После этого последние n уравнений дадут: $\delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial x_0} = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_0^2}$, если за начальные условия взять

$$(\delta z_i)_0 = -\frac{\partial f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial x_0} + \\ + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)}{\partial y_j^0} f_j(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(эти условия можно найти, дифференцируя формально соотношения (4″) на стр. 302 по x_0).

Рассматривая системы из $3n, \ldots, kn$ уравнений, аналогичные системе (A), т. е. вводя наряду с y_i в качестве искомых функций их первые, вторые, ..., k-е производные по начальным условиям, мы докажем высказанную теорему для производных порядка k. Подобная теорема имеет место также для производных по параметру λ, от которого могут зависеть как правые части уравнений, так и начальные условия.

§ 4. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Мы предположим, что в некоторой замкнутой области D функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и все их частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$ непрерывно зависят от всех аргументов. Тогда применима теорема существования и единственности (см. главу IV, § 1). Если точка с координатами $x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ лежит внутри некоторой области D', содержащейся в D, то существует одна и только одна система решений уравнений (4), удовлетворяющих начальным условиям:

$$y_i = y_i^0 \text{ при } x = x_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть эти решения будут:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x; x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0), \\ y_2 &= \varphi_2(x; x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \varphi_n(x; x_0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0). \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

В этих формулах мы явно указываем зависимость решения от начальных данных x_0, $y_1^0, \ldots, y_n^0$, которые мы принимаем за параметры, могущие принимать различные значения.

В предыдущем параграфе мы доказали, что правые части равенств (36) допускают непрерывные производные по $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$.

Рассмотрим теперь в области D начальную точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ и некоторую точку $(x, y_1, \ldots, y_n)$, лежащую на интегральной кривой, проходящей через начальную точку. Значения $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, с одной стороны, и значения $x, y_1, \ldots, y_n$, с другой стороны, связаны соотношениями (36). Если теперь принять точку $(x, y_1, \ldots, y_n)$ за начальную, то, в силу свойства единственности, определённая этими начальными значениями интегральная кривая пройдёт через точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, причём, очевидно, будут иметь место соотношения:

$$\left.\begin{aligned} y_1^0 &= \varphi_1(x_0;\ x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2^0 &= \varphi_2(x_0;\ x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^0 &= \varphi_n(x_0;\ x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Формулы (41) показывают, что *система уравнений* (36) *может быть разрешена* (*однозначно в области* D') *относительно начальных значений* $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, причём правые части допускают непрерывные частные производные по $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Заменяя, как мы это делаем в теореме существования, начальные значения $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, через произвольные постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и давая параметру x_0 определённое числовое значение, мы получим совокупность уравнений вида:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_1, \\ \psi_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= C_n. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Совокупность равенств (42) называется *общим интегралом системы* (4), а каждое из равенств (42) называется *первым интегралом этой системы* [1]). Заметим, что левая часть каждого из этих

[1]) Сравнивая формулы (41) и (36), мы видим, что уравнения (41) могут быть разрешены относительно $y_1, \ldots, y_n$, причём, очевидно, для этих величин получатся выражения (36). Отсюда следует, что и уравнения (42) разрешимы относительно $y_1, \ldots, y_n$, так как их левые части отличаются от правых частей уравнений (41) только обозначением — отсутствием явно показанного x_0, который не играет в разрешении никакой роли. Получатся выражения вида:

$$y_i = \overline{\varphi}_i(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{36'''}$$

причём следует помнить, что $C_i = y_i^0$. Эти формулы выражают то решение, в котором при $x = x_0$ функции y_i принимают значения $y_i = y_i^0$; отметим ещё, что это — лишь иная запись формул (36).

равенств есть функция от независимого переменного и искомых функций; из самого происхождения формул (42) следует, что эта функция обращается в некоторую постоянную величину, если вместо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ поставить их выражения (36), т. е. любое решение системы (4) (причём, очевидно, для разных решений значение этой постоянной будет, вообще говоря, различное). Мы можем, таким образом, дать два определения первого интеграла:

1) *Первыми интегралами системы* (4) *называются соотношения, полученные разрешением уравнений, дающих общее решение системы, относительно произвольных постоянных.*

Предыдущее рассуждение показывает, что такое разрешение всегда возможно, если за произвольные постоянные взять начальные значения искомых функций.

Очевидно, что это определение применимо лишь ко всей системе соотношений (42). Поэтому мы дадим второе определение, характеризующее каждый первый интеграл в отдельности.

2) *Первым интегралом системы называется соотношение, не тождественно равное постоянному, содержащее в левой части независимое переменное и искомые функции и принимающее постоянное значение, если вместо искомых функций подставить какое-нибудь решение системы* (4).

Заметим, что из этого последнего определения очевидно существование бесконечного множества систем первых интегралов. В самом деле, соотношение

$$\Phi[\psi_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n)] = C, \qquad (42')$$

где C есть произвольное постоянное, а Φ — произвольная непрерывная функция своих аргументов, также является первым интегралом системы (4), так как, подставляя вместо $y_1, y_2, \ldots, y_n$ решения системы, мы обращаем функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, а следовательно и Φ, в постоянные величины.

2. Исходя из второго определения первых интегралов, можно дать аналитический признак, характеризующий левую часть первого интеграла. Мы предположили, что правые части данных уравнений (4) допускