место в интервале* (a, b) n *тождеств*:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 y_1^{(1)} + \alpha_2 y_1^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_1^{(n)} = 0, \\ \alpha_1 y_2^{(1)} + \alpha_2 y_2^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_2^{(n)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 y_n^{(1)} + \alpha_2 y_n^{(2)} + \ldots + \alpha_n y_n^{(n)} = 0. \end{array}\right\} \tag{15}$$

В противном случае система функций (12) называется *линейно зависимой*.

Покажем, что *для n функций, дающих решение системы линейных дифференциальных уравнений, понятия фундаментальной системы и линейно независимой системы совпадают*. В самом деле, если система (12) линейно зависима, то, рассматривая равенства (15) как n алгебраических уравнений с n неизвестными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, мы находим, что так как не все α_i тождественно равны нулю, то определитель этой системы равен нулю, притом для всякого значения x, т. е. $D(x) \equiv 0$. Обратно, если система решений (12) дифференциальных уравнений линейно независима, т. е. тождества (15) невозможны при постоянных α_i, которые не все равны нулю, то $D(x)$ не обращается в нуль ни при каком значении x. Допустим, в самом деле, что $D(x_0) = 0$, $a < x_0 < b$. Тогда система (15), если в функции $y_i^{(k)}(x)$ подставить значение $x = x_0$, имеет систему решений $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n$, которые не все равны нулю. Найдя эту систему, составим функции:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{y}_1 = \bar{\alpha}_1 y_1^{(1)} + \bar{\alpha}_2 y_1^{(2)} + \ldots + \bar{\alpha}_n y_1^{(n)}, \\ \bar{y}_2 = \bar{\alpha}_1 y_2^{(1)} + \bar{\alpha}_2 y_2^{(2)} + \ldots + \bar{\alpha}_n y_2^{(n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{y}_n = \bar{\alpha}_1 y_n^{(1)} + \bar{\alpha}_2 y_n^{(2)} + \ldots + \bar{\alpha}_n y_n^{(n)}. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Эти функции дают решение системы дифференциальных уравнений, так как они составлены из линейных комбинаций частных решений. Далее, эти функции, согласно определению величин α_i, удовлетворяют начальным условиям: $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \ldots = \bar{y}_n = 0$ при $x = x_0$.

В силу теоремы единственности, система (9) имеет только одно решение, удовлетворяющее данным начальным условиям; но очевидное (тривиальное) решение $y_1 \equiv 0, y_2 \equiv 0, \ldots, y_n \equiv 0$ удовлетворяет начальным условиям — обращению в нуль всех функций при $x = x_0$; следовательно, решение $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ совпадает с тривиальным, и равенства (16) дают:

$$\begin{array}{l} \bar{\alpha}_1 y_1^{(1)} + \bar{\alpha}_2 y_1^{(2)} + \ldots + \bar{\alpha}_n y_1^{(n)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{\alpha}_1 y_n^{(1)} + \bar{\alpha}_2 y_n^{(2)} + \ldots + \bar{\alpha}_n y_n^{(n)} = 0 \end{array}$$

тождественно для всякого x в интервале (a, b). Таким образом, мы получили линейную зависимость для системы (12), против предположения. Следовательно, $D(x) \neq 0$ ни для какого значения x в интервале (a, b).

Примечание 2. Задача построения системы линейных уравнений, имеющей заданную систему решений

$$y_1^{(k)},\ y_2^{(k)},\ \ldots,\ y_n^{(k)} \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n), \tag{12}$$

разрешается следующими формулами:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_i}{dx} & \frac{dy_i^{(1)}}{dx} & \frac{dy_i^{(2)}}{dx} & \ldots & \frac{dy_i^{(n)}}{dx} \\ y_1 & y_1^{(1)} & y_1^{(2)} & \ldots & y_1^{(n)} \\ y_2 & y_2^{(1)} & y_2^{(2)} & \ldots & y_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n & y_n^{(1)} & y_n^{(2)} & \ldots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Заметим, что коэффициентом при производных $\frac{dy_i}{dx}$ является $D(x)$, определённый формулой (12′); если $D(x)$ не обращается в нуль в интервале $(a,\ b)$, то, деля на $D(x)$, получаем линейную систему уравнений в нормальной форме.

Пример 3. Найти линейную однородную систему второго порядка[1]), допускающую следующую систему решений:

$$y_1^{(1)} = e^x \cos x, \quad y_2^{(1)} = e^x \sin x;$$
$$y_1^{(2)} = -\sin x, \quad y_2^{(2)} = \cos x.$$

Искомые уравнения будут:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_1}{dx} & e^x(\cos x - \sin x) & -\cos x \\ y_1 & e^x \cos x & -\sin x \\ y_2 & e^x \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_2}{dx} & e^x(\sin x + \cos x) & -\sin x \\ y_1 & e^x \cos x & -\sin x \\ y_2 & e^x \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 0,$$

или, развёртывая определители по первому столбцу и деля оба уравнения на $D(x) = e^x$, получаем искомую систему:

$$\frac{dy_1}{dx} - \cos^2 x \cdot y_1 + (1 - \sin x \cdot \cos x)\, y_2 = 0,$$
$$\frac{dy_2}{dx} - (1 + \sin x \cdot \cos x)\, y_1 - \sin^2 x \cdot y_2 = 0.$$

---

[1]) Система n дифференциальных уравнений первого порядка называется системой n-го порядка, так как она может быть заменена одним уравнением n-го порядка.

3. Неоднородные системы линейных уравнений. Рассмотрим неоднородную систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=V_1,\\
&\frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=V_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=V_n.
\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

ТЕОРЕМА 1. *Если известно частное решение неоднородной системы $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, ..., $Y_n(x)$, то нахождение общего решения этой системы приводится к решению соответствующей однородной системы* (9).

В самом деле, введём новые искомые функции z_i соотношениями:

$$y_1=Y_1+z_1,\quad y_2=Y_2+z_2,\ \ldots,\ y_n=Y_n+z_n.$$

Внеся эти выражения в уравнения (8) и принимая во внимание тождества

$$\frac{dY_i}{dx}+a_{i1}Y_1+a_{i2}Y_2+\ldots+a_{in}Y_n=V_i\qquad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

мы получим для новых функций z_1 систему

$$\frac{dz_i}{dx}+a_{i1}z_1+a_{i2}z_2+\ldots+a_{in}z_n=0\qquad(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n).\qquad(9')$$

Теорема доказана.

