191. $t\dfrac{dx}{dt}+6x-y-3z=0,\ t\dfrac{dy}{dt}+23x-6y-9z=0,$

$t\dfrac{dz}{dt}+x+y-2z=0.$

192. $\dfrac{dx}{dt}+5x+y=e^t,\ \dfrac{dy}{dt}+3y-x=e^{2t}.$

§ 3. Существование производных по начальным значениям от решений системы.

1. Мы уже ссылались (глава II, § 1, 4) на теорему о возможности дифференцировать решение одного дифференциального уравнения (или их системы) по начальным данным.

В настоящем разделе мы докажем эту теорему. Предварительно докажем следующую лемму:

ЛЕММА. *Если правые части системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n;\ \lambda)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{33}$$

являются непрерывными функциями переменных $x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ *и параметра* λ *в области*

$$|x-x_0|\leqslant a,\quad |y_i-y_i^0|\leqslant b\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\qquad \lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1, \tag{34}$$

и если в той же области непрерывны частные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то решение, опредвлённое начальными данными $(x_0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_n^0)$, *является непрерывной функцией параметра* λ *при* $\lambda_1\leqslant\lambda\leqslant\lambda_2$.

Для доказательства заметим, что из условия непрерывности функций f_i в области (34) следует их ограниченность в этой области:

$$|f_i|\leqslant M\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

а из непрерывности $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ следует также их ограниченность:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right|\leqslant K\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Последние неравенства влекут за собой выполнение условий Липшица для функций f_i по отношению к аргументам $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$:

$$|f_i(x,\ y_1',\ \ldots,y_n';\ \lambda)-f_i(x,\ y_1'',\ \ldots,\ y_n'';\ \lambda)|\leqslant$$
$$\leqslant K\{|y_1'-y_1''|+\ldots+|y_n'-y_n''|\}.$$

Следовательно, для всякого фиксированного значения параметра λ между λ_1 и λ_2 и для значений x в интервале

$$x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h,\qquad h=\min\left(a,\ \frac{b}{M}\right),$$

последовательные приближения, получаемые по методу Пикара,

$$\left.\begin{aligned} y_i^{(m)}(x;\ x_0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0;\ \lambda) = y_i^0 + \int_{x_0}^{x} f_i(x,\ y_1^{(m-1)},\ \ldots,\ y_n^{(m-1)};\ \lambda)\,dx \\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

будут сходиться равномерно как по отношению к x, так и по отношению к параметру λ. Пределы этих последовательностей при $m \to \infty$ дадут, как мы знаем, решение системы (33):

$$y_i = \varphi_i(x;\ x_0,\ y_1^0,\ \ldots,\ y_n^0;\ \lambda); \tag{35'}$$

так как все члены последовательностей (35) являются, очевидно, непрерывными функциями от λ, то то же справедливо, в силу равномерной сходимости, и для предельных функций (35′), что и доказывает лемму.

2. Переходим к основной теореме настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА. *Если правые части системы дифференциальных уравнений*

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{4}$$

допускают в области D:

$$|x - \bar{x}_0| \leqslant a,\quad |y_i - \bar{y}_i^0| \leqslant b \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

непрерывные частные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то решение, определённое начальными данными $x_0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_n^0$ [принадлежащими области D', содержащейся в D; D' есть, например $\left(|x_0 - \bar{x}_0| \leqslant \frac{h}{2},\ |y_i^0 - \bar{y}_i^0| \leqslant \frac{b}{2}\right)$],

$$y_i = \varphi_i(x;\ x_0,\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_n^0) \tag{36}$$

допускает непрерывные производные по начальным данным:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_0},\ \frac{\partial y_i}{\partial y_k^0} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Для доказательства допустим, что в формуле (36) величины x_0, y_i^0 получили некоторые определённые числовые значения, принадлежащие области D' $\left(|x_0 - \bar{x}_0| \leqslant \frac{h}{2},\ |y_i^0 - \bar{y}_i^0| \leqslant \frac{b}{2}\right)$. Подставив затем y_i, из (36) в уравнения (4), мы получим тождества. Далее, даём в формуле (36) одному начальному значению y_k^0 приращение Δy_k^0 (так чтобы новое значение не

выходило из D'); обозначим соответствующее решение через

$$\tilde{y}_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_k^0 + \Delta y_k^0, \ldots, y_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad (36')$$

составим для этого решения тождество, соответствующее (4) и вычтем оба тождества почленно:

$$\frac{d(\tilde{y}_i - y_i)}{dx} = f_i(x, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (36'')$$