Следствие. Общее решение системы (8) имеет вид:

$$\begin{aligned}
y_1&=C_1y_1^{(1)}+C_2y_1^{(2)}+\ldots+C_ny_1^{(n)}+Y_1,\\
y_2&=C_1y_2^{(1)}+C_2y_2^{(2)}+\ldots+C_ny_2^{(n)}+Y_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n&=C_1y_n^{(1)}+C_2y_n^{(2)}+\ldots+C_ny_n^{(n)}+Y_n,
\end{aligned}$$

где Y_1, Y_2, ..., Y_n — какое-нибудь частное решение неоднородной системы (8), а

$$y_1^{(1)},\ y_2^{(1)},\ \ldots,\ y_n^{(1)};\quad y_1^{(2)},\ y_2^{(2)},\ \ldots,\ y_n^{(2)};\ \ldots;\ y_1^{(n)},\ y_2^{(n)},\ \ldots,\ y_n^{(n)}\qquad(12)$$

суть n независимых частных решений соответствующей однородной системы (9); C_1, C_2, ..., C_n — произвольные постоянные. Доказа-

тельство аналогично доказательству соответствующей теоремы для линейного уравнения n-го порядка (см. главу V, § 3, 1).

ТЕОРЕМА 2. *Если известна фундаментальная система соответствующей однородной линейной системы, то решение неоднородной системы сводится к квадратурам.*

Если нам известны решения (12) системы (9), то её общее решение имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \ldots + C_n y_1^{(n)}, \\ y_2 &= C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \ldots + C_n y_2^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — постоянные. Формулы (13) с постоянными C_i, очевидно, не дают решения неоднородной системы (8). Применим, как и в случае одного линейного уравнения, метод вариации постоянных. Будем рассматривать C_i как неизвестные функции от x, причём подберём их таким образом, чтобы выражения (13) являлись решениями неоднородной системы (систему уравнений (13) можно рассматривать как систему, вводящую n новых искомых функций от x: $C_1, C_2, \ldots, C_n$; в силу линейности преобразования, новые уравнения для C_i тоже будут линейными).

Дифференцируем равенства (13) по x:

$$\frac{dy_i}{dx} = C_1 \frac{dy_i^{(1)}}{dx} + C_2 \frac{dy_i^{(2)}}{dx} + \ldots + C_n \frac{dy_i^{(n)}}{dx} + \\ + y_i^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + y_i^{(2)} \frac{dC_2}{dx} + \ldots + y_i^{(n)} \frac{dC_n}{dx} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Подставим выражения (17) и (13) в уравнения (8). Первые строки правых частей формул (17) имеют такой вид, как если бы C_i были постоянными; так как $y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, \ldots, y_i^{(n)}$ представляют решения однородной системы, то при подстановке эти члены дадут нули; в самом деле, результат подстановки в i-е уравнение даёт:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \frac{dy_i^{(k)}}{dx} + \sum_{k=1}^{n} y_i^{(k)} \frac{dC_k}{dx} + a_{i1} \sum_{k=1}^{n} C_k y_1^{(k)} + \\ + a_{i2} \sum_{k=1}^{n} C_k y_2^{(k)} + \ldots + a_{in} \sum_{k=1}^{n} C_k y_n^{(k)} = V_i,$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} C_k \left(\frac{dy_i^{(k)}}{dx} + a_{i1} y_1^{(k)} + \ldots + a_{in} y_n^{(k)} \right) + y_i^{(1)} \frac{dC_1}{dx} + \ldots + y_i^{(n)} \frac{dC_n}{dx} = V_i,$$

и для определения $C_1, C_2, \ldots, C_n$ остаются уравнения:

$$y_1^{(1)}\frac{dC_1}{dx}+y_1^{(2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_1^{(n)}\frac{dC_n}{dx}=V_1,$$
$$y_2^{(1)}\frac{dC_1}{dx}+y_2^{(2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_2^{(n)}\frac{dC_n}{dx}=V_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n^{(1)}\frac{dC_1}{dx}+y_n^{(2)}\frac{dC_2}{dx}+\ldots+y_n^{(n)}\frac{dC_n}{dx}=V_n.$$

Полученная система линейных уравнений относительно $\frac{dC_1}{dx},\ldots,\frac{dC_n}{dx}$ разрешима, так как определитель системы $D(x)\neq 0$, в силу предположения, что система n решений (12) является фундаментальной; мы получаем:

$$\frac{dC_1}{dx}=\frac{D_{11}V_1+D_{21}V_2+\ldots+D_{n1}V_n}{D(x)}\equiv\varphi_1(x),$$
$$\frac{dC_2}{dx}=\frac{D_{12}V_1+D_{22}V_2+\ldots+D_{n2}V_n}{D(x)}\equiv\varphi_2(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dC_n}{dx}=\frac{D_{1n}V_1+D_{2n}V_2+\ldots+D_{nn}V_n}{D(x)}\equiv\varphi_n(x),$$

где через $D_{ik}(i,\ k=1,\ 2,\ldots,\ n)$ обозначен минор определителя D, соответствующий элементу $y_i^{(k)}$. Так как $\varphi_i(x)$ являются известными функциями, то C_i получатся квадратурами:

$$C_i=\int\varphi_i(x)\,dx+\gamma_i\quad(i=1,\ 2,\ldots,\ n)$$

(γ_i — постоянные интеграции).

Подставляя найденные значения C_i в формулы (13), получаем общее решение системы (8) в виде:

$$y_1=\gamma_1y_1^{(1)}+\gamma_2y_1^{(2)}+\ldots+\gamma_ny_1^{(n)}+Y_1$$
$$y_2=\gamma_1y_2^{(1)}+\gamma_2y_2^{(2)}+\ldots+\gamma_ny_2^{(n)}+Y_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n=\gamma_1y_n^{(1)}+\gamma_2y_n^{(2)}+\ldots+\gamma_ny_n^{(n)}+Y_n,$$

где частное решение неоднородной системы $Y_1,\ Y_2\ldots,\ Y_n$ определено формулами:

$$Y_i(x)=y_i^{(1)}\int\varphi_1(x)\,dx+y_i^{(2)}\int\varphi_2(x)\,dx+\ldots+y_i^{(n)}\int\varphi_n(x)\,dx=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}y_i^{(k)}\int\frac{\sum\limits_{l=1}^{n}D_{lk}V_l}{D}\,dx.$$

Пример 4. $\frac{dy}{dx}-z=\cos x$, $\frac{dz}{dx}+y=1$. В примере 1 мы нашли решение соответствующей однородной системы: $y=C_1\cos x+C_2\sin x$, $z=-C_1\sin x+C_2\cos x$. Подставляем эти значения в данные уравнения, считая C_1 и C_2 неизвестными функциями x. После приведения получим такую систему:

$$\frac{dC_1}{dx}\cos x+\frac{dC_2}{dx}\sin x=\cos x,\qquad -\frac{dC_1}{dx}\sin x+\frac{dC_2}{dx}\cos x=1,$$

откуда, разрешая относительно $\frac{dC_1}{dx}$ и $\frac{dC_2}{dx}$ и затем интегрируя, находим:

$$\frac{dC_1}{dx}=\cos^2 x-\sin x,\qquad C_1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x\cos x+\cos x+\gamma_1,$$

$$\frac{dC_2}{dx}=\sin x\cos x+\cos x,\qquad C_2=-\frac{1}{2}\cos^2 x+\sin x+\gamma_2$$

(γ_1 и γ_2 — произвольные постоянные).

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в выражения для y и z, получаем общее решение заданной неоднородной системы:

$$y=\gamma_1\cos x+\gamma_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x+1,$$

$$z=-\gamma_1\sin x+\gamma_2\cos x-\frac{x}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x.$$

4. Линейные системы с постоянными коэффициентами. Рассмотрим однородную линейную систему:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dy_1}{dx}+a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=0,\\ \frac{dy_2}{dx}+a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dy_n}{dx}+a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=0,\end{array}\right\}. \tag{18}$$

в которой будем предполагать коэффициенты a_{ik} постоянными. Если систему (18) привести к одному уравнению высшего порядка, то, как легко видеть, получится линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому естественно искать решения системы (18) в виде показательных функций. Будем искать частное решение в таком виде:

$$y_1=\gamma_1e^{\lambda x},\quad y_2=\gamma_2e^{\lambda x},\ldots,\ y_n=\gamma_ne^{\lambda x}, \tag{19}$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и λ — постоянные, которые нужно определить так, чтобы выражения (19) удовлетворяли системе (18). Подставляя в систему (18) значения (19), сокращая на $e^{\lambda x}$ и собирая коэффициенты при $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, получим систему алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}+\lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}+\lambda)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}+\lambda)\gamma_n = 0. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Рассматривая (20) как систему n линейных однородных уравнений относительно $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, мы замечаем, что для получения нетривиального решения (19) мы должны потребовать равенства нулю определителя системы (20), т. е. мы приходим к уравнению:

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Наряду с определителем $\Delta(\lambda)$ нам в дальнейшем придётся часто рассматривать матрицу $M(\lambda)$, составленную из тех же элементов:

$$M(\lambda) \equiv \begin{Vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}+\lambda \end{Vmatrix}. \tag{21'}$$

Придавая переменному λ значение λ_0, мы получим матрицу $M(\lambda_0)$.

Уравнение (21) есть уравнение n-й степени относительно λ; мы будем называть его *характеристическим уравнением*. Итак, решение вида (19) системы (18) может существовать только в том случае, когда λ есть корень характеристического уравнения. Могут представиться два случая.

1) Все n корней характеристического уравнения различны. Пусть эти корни будут $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Если один из этих корней λ_j подставить в $\Delta(\lambda)$, то мы получим $\Delta(\lambda_j) = 0$. Покажем, что по крайней мере один из миноров $(n-1)$-го порядка определителя $\Delta(\lambda)$ отличен от нуля при $\lambda = \lambda_j$. В самом деле, так как λ_j есть простой

корень уравнения (21), то $\left[\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_j} = \Delta'(\lambda_j) \neq 0$. Вычисляем $\Delta'(\lambda)$:

$$\Delta'(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{22}+\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33}+\lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33}+\lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} + \dots$$

$$\dots + \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \dots & a_{2,\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2} & \dots & a_{n-1,\,n-1}+\lambda \end{vmatrix}$$

(в правой части стоит сумма диагональных миноров $(n-1)$-го порядка).

Подставляя вместо λ значение λ_j и вспоминая, что $\Delta'(\lambda_j) \neq 0$, мы получаем в результате, что по крайней мере один из входящих в последнюю сумму диагональных миноров $(n-1)$-го порядка не равен нулю при $\lambda = \lambda_j$. Наше утверждение доказано.

Возвращаемся к системе (20), в которой вместо λ подставим λ_j — один из корней характеристического уравнения. Определитель системы равен нулю; следовательно, система имеет отличные от нуля решения $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \dots, \gamma_n^{(j)}$. Но, по доказанному, ранг матрицы $\boldsymbol{M}(\lambda_j)$ коэффициентов системы (20) равен $n-1$; следовательно, неизвестные $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \dots, \gamma_n^{(j)}$ определяются с точностью до произвольного множителя пропорциональности (в качестве $\gamma_1^{(j)}, \gamma_2^{(j)}, \dots, \gamma_n^{(j)}$ можно взять миноры любой строки определителя $\Delta(\lambda_j)$, для которой они не все равны нулю).

Итак, мы получим (обозначая этот множитель через C_j):

$$\gamma_1^{(j)} = C_j k_1^{(j)}, \quad \gamma_2^{(j)} = C_j k_2^{(j)}, \quad \dots, \quad \gamma_n^{(j)} = C_j k_n^{(j)},$$

где $k_i^{(j)}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ суть известные числа. Итак, корню $\lambda = \lambda_j$ соответствует частное решение системы (18) (мы полагаем $C_j = 1$):

$$y_1^{(j)} = k_1^{(j)} e^{\lambda_j x}, \quad y_2^{(j)} = k_2^{(j)} e^{\lambda_j x}, \quad \dots, \quad y_n^{(j)} = k_n^{(j)} e^{\lambda_j x}. \tag{22}$$

Ясно значение множителя C_j: мы знаем, что если систему частных решений помножить на одно и то же произвольное постоянное, то получаем опять решение системы однородных линейных уравнений. Применяя приведённые рассуждения ко всем корням $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения, мы получим n частных решений вида (22) для $j = 1, 2, \ldots, n$.

После этого мы можем написать полное решение системы (18) в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)} + \ldots + C_n y_1^{(n)}, \\ y_2 &= C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)} + \ldots + C_n y_2^{(n)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= C_1 y_n^{(1)} + C_2 y_n^{(2)} + \ldots + C_n y_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Примечание 1. Если коэффициенты уравнения действительны, а некоторые корни характеристического уравнения окажутся мнимыми, то они будут входить попарно сопряжёнными, например:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i.$$

Соответствующие решения будут иметь вид:

$$y_j^{(1)} = k_j^{(1)} e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad y_j^{(2)} = k_j^{(2)} e^{(\alpha-\beta i)x} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Коэффициенты $k_j^{(1)}$ и $k_j^{(2)}$ тоже окажутся комплексными сопряжёнными, если взять их равными минорам одной и той же строки определителей $\Delta(\alpha + \beta i)$ и $\Delta(\alpha - \beta i)$. Легко убедиться в том, что корням $\lambda = \alpha \pm \beta i$ будут соответствовать две системы решений, соответствующих действительной и мнимой части $y_j^{(1)}$ и $y_j^{(2)}$, вида:

$$\tilde{y}_j^{(1)} = e^{\alpha x}(l_j^{(1)} \cos \beta x - l_j^{(2)} \sin \beta x), \qquad \tilde{y}_j^{(2)} = e^{\alpha x}(l_j^{(1)} \sin \beta x + l_j^{(2)} \cos \beta x),$$

где $l_j^{(1)}$ и $l_j^{(2)}$ — действительные числа, определяемые из равенств $k_j^{(1)} = l_j^{(1)} + i l_j^{(2)}$, $k_j^{(2)} = l_j^{(1)} - i l_j^{(2)}$.