Разности в правых частях равенства (36″) путём последовательного применения теоремы о конечном приращении преобразуем так:

$$\begin{aligned} f_i(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= \\ = [f_i(x, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n) - f_i(x, y_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n)] &+ \\ + [f_i(x, y_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n) - f_i(x, y_1, y_2, \tilde{y}_3, \ldots, \tilde{y}_n)] &+ \ldots \\ \ldots + [f_i(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, \tilde{y}_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)] &= \\ = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j + \vartheta_{ij}(\tilde{y}_j - y_i), \tilde{y}_{j+1}, \ldots)}{\partial y_j} (\tilde{y}_j - y_j), & \\ 0 < \vartheta_{ij} < 1. & \end{aligned}$$

Множители при $\tilde{y}_j - y_j$ во второй части последнего равенства [обозначим их через $a_{ij}(x, \Delta y_k^0)$] являются непрерывными функциями от совокупности переменных x, Δy_k^0. В самом деле, хотя ϑ_{ij} могут зависеть от x и Δy_k^0 и не непрерывно, но если при данных значениях этих аргументов $\tilde{y}_j - y_j \neq 0$, то непрерывность следует из равенства, определяющего a_{ij}:

$$a_{ij}(x, \Delta y_k^0) = \frac{f_i(x, y_1, \ldots, \tilde{y}_j, \tilde{y}_{j+1}, \ldots) - f_i(x, y_1, \ldots, y_j, \tilde{y}_{j+1}, \ldots)}{\tilde{y}_j - y_j},$$

где числитель и знаменатель непрерывны и знаменатель $\neq 0$; если же разность $\tilde{y}_j - y_j$ стремится к нулю при $x \to \bar{x}$, $\Delta y_k^0 \to \Delta \bar{y}_k^0$, то a_{ij}, в силу непрерывности $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ по отношению к совокупности аргументов, стремится к значению $\frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j, \tilde{y}_{j+1}, \ldots)}{\partial y_j}$. Заметим, что, в частности, a_{ij} непрерывны при $\Delta y_k^0 = 0$ и что $a_{ij}(x, 0) = \frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}$.

Разделив, далее, обе части преобразованных указанным способом равенств (36″) на Δy_k^0, мы получим следующие равенства:

$$\frac{d\left(\frac{\tilde{y}_i - y_i}{\Delta y_k^0}\right)}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, \Delta y_k^0) \frac{\tilde{y}_j - y_j}{\Delta y_k^0}. \qquad (37)$$

Мы рассматриваем теперь систему (37) как систему линейных уравнений, в которой искомыми функциями являются: $\frac{\tilde{y}_1 - y_1}{\Delta y_k^0}, \frac{\tilde{y}_2 - y_2}{\Delta y_k^0}, \ldots, \frac{\tilde{y}_n - y_n}{\Delta y_k^0}$; выражения $a_{ij}(x, \Delta y_k^0)$ рассматриваем как известные функции x и параметра Δy_k^0 (мы имеем на это право, так как решения (36) и (36′) предполагаются известными). По доказанному, эти коэффициенты непрерывно зависят от параметра Δy_k^0 при достаточно малом $|\Delta y_k^0|$. Начальные условия для искомых функций, очевидно, таковы:

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } i \neq k: \quad \left(\frac{\tilde{y}_i - y_i}{\Delta y_k^0}\right)_{x=x_0} = \frac{y_i^0 - y_i^0}{\Delta y_k^0} = 0; \\ &\text{при } i = k: \quad \left(\frac{\tilde{y}_k - y_k}{\Delta y_k^0}\right)_{x=x_0} = \frac{\Delta y_k^0}{\Delta y_k^0} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Мы вправе применить доказанную выше лемму: решения системы (37) также непрерывно зависят от параметра Δy_k^0, и, в частности, для них существуют предельные значения:

$$\lim_{\Delta y_k^0 \to 0} \frac{\tilde{y}_i - y_i}{\Delta y_k^0} = \frac{\partial \varphi_i(x;\ x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial y_k^0} \equiv \frac{\partial y_i}{\partial y_k^0} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$

Мы доказали существование производных (38) в любой точке $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ области D', т. е. во всей этой области; эти производные удовлетворяют системе однородных линейных уравнений:

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j} z_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{39}$$

причём вместо $y_1, \ldots, y_n$ надо подставить в правые части их значения (36). Система (39) — одна и та же для всех групп производных:

$$\frac{\partial y_1}{\partial y_k^0}, \frac{\partial y_2}{\partial y_k^0}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial y_k^0} \quad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

чтобы получить производные для данного k, надо взять начальные условия: при $x = x_0$ $z_i^0 = 0$, $i \neq k$ и $z_k^0 = 1$. Очевидно, в силу однозначности решений системы (39), этими начальными условиями соответствующие производные вполне определяются; являясь решениями системы линейных уравнений, производные $\frac{\partial y_i}{\partial y_k^0}$ оказываются тем самым непрерывными функциями от $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$.