Пример 5. $\frac{dy}{dx} + 7y - z = 0$, $\frac{dz}{dx} + 2y + 5z = 0$. Ищем решение в виде $y = \gamma_1 e^{\lambda x}$, $z = \gamma_2 e^{\lambda x}$; подставляя в заданную систему, получаем уравнения:

$$\gamma_1(\lambda + 7) - \gamma_2 = 0, \quad 2\gamma_1 + (\lambda + 5)\gamma_2 = 0.$$

Условие их совместности даёт характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 7 & -1 \\ 2 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 + 12\lambda + 37 = 0.$$

Корни характеристического уравнения суть: $\lambda_1 = -6+i$, $\lambda_2 = -6-i$. Подставляя первый из этих корней в систему для определения γ_1 и γ_2, получаем два уравнения:

$$\gamma_1(1+i)-\gamma_2=0, \quad 2\gamma_1+(-1+i)\gamma_2=0,$$

из которых одно является следствием другого. Мы можем взять $k_1^{(1)}=1$, $k_2^{(1)}=1+i$. Первая система частных решений есть

$$y_1^{(1)}=e^{(-6+i)x}, \quad y_2^{(1)}=(1+i)e^{(-6+i)x}.$$

Аналогично, подставляя корень $\lambda_2=-6-i$, найдём вторую систему частных решений:

$$y_1^{(2)}=e^{(-6-i)x}, \quad y_2^{(2)}=(1-i)e^{(-6-i)x}.$$

Беря в качестве новой фундаментальной системы решения

$$\tilde{y}_i^{(1)}=\frac{y_i^{(1)}+y_i^{(2)}}{2}, \quad \tilde{y}_i^{(2)}=\frac{y_i^{(1)}-y_i^{(2)}}{2i} \quad (i=1,\ 2),$$

находим:

$$\tilde{y}_1^{(1)}=e^{-6x}\cos x, \quad \tilde{y}_1^{(2)}=e^{-6x}\sin x;$$

$$\tilde{y}_2^{(1)}=e^{-6x}(\cos x-\sin x), \quad \tilde{y}_2^{(2)}=e^{-6x}(\cos x+\sin x).$$

Общим решением будет:

$$y_1=e^{-6x}(C_1\cos x+C_2\sin x),$$

$$y_2=e^{-6x}[(C_1+C_2)\cos x+(C_2-C_1)\sin x].$$

Примечание 2. Полученные нами n решений (22) являются линейно независимыми. В самом деле, рассмотрим таблицу (12). В нашем случае $y_i^{(j)}=k_i^{(j)}e^{\lambda_j x}$. Допустим, что в силу определения линейной зависимости, выполняются соотношения (15), причём не все $\alpha_j=0$. С другой стороны, в каждой строке системы, например j-й, найдётся коэффициент $k_i^{(j)}\neq 0$, иначе j-е частное решение было бы тривиальным.

В силу допущения, мы имеем:

$$\alpha_1 k_i^{(1)}e^{\lambda_1 x}+\alpha_2 k_i^{(2)}e^{\lambda_2 x}+\ldots+\alpha_j k_i^{(j)}e^{\lambda_j x}+\ldots+\alpha_n k_i^{(n)}e^{\lambda_n x}=0.$$

Так как, по доказанному в главе VI, функции $e^{\lambda_j x}$ линейно независимы ($j=1, 2, \ldots, n$), то все коэффициенты в последнем соотношении равны нулю, в частности $\alpha_j k_i^{(j)}=0$.

В силу условия, не все $k_i^{(j)}$ ($i=1, 2, \ldots, n$) равны нулю; следовательно $\alpha_j=0$.

Это рассуждение применимо ко всем значениям $j=1, 2, \ldots, n$; таким образом, все α_j равны нулю. Полученное противоречие доказывает линейную независимость решений (22).

2) Среди корней уравнения (21) есть кратные. Пусть λ_1 есть m-кратный корень характеристического уравнения. В таком случае значение m-й производной от $\Delta(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_1$ $\Delta^{(m)}(\lambda_1)\neq 0$, и рассуждение, аналогичное предыдущему, показывает, что среди миноров порядка $n-m$ определителя $\Delta(\lambda)$ по крайней мере один отличен от нуля при $\lambda=\lambda_1$. Отсюда следует, что для ранга r матрицы $\boldsymbol{M}(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_1$ имеет место неравенство $r\geqslant n-m$. Система линейных алгебраических уравнений (20) сводится к r независимым уравнениям. Из теории линейных уравнений известно, что в этом случае в общем решении системы (20) $n-r$ неизвестных остаются произвольными; пусть это будут $\gamma_1=C_1$, $\gamma_2=C_2$, ..., $\gamma_{n-r}=C_{n-r}$; остальные r неизвестных γ_{n-r+1}, γ_{n-r+2}, ..., γ_n выразятся в виде линейных форм относительно C_1, C_2, ..., C_{n-r}; пусть эти выражения будут:

$$\gamma_j=k_j^{(1)}C_1+k_j^{(2)}C_2+\ldots+k_j^{(n-r)}C_{n-r}$$

$$(j=n-r+1,\ n-r+2,\ \ldots,\ n).$$

Мы получим такую систему решений, зависящую от $n-r$ произвольных постоянных C_1, C_2, ..., C_{n-r}:

$$y_1=C_1e^{\lambda_1x},\ y_2=C_2e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ y_{n-r}=C_{n-r}e^{\lambda_1x},$$

$$y_{n-r+1}=(k_{n-r+1}^{(1)}C_1+k_{n-r+1}^{(2)}C_2+\ldots+k_{n-r+1}^{(n-r)}C_{n-r})e^{\lambda_1x},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_n=(k_n^{(1)}C_1+k_n^{(2)}C_2+\ldots+k_n^{(n-r)}C_{n-r})\,e^{\lambda_1x}.$$

Таким образом, одному корню $\lambda=\lambda_1$ кратности m соответствует $n-r\leqslant m$ частных решений, которые мы получаем, полагая $C_i=1$ для $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-r$, а все прочие C_j равными нулю ($C_j=0$ при $j\neq i$):

$$\left.\begin{array}{l}
y_1^{(1)}=e^{\lambda_1x},\ y_2^{(1)}=0,\ \ldots,\ y_{n-r}^{(1)}=0,\\
\qquad\qquad y_{n-r+1}^{(1)}=k_{n-r+1}^{(1)}e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ y_n^{(1)}=k_n^{(1)}e^{\lambda_1x},\\
y_1^{(2)}=0,\ y_2^{(2)}=e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ y_{n-r}^{(2)}=0,\\
\qquad\qquad y_{n-r+1}^{(2)}=k_{n-r+1}^{(2)}e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ y_n^{(2)}=k_n^{(2)}e^{\lambda_1x},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_1^{(n-r)}=0,\ y_2^{(n-r)}=0,\ \ldots,\ y_{n-r}^{(n-r)}=e^{\lambda_1x},\\
\qquad\qquad y_{n-r+1}^{(n-r)}=k_{n-r+1}^{(n-r)}e^{\lambda_1x},\ \ldots,\ y_n^{(n-r)}=k_n^{(n-r)}e^{\lambda_1x}.
\end{array}\right\}\qquad(22')$$

Матрица из коэффициентов при $e^{\lambda_1 x}$ в правых частях этих равенств имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n-r+1}^{(1)} & \dots & k_n^{(1)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & k_{n-r+1}^{(2)} & \dots & k_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & k_{n-r+1}^{(n-r)} & \dots & k_n^{(n-r)} \end{Vmatrix}.$$

Её ранг, очевидно, и равен $n-r$, т. е. между строками системы (22′) нет линейной зависимости; значит, мы получили систему $n-r$ линейно независимых решений, соответствующих корню $\lambda=\lambda_1$. Если $r=n-m$, т. е. если ранг матрицы $M(\lambda)$ при $\lambda=\lambda_1$ имеет наименьшее значение, то полученное число решений равно кратности m корня λ_1, и, таким образом, получены все решения, соответствующие этому корню (если $m=1$, то $r=n-1$, $n-r=1$, и мы возвращаемся к случаю простого корня λ_1, которому соответствует одно решение системы).

Если ранг r матрицы $M(\lambda_1)$ больше $n-m$, то число $n-r$ полученных указанным способом решений будет меньше кратности m корня λ_1. Чтобы найти недостающие решения, мы должны, как в случае одного уравнения n-го порядка, искать решения в виде линейных комбинаций функций $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, ..., $x^{m-1}e^{\lambda_1 x}$.

Пример 6. $\frac{dx}{dt}=y+z$, $\frac{dy}{dt}=z+x$, $\frac{dz}{dt}=x+y$. Ищем решения в форме $x=k_1e^{\lambda t}$, $y=k_2e^{\lambda t}$, $z=k_3e^{\lambda t}$. Для определения k_1, k_2, k_3 имеем три уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda k_1-k_2-k_3&=0,\\ -k_1+\lambda k_2-k_3&=0,\\ -k_1-k_2+\lambda k_3&=0. \end{aligned}$$

Приравнивая их определитель нулю, получаем:

$$0=\begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^3-3\lambda-2.$$

Корни последнего уравнения суть $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=-1$. Простому корню $\lambda_1=2$ соответствует система двух независимых уравнений для k_1, k_2, k_3, например:

$$2k_1-k_2-k_3=0,\quad -k_1+2k_2-k_3=0,$$

откуда

$$k_1:k_2:k_3=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=1:1:1.$$

Отсюда получаем первую систему решений, содержащую одно произвольное постоянное:

$$x=C_1e^{2t},\quad y=C_1e^{2t},\quad z=C_1e^{2t}.$$

Если в матрицу $M(\lambda)$ вставить $\lambda = -1$, то её ранг окажется равным 1, и три уравнения для определения k_1, k_2, k_3 сведутся к одному:

$$k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$

Если мы положим $k_1 = C_2$, $k_2 = C_3$, то $k_3 = -(C_2 + C_3)$, и мы получим ещё систему решений с двумя произвольными постоянными.

Общим решением будет:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}, \quad y = C_1 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \quad z = C_1 e^{2t} - (C_2 + C_3) e^{-t}.$$

Мы получили фундаментальную систему решений, так как определитель

$$\begin{vmatrix} e^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & -e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Анализ всех возможных случаев, которые могут представиться для линейной системы с постоянными коэффициентами, проводится путём линейной замены зависимых переменных, которая приводит систему к канонической форме. Это приведение существенно связано с теорией элементарных делителей λ-матрицы (21′) [1].

Нам удобно теперь писать данную линейную систему в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \frac{dy_2}{dx} &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Для удобства введём ещё обозначения: $\frac{dy_i}{dx} \equiv Y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. После этого умножим уравнения (23) соответственно на систему вспомогательных переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и сложим почленно. В левой части мы получим билинейную форму переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i Y_i, \tag{24}$$

а справа — билинейную форму переменных $u_1, u_2, \ldots, u_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_i y_k. \tag{25}$$

Заметим, что матрица из коэффициентов формы (24) есть единичная матрица E, т. е. матрица, у которой диагональные элементы суть единицы, а все прочие — нули; матрица формы (25),

$$A \equiv \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix},$$

[1]) См., например, А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, гл. V, Гостехиздат, 1948.

есть матрица, составленная из коэффициентов правых частей дифференциальных уравнений (23). Таким образом, задание двух билинейных форм (24) и (25), из которых первая — с единичной матрицей, равносильно заданию системы дифференциальных уравнений (23).

Если мы, далее, подвергнем переменные y_i линейному преобразованию с постоянными коэффициентами:

$$y_i = \alpha_{i1}z_1 + \alpha_{i2}z_2 + \ldots + \alpha_{in}z_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{26}$$

то, ввиду значения переменных Y_i как производных от y_i, они подвергнутся тому же преобразованию:

$$Y_i = \alpha_{i1}Z_1 + \alpha_{i2}Z_2 + \ldots + \alpha_{in}Z_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{26'}$$

где $Z_i = \dfrac{dz_i}{dx}$.

Составим матрицу $A - \lambda E$, или, в раскрытом виде,

$$\begin{Vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{Vmatrix}. \tag{27}$$

По теореме о парах билинейных форм [1]), *две билинейные формы* (25) и (24) *эквивалентны другой паре билинейных форм* φ, ψ *тогда и только тогда, когда матрица* (27) *и матрица формы* $\varphi - \lambda\psi$ *имеют одни и те же элементарные делители* (при этом матрица ψ должна быть не особенной, т. е. её определитель $\neq 0$) [2]).

---

[1]) А. И. Мальцев, цитированная книга, п. 109.