Для доказательства существования производных от решения (36) по x_0 поступаем аналогично: пусть

$$y_i^* = \varphi_i(x;\ x_0 + \Delta x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0).$$

Тогда мы находим:

$$\frac{d}{dx}\frac{y_i^*-y_i}{\Delta x_0}=\{f_i(x, y_1^*, \ldots, y_n^*)-f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\}\frac{1}{\Delta x_0}=$$

$$=\sum b_{ij}(x, \Delta x_0)\frac{y_j^*-y_j}{\Delta x_0},$$

где $b_{ij}(x, \Delta x_0)$ определяются аналогично тому, как выше были определены $a_{ij}(x, \Delta y_k^0)$. Опять $b_{ij}(x, \Delta x_0)$ оказываются непрерывными функциями от параметра Δx_0, при $|\Delta x_0|$ достаточно малом, причём $\lim\limits_{\Delta x\to 0} b_{ij}(x, \Delta x_0)=$ $=\frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}$, и мы, применяя лемму, доказываем существование частных производных

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_0}, \frac{\partial y_2}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_0},$$

причём эти производные удовлетворяют той же системе линейных уравнений (39). Выясним начальные условия, которым эти функции удовлетворяют. Мы неоднократно уже заменяли систему дифференциальных уравнений (4) вместе с начальными данными системой интегральных уравнений,

$$y_i=y_i^0+\int\limits_{x_0}^{x} f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\,dx \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{4'}$$

Если сюда подставить вместо $y_1, \ldots, y_n$ их значения (36), мы получим тождества; дифференцируя эти тождества по x_0 (по доказанному, эта операция законна), мы получаем:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_0}=-f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)+\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_0}\,dx, \tag{4''}$$

откуда при $x=x_0$

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_0}\right)_0=-f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Таковы начальные значения функций z_i при $x=x_0$, которые надо взять в системе (39), чтобы получить производные $z_i=\frac{\partial y_i}{\partial x_0}$. Теорема доказана полностью.

Примечание 1. Систему линейных уравнений (39) можно получить формально, подставив решения (36) в уравнения (4), дифференцируя полученные тождества по x_0 $y_1^0, \ldots, y_n^0$ и обозначая частные производные от y_i по одному из этих параметров через z_i. Однако, для того чтобы иметь право на такую операцию, надо предварительно доказать существование частных производных от y_i по параметрам и возможность менять порядок дифференцирования: $\frac{\partial}{\partial y_k^0}\frac{dy_i}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{\partial y_i}{\partial y_k^0}$.

Примечание 2. Если правые части уравнений (4), кроме переменных, зависят ещё от параметра λ, т. е. имеют вид (33), причём эти правые части

допускают непрерывные частные производные не только по $y_1, \ldots, y_n$, но *также по параметру* λ для $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, то в таком случае *решения* (35′) *допускают также частные производные по* λ.

В самом деле, этот случай легко сводится к разобранному в доказанной теореме; для этого дополним систему (33) $(n+1)$-м уравнением $\frac{d\lambda}{dx} = 0$ с начальным значением $\lambda = \lambda_0$ при $x = x_0$. Тогда, в силу теоремы, решения этой новой системы, даваемые формулами (35′) и формулой $\lambda = \lambda_0$, допускают производные по начальным значениям, в частности по λ_0 (при любом значении λ_0 в рассматриваемом интервале, т. е. по λ, $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$). Система линейных уравнений, соответствующая в этом случае системе (39), очевидно, имеет вид:

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} z_j + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{39′}$$

$\left(\text{так как } \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_0} = \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_0} = 1\right)$. Здесь мы имеем систему неоднородных линейных уравнений. Начальные значения, если y_i^0 являются численными постоянными, суть: $z_1^0 = z_2^0 = \ldots = z_n^0 = 0$. Можно рассматривать ещё более общий случай, когда y_i^0 являются (дифференцируемыми) функциями параметра λ, $y_i^0 = \psi_i(\lambda)$. В этом случае $\frac{\partial y_i}{\partial \lambda}$ удовлетворяют той же системе (39′) с начальными условиями: $z_i^0 = \psi_i'(\lambda)$ при $x = x_0$. Распространение этих утверждений на случай любого числа параметров $\lambda, \mu, \ldots$ очевидно.