[2]) Элементарные делители матрицы вида (27), — а мы только с такими матрицами встретимся в нашей теории, — могут быть определены следующим образом. Обозначим через $D_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ общий наибольший делитель всех определителей порядка i матрицы (27), рассматриваемых как многочлены относительно λ. Тогда доказывается, что: (А) многочлен $D_i(\lambda)$ делится на $D_{i-1}(\lambda)$ $(i \geqslant 2)$. Введём обозначения $\dfrac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)} = E_i(\lambda)$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, $E_1(\lambda) = D_1(\lambda)$ и назовём $E_i(\lambda)$ *инвариантным множителем* матрицы (27). Очевидно, $D_i(\lambda) = E_1(\lambda)E_2(\lambda)\ldots E_i(\lambda)$. Далее доказывается, что: (В) в ряде инвариантных множителей $E_1(\lambda), E_2(\lambda), \ldots, E_n(\lambda)$ каждый делится на все предыдущие. Напишем разложение инвариантных множителей на линейные факторы: $E_i(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{e_{i1}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{i2}}\ldots(\lambda-\lambda_s)^{e_{is}}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — различные корни уравнения, полученного приравниванием нулю определителя матрицы (27); очевидно, $e_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, s)$; кроме того, в силу свойства (В), $e_{ij} \leqslant e_{i'j}$, если $i < i'$. Те из двучленов

$$\begin{matrix} (\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}, & (\lambda-\lambda_1)^{e_{21}}, & \ldots, & (\lambda-\lambda_1)^{e_{n1}}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\lambda-\lambda_s)^{e_{1s}}, & (\lambda-\lambda_s)^{e_{2s}}, & \ldots, & (\lambda-\lambda_s)^{e_{ns}}, \end{matrix}$$

которые не равны постоянному (т. е. для которых $e_{ij} > 0$), называются *элементарными делителями* матрицы (27). Делители из первой строки соответствуют корню $\lambda_1, \ldots$, делители из последней соответствуют корню λ_s. Число e_{ij} называется *степенью* элементарного делителя. Для простоты в дальнейшем будем обозначать число элементарных делителей через k, а сами делители — через $(\lambda-\lambda_1)^{e_1}, \ldots, (\lambda-\lambda_k)^{e_k}$, причём среди чисел λ_i могут быть и равные.

Пусть элементарные делители матрицы (27) будут:

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{e_2},\ \ldots\ (\lambda-\lambda_k)^{e_k}, \tag{28}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — корни детерминантного уравнения матрицы (27), т. е. характеристического уравнения системы (23), может быть и равные, но соответствующие различным элементарным делителям, и

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = n.$$

В качестве матрицы формы ψ в новых переменных v_i, Z_i мы возьмём опять единичную матрицу $\boldsymbol{E}$ (очевидно, неособенную), т. е. положим:

$$\psi = v_1 Z_1 + v_2 Z_2 + \ldots + v_n Z_n. \tag{24'}$$

В качестве билинейной формы φ мы возьмём такую форму переменных v_i и z_i, чтобы матрица формы обладала теми же элементарными делителями (28), что и $\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$, но чтобы эта матрица имела нормальную форму [1])

$$\left\|\begin{array}{cccc} \boldsymbol{M}_1 & & & \\ & \boldsymbol{M}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{M}_k \end{array}\right\|, \tag{27'}$$

где вне квадратов $\boldsymbol{M}_i$ все элементы суть нули, а каждый квадрат составлен из следующих элементов [2]):

$$\underbrace{\left\|\begin{array}{cccccc} \lambda_i-\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i-\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_i-\lambda \end{array}\right\|}_{e_i \text{ столбцов}}. \tag{27''}$$

---

[1]) См. И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, § 21, Гостехиздат, 1948.

[2]) Легко убедиться, используя данное в сноске на стр. 291 определение элементарных делителей, в том, что матрица (27′) имеет требуемые элементарные делители. В самом деле, выпишем частичные матрицы $\boldsymbol{M}_i$, принимая во внимание возможные кратные корни, так что в новом обозначении матрица $\boldsymbol{M}_{ij}$ будет соответствовать корню λ_i, иметь вид (27″) и содержать по e_{ij} строк и столбцов. Заметим, что минор определителя матрицы $\boldsymbol{M}_{ij}$, соответствующий левому нижнему элементу, равен 1, а все прочие или равны нулю или содержат множитель $\lambda-\lambda_i$. Поэтому наименьшая степень, в какой $\lambda-\lambda_1$ войдёт в миноры $(n-1)$-го порядка матрицы (27), есть $(\lambda-\lambda_1)^{e_{12}+e_{13}+\ldots}$; в этой степени $\lambda-\lambda_1$ войдёт в $D_{n-1}(\lambda)$; следовательно, он войдёт в $E_1(\lambda)$ в степени $(\lambda-\lambda_1)^{e_1}$. Далее, из миноров $(n-2)$-го порядка наименьшая степень $\lambda-\lambda_1$ будет у того, который получился вычёркиванием последней строки и первого столбца у определителей матриц $\boldsymbol{M}_{11}$ и $\boldsymbol{M}_{12}$; эта степень равна $(\lambda-\lambda_1)^{e_{13}+\cdots}$, следовательно, $\boldsymbol{E}_2(\lambda)$ содержит степень двучлена $(\lambda-\lambda_1)^{e_2}$. Продолжая это рассуждение, мы получаем указанный результат.

Таким образом, форма φ имеет следующий вид:

$$\varphi \equiv \Big(\sum_{1}^{e_1} \lambda_1 v_i z_i + \sum_{2}^{e_1} v_{i-1} z_i\Big) + \Big(\sum_{e_1+1}^{e_1+e_2} \lambda_2 v_i z_i + \sum_{e_1+2}^{e_1+e_2} v_{i-1} z_i\Big) + \ldots$$

$$\ldots + \Big(\sum_{n-e_k+1}^{n} \lambda_k v_i z_i + \sum_{n-e_k+2}^{n} v_{i-1} z_i\Big). \qquad (29)$$

В силу определения эквивалентных пар матриц, существует подстановка (26), а также (26′) с определителем, отличным от нуля, и другая линейная подстановка с не равным нулю определителем, преобразующая вспомогательные переменные u_i в переменные v_i, при которых формы (24) и (25) перейдут, соответственно, в формы (24′) и (29).

Но, в силу сделанного выше замечания, две билинейные формы такого вида, как (24′) и (29), однозначно определяют систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Итак, после преобразования переменных (26) исходная система дифференциальных уравнений (23) перейдёт в следующую систему нормальной формы:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 + z_2,\\
\frac{dz_2}{dx} &= \lambda_1 z_2 + z_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz_{e_1-1}}{dx} &= \lambda_1 z_{e_1-1} + z_{e_1},\\
\frac{dz_{e_1}}{dx} &= \lambda_1 z_{e_1},
\end{aligned}\right\} \qquad (30_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_{n-e_k+1}}{dx} &= \lambda_k z_{n-e_k+1} + z_{n-e_k+2},\\
\frac{dz_{n-e_k+2}}{dx} &= \lambda_k z_{n-e_k+2} + z_{n-e_k+3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz_{n-1}}{dx} &= \lambda_k z_{n-1} + z_n,\\
\frac{dz_n}{dx} &= \lambda_k z_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (30_k)$$

Каждая из систем $(30_1), \ldots, (30_k)$ интегрируется независимо; легко дать формулы их общих решений. Так, например, если в системе (30_1) ввести новые функции $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{e_1}$, связанные с функциями $z_1, z_2, \ldots, z_{e_1}$ соотношениями

$$z_i = e^{\lambda_1 x}\zeta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, e_1),$$

то преобразованная система примет вид:

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = \zeta_2, \quad \frac{d\zeta_2}{dx} = \zeta_3, \ \ldots, \ \frac{d\zeta_{e_1-1}}{dx} = \zeta_{e_1}, \quad \frac{d\zeta_{e_1}}{dx} = 0.$$

Её интеграция даёт:

$$\zeta_{e_1} = C_1,\ \zeta_{e_1-1} = C_1 x + C_2,\ \ldots$$

$$\ldots,\ \zeta_2 = C_1 \frac{x^{e_1-2}}{(e_1-2)!} + C_2 \frac{x^{e_1-3}}{(e_1-3)!} + \ldots + C_{e_1-2} x + C_{e_1-1},$$

$$\zeta_1 = C_1 \frac{x^{e_1-1}}{(e_1-1)!} + C_2 \frac{x^{e_1-2}}{(e_1-2)!} + \ldots + C_{e_1-1} x + C_{e_1}.$$

Возвращаясь к переменным z_i, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &z_{e_1} = C_1 e^{\lambda_1 x},\ z_{e_1-1} = e^{\lambda_1 x}\,(C_1 x + C_2),\ \ldots \\ &\ldots,\ z_1 = e^{\lambda_1 x}\left(C_1 \frac{x^{e_1-1}}{(e_1-1)!} + C_2 \frac{x^{e_1-2}}{(e_1-2)!} + \ldots + C_{e_1}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (31_1)$$

Аналогичные формулы $(31_2), \ldots, (31_k)$ получатся для групп уравнений $(30_2), \ldots$ $\ldots, (30_k)$. При интеграции войдёт $e_1 + e_2 + \ldots + e_k = n$ произвольных постоянных C_i. Легко убедиться в том, что система частных решений, соответствующая системам значений произвольных постоянных

$$\begin{aligned} &C_1 = 1, \quad C_2 = C_3 = \ \ldots\ = C_n = 0, \\ &C_2 = 1, \quad C_1 = C_3 = \ \ldots\ = C_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_n = 1, \quad C_1 = C_2 = \ \ldots\ = C_{n-1} = 0, \end{aligned}$$

является линейно независимой. В самом деле, эта система частных решений имеет вид:

$$z_1^{(1)} = e^{\lambda_1 x} \frac{x^{e_1-1}}{(e_1-1)!},\quad z_2^{(1)} = e^{\lambda_1 x} \frac{x^{e_1-2}}{(e_1-2)!},\ \ldots,\ z_{e_1-1}^{(1)} = e^{\lambda_1 x} x,\quad z_{e_1}^{(1)} = e^{\lambda_1 x},$$

$$z_{e_1+1}^{(1)} = \ \ldots\ = z_n^{(1)} = 0,$$

$$z_1^{(2)} = e^{\lambda_1 x} \frac{x^{e_1-2}}{(e_1-2)!},\quad z_2^{(2)} = z^{\lambda_1 x} \frac{x^{e_1-3}}{(e_1-3)!},\ \ldots,\ z_{e_1-1}^{(2)} = e^{\lambda_1 x},$$

$$z_{e_1}^{(2)} = z_{e_1+1}^{(2)} = \ \ldots\ = z_n^{(2)} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_1^{(e_1)} = e^{\lambda_1 x},\quad z_2^{(e_1)} = z_3^{(e_1)} = \ \ldots\ = z_n^{(e_1)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_1^{(n)} = e^{\lambda_k x},\quad z_2^{(n)} = z_3^{(n)} = \ \ldots\ = z_n^{(n)} = 0.$$

Подставляя эти значения в определитель (12′), мы получаем:

$$D = \pm\, e^{e_1\lambda_1 x + e_2\lambda_2 x + \cdots + e_k\lambda_k x} \neq 0$$

Так как искомые функции y_i выражаются через z_i линейно при помощи формул (26) с определёнными коэффициентами α_{ik} и с определителем, отличным от нуля, то, подставляя в эти формулы найденные для z_i значения (31_1), (31_2), ..., (31_k), мы получим полное решение системы (23), содержащее n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Примечание. Одно линейное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

эквивалентно системе

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ \ldots, \ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = -a_n y - a_{n-1} y_1 - \ldots - a_1 y_{n-1}.$$

Для этой системы матрица (27) имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_2 & -a_1-\lambda \end{Vmatrix}. \qquad (27''')$$

Разлагая соответствующий определитель по последней строке и приравнивая нулю, получаем:

$$D_n(\lambda) = (a_1 + \lambda)\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

т. е. известное нам из главы VI характеристическое уравнение. Рассмотрим элементарные делители матрицы $(27''')$. Минор определителя матрицы $(27''')$, соответствующий элементу первого столбца и последней строки, есть 1; следовательно, общий наибольший делитель всех миноров $(n-1)$-го порядка $D_{n-1}(\lambda) = 1$. Поэтому $E_1 = D_n(\lambda)$, $E_2 = E_3 = \ldots = 1$. Таким образом, элементарные делители матрицы $(27''')$ будут:

$$(\lambda - \lambda_1)^{e_1}, \quad (\lambda - \lambda_2)^{e_2}, \ \ldots, \ (\lambda - \lambda_k)^{e_k},$$

где все λ_i различны между собой: каждому корню соответствует только один элементарный делитель. Из вышеизложенной теории следует, что каждому корню λ_i будет соответствовать группа решений вида $e^{\lambda_i x}$, $xe^{\lambda_i x}$, ..., $x^{e_i - 1} e^{\lambda_i x}$, как мы уже видели в главе VI. Таким образом, система дифференциальных уравнений, в которой хоть одному корню уравнения $D_n(\lambda) = 0$ соответствует более одного элементарного делителя, не может быть сведена к одному уравнению n-го порядка.

Из всей этой теории следует, что решения нормальной системы уравнений с постоянными коэффициентами имеют вид:

$$y_j = P_{ij}(x) e^{\lambda_i x} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (32)$$

где $P_{ij}(x)$ — многочлен степени, не большей, чем $m_i - 1$, где m_i — кратность корня λ_i уравнения (21). Практический приём для нахождения общего решения такого уравнения — составить для каждого корня выражения вида (32) с неопределёнными коэффициентами. Подставляя эти выражения в систему (18), мы получим для неопределённых коэффициентов систему линейных уравнений. Число неизвестных, остающихся произвольными при решении этой системы, равно кратности корня.