Примечание 3. Для случая одного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

с общим решением $y = \varphi(x; x_0, y_0)$ вместо системы (39) получается одно линейное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f[x, \varphi(x; x_0, y_0)]}{\partial y} z.$$

Интегрируя его с начальными условиями $z_0 = 1$ или $z_0 = -f(x_0, y_0)$ при $x = x_0$, мы получим явные выражения для $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ и $\frac{\partial y}{\partial x_0}$ в виде:

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} = e^{\int_{x_0}^{x} f_y'(x, \varphi(x; x_0, y_0))\, dx}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)\, e^{\int_{x_0}^{x} f_y'(x; \varphi(x, x_0, y_0))\, dx}$$

Примечание 4. Возьмём какое-нибудь частное решение системы (4), полученное из формул (36) при определённых начальных значениях $x = x_0$, $y_1^0 = \overline{y_1^0}, \ldots, y_n^0 = \overline{y_n^0}$, и обозначим его через

$$y_1 = \overline{\varphi_1}(x), \quad y_2 = \overline{\varphi_2}(x), \ldots, y_n = \overline{\varphi_n}(x). \tag{40}$$

Назовём, как это принято в вариационном исчислении, *вариациями* функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ значения их производных по параметру α, равному x_0 или $y_1^0, \ldots,$ или y_n^0 [или λ, в случае системы (33)], при начальном значении параметра $\alpha = \alpha_0$ [т. е. при $x_0 = \overline{x}_0$ или $y_1^0 = \overline{y}_1^0, \ldots, y_n^0 = \overline{y}_n^0$ (или $\lambda = \overline{\lambda}_0$)]. Вводя для вариации символ δ, имеем:

$$\delta y_i = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right)_{x_0 = \overline{x}_0,\ y_i^0 = \overline{y}_i^0}.$$

Очевидно, вариации δy_i удовлетворяют системе (39), которая в этом случае напишется так:

$$\frac{d\delta y_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, \overline{\varphi}_1(x), \ldots, \overline{\varphi}_n(x))}{\partial y_j} \delta y_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (39'')$$

Уравнения (39″) [а также иногда уравнения (39)] называются *уравнениями в вариациях.*

Если правые части зависят также от λ и параметр α есть λ, то уравнения в вариациях принимают вид:

$$\frac{d\delta y_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Уравнения (39″) позволяют вычислять вариации интегрированием системы (39″), если известно одно частное решение (40). Решения системы (39″) имеют простое геометрическое значение. Если α_0 — значение параметра, дающее решение (40), то решение, соответствующее значению параметра $\alpha_0 + d\alpha$ с точностью до бесконечно малых порядка выше первого относительно $d\alpha$, будет:

$$y_i(x, \alpha_0 + d\alpha) = \overline{y}_i(x) + \left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha = \alpha_0} d\alpha = \overline{y}_i(x) + \delta y_i(x)\, d\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, *вариации $\delta y_i(x)$, умноженные на дифференциал параметра, дают главную часть приращения при переходе от решения* (40), *к бесконечно близкому решению.*

Примечание 5. Имеет место теорема:

Если функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ допускают m непрерывных частных производных по совокупности переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то решения имеют все частные производные m-го порядка по $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ и те производные m-го порядка по $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, где дифференцирование по x_0 входит один раз; если, кроме того, f_i допускают $p - 1$ непрерывных производных по x $(p \leqslant m)$, то решения имеют все производные m-го порядка по $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, в которых дифференцирование по x_0 производится не более p раз.

Мы проведём доказательство для $m = 2$. Рассмотрим систему $2n$ уравнений:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad \frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{dy_j} z_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (A)$$

Эта система распадается на две: систему (4) и систему (39). Интегрируя сначала первую при начальных значениях $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, а затем вторую, в которую подставлены решения первой, причём в качестве начальных значений при $x = x_0$ взяты $z_i = 0$ при $i \neq l$, $z_l = 1$, мы, в силу предыдущего, получим решения:

$$y_i = \varphi_i(x;\ x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0), \quad z_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_l^0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{B}$$

Предположим, что f_i допускают вторые непрерывные производные по $y_1 \ldots, y_n$ так как, кроме того, z_i входят линейно в систему (A), то, подставив в неё значения (B), мы для всей системы (A) можем составить уравнения в вариациях:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\delta y_i}{dx} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j}\, \delta y_j, \\ \frac{d\delta z_i}{dx} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j}\, \delta z_j + \\ &+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j\, \partial y_s}\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_l^0}\, \delta y_s \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{C}$$