Пример 7. Решить систему: $\frac{dx}{dt} + x - y = 0$, $\frac{dy}{dt} + y - 4z = 0$, $\frac{dz}{dt} + 4z - x = 0$.

Уравнение (21) имеет вид:

$$0 = \begin{vmatrix} 1+\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1+\lambda & -4 \\ -1 & 0 & 4+\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2.$$

Решения, соответствующие простому корню $\lambda = 0$, пишем в виде $x = a$, $y = b$, $z = c$. Вставляя эти значения в данную систему, получаем для определения a, b, c три уравнения, которые, согласно общей теории, сводятся к двум независимым, например к уравнениям:

$$a - b = 0,$$
$$b - 4c = 0.$$

Полагая $c = C_1$ (произвольному постоянному), находим систему решений, соответствующую корню $\lambda = 0$:

$$x = 4C_1,$$
$$y = 4C_1,$$
$$z = C_1.$$

Корень $\lambda = -3$ двукратный, причём $\lambda + 3$ не является делителем всех миноров второго порядка; поэтому ищем соответствующие этому корню решения в виде:

$$x = e^{-3t}(a_1 + a_2 t),$$
$$y = e^{-3t}(b_1 + b_2 t),$$
$$z = e^{-3t}(c_1 + c_2 t).$$

Подставляя в заданную систему и сокращая на общий множитель e^{-3t}, получаем:

$$-3a_1 - 3a_2 t + a_2 + a_1 + a_2 t - b_1 - b_2 t = 0,$$
$$-3b_1 - 3b_2 t + b_2 + b_1 + b_2 t - 4c_1 - 4c_2 t = 0,$$
$$-3c_1 - 3c_2 t + c_2 + 4c_1 + 4c_2 t - a_1 - a_2 t = 0.$$

Приравнивая в обеих частях свободные члены и коэффициенты при t, получаем шесть уравнений:

$$-2a_1+a_2-b_1=0, \qquad -2a_2-b_2=0,$$
$$-2b_1+b_2-4c_1=0, \qquad -2b_2-4c_2=0,$$
$$c_1+c_2-a_1=0, \qquad c_2-a_2=0.$$

Из трёх уравнений правого столбца получаем: $a_2=C_2$ (произвольное постоянное), $b_2=-2C_2$, $c_2=C_2$. После этого первые три уравнения дают:

$$a_1=C_3, \quad b_1=C_2-2C_3, \quad c_1=C_3-C_2.$$

Таким образом, общее решение системы будет:

$$x=4C_1+C_2te^{-3t}+C_3e^{-3t},$$
$$y=4C_1+C_2(-2t+1)e^{-3t}-2C_3e^{-3t},$$
$$z=C_1+C_2(t-1)e^{-3t}+C_3e^{-3t}.$$

ЗАДАЧИ.

179. Найти четвёртые приближения для системы $\frac{dy}{dx}=-z$, $\frac{dz}{dx}=y$ при начальных данных: $y=1$, $z=0$ при $x=0$.

180. Дано уравнение $\frac{d^2y}{dx^2}=y^2+x$. Найти третье приближение для y при начальных условиях: $y_0=0$, $y_0'=1$ при $x=0$.

181. Найти для решения уравнения $y''+2y'+y^2=0$ четвёртое приближение при начальных данных: $y_0=1$, $y_0'=0$ при $x=0$.

Найти общие решения систем:

182. $\frac{dy}{dx}=\frac{z^2}{y}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{y^2}{z}$.

183. $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{z}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{z^2}{y}$.

184. $\frac{dx}{dt}=-x+y+z$, $\frac{dy}{dt}=x-y+z$, $\frac{dz}{dt}=x+y-z$.

185. $\frac{dx}{dt}+x+y=t^2$, $\frac{dy}{dt}+y+z=2t$, $\frac{dz}{dt}+z=t$.

186. $\frac{dx}{dt}+5x+y=7e^t-27$, $\frac{dy}{dt}-2x+3y=-3e^t+12$.

187. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dz}{dx}-2z=e^{2x}$, $\frac{dz}{dx}+2\frac{dy}{dx}-3y=0$.

188. $\frac{dx}{dt}=y$, $\frac{dy}{dt}=x+e^t+e^{-t}$.

189. $\frac{dy}{dx}+\frac{2z}{x^2}=1$, $\frac{dz}{dx}+y=x$.

190. $t\frac{dx}{dt}-x-3y=t$, $t\frac{dy}{dt}-x+y=0$.

Указание. Чтобы привести к постоянным коэффициентам, надо сделать замену независимого переменного.

191. $t\dfrac{dx}{dt}+6x-y-3z=0,\ t\dfrac{dy}{dt}+23x-6y-9z=0,$

$t\dfrac{dz}{dt}+x+y-2z=0.$

192. $\dfrac{dx}{dt}+5x+y=e^t,\ \dfrac{dy}{dt}+3y-x=e^{2t}.$

§ 3. Существование производных по начальным значениям от решений системы.

1. Мы уже ссылались (глава II, § 1, 4) на теорему о возможности дифференцировать решение одного дифференциального уравнения (или их системы) по начальным данным.

В настоящем разделе мы докажем эту теорему. Предварительно докажем следующую лемму:

ЛЕММА. *Если правые части системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n;\ \lambda)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{33}$$

являются непрерывными функциями переменных $x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ *и параметра* λ *в области*

$$|x-x_0|\leqslant a,\quad |y_i-y_i^0|\leqslant b\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\qquad \lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1, \tag{34}$$

и если в той же области непрерывны частные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то решение, опредвлённое начальными данными $(x_0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_n^0)$, *является непрерывной функцией параметра* λ *при* $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$.

Для доказательства заметим, что из условия непрерывности функций f_i в области (34) следует их ограниченность в этой области:

$$|f_i|\leqslant M\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

а из непрерывности $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ следует также их ограниченность:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right|\leqslant K\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Последние неравенства влекут за собой выполнение условий Липшица для функций f_i по отношению к аргументам $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$:

$$|f_i(x,\ y_1',\ \ldots,y_n';\ \lambda)-f_i(x,\ y_1'',\ \ldots,\ y_n'';\ \lambda)|\leqslant$$
$$\leqslant K\{|y_1'-y_1''|+\ldots+|y_n'-y_n''|\}.$$

Следовательно, для всякого фиксированного значения параметра λ между λ_1 и λ_2 и для значений x в интервале

$$x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h,\qquad h=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right),$$