Чтобы получить из системы (C) в качестве решений частные производные от функций y_i, z_i по y_k^0, мы, в силу предыдущего, должны взять начальные значения при $x = x_0$: $\delta y_i = 0$, $i \neq k$, $\delta y_k = 1$, $\delta z_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Систему (C) с этими начальными условиями мы интегрируем опять, разбивая её на две системы. Сначала из n первых уравнений определяем функции $\delta y_i = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_k^0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Подставляя эти значения δy_i в остальные n уравнений (C), получим систему линейных неоднородных уравнений:

$$\frac{d\delta z_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j}\, \delta z_j + \\ + \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j\, \partial y_s}\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_l^0}\, \frac{\partial \varphi_s}{\partial y_k^0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Эта система при начальных значениях $x = x_0$, $\delta z_i = 0$ определит нам функции $\delta z_i = \dfrac{\partial z_i}{\partial y_k^0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Вспоминая, что $z_i = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial y_l^0}$, мы видим, что доказано существование вторых производных:

$$\frac{\partial^2 z_i}{\partial y_l^0\, \partial y_k^0} \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Для нахождения смешанных вторых производных по y_l^0 и по x_0 $(l = 1, 2, \ldots, n)$ допустим сначала, что эти производные существуют; дифференцируя в этом предположении равенство (4″) на стр. 302 по y_l^0, получаем:

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial y_l^0\,\partial x_0} = -\frac{\partial f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial y_l^0} + \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j} \frac{\partial^2 y_j}{\partial y_l^0\,\partial x_0}\,dx +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j \partial y_s} \frac{\partial y_j}{\partial x_0} \frac{\partial y_s}{\partial y_l^0}\,dx \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если в эти соотношения вместо y_i подставить найденные решения (B) и продифференцировать их по x, то мы получим последние n уравнений системы (C); при этом $z_i = \dfrac{\partial y_i}{\partial y_l^0}$, а символ δ обозначает дифференцирование по x_0. Присоединяя ещё первые n уравнений (C) с тем же смыслом δ, мы получим систему, которая, по предыдущему, определит производные: $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_0}$, $\dfrac{\partial z_i}{\partial x_0} = \dfrac{\partial^2 y_i}{\partial x_0 \partial y_l^0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; при этом из предыдущих интегральных соотношений следует, что нужно взять начальные условия:

$$(\delta y_i)_0 = -f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0), \quad (\delta z_i)_0 = -\frac{\partial f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial y_l^0} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, существование производных $\dfrac{\partial^2 y_i}{\partial x_0\,\partial y_i^0}$ доказано, причём новых предположений относительно дифференцируемости функций f_i не потребовалось.

Чтобы доказать существование производных $\dfrac{\partial^2 y_i}{\partial x_0^2}$, надо потребовать дополнительно существования непрерывных производных $\dfrac{\partial f_i}{\partial x}$. Интегрируя систему (A) при начальных условиях: $y_i = y_i^0$, $z_i = -f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ при $x = x_0$, получим, по предыдущему, $y_i = \varphi_i$, $z_i = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_0}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Вариация системы (A) даёт систему, в которой n уравнений тождественны с соответствующими уравнениями (C), а последние n уравнений будут:

$$\frac{d\delta z_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j} \delta z_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial y_j \partial y_s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_0} \delta y_s.$$

Понимая в этой системе δ как дифференцирование по x_0, мы из первых n уравнений при начальных условиях $(\delta y_i)_0 = -f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, получим:

$$\delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

После этого последние n уравнений дадут: $\delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_0^2}$, если за начальные условия взять

$$(\delta z_i)_0 = -\frac{\partial f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial x_0} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial y_j^0} f_j(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(эти условия можно найти, дифференцируя формально соотношения (4″) на стр. 302 по x_0).

Рассматривая системы из $3n, \ldots, kn$ уравнений, аналогичные системе (A), т. е. вводя наряду с y_i в качестве искомых функций их первые, вторые, ..., k-е производные по начальным условиям, мы докажем высказанную теорему для производных порядка k. Подобная теорема имеет место также для производных по параметру λ, от которого могут зависеть как правые части уравнений, так и начальные условия.

§ 4. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Мы предположим, что в некоторой замкнутой области D функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и все их частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ непрерывно зависят от всех аргументов. Тогда применима теорема существования и единственности (см. главу IV, § 1). Если точка с координатами $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ лежит внутри некоторой области D', содержащейся в D, то существует одна и только одна система решений уравнений (4), удовлетворяющих начальным условиям:

$$y_i = y_i^0 \text{ при } x = x_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть эти решения будут:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x; x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0), \\ y_2 &= \varphi_2(x; x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x; x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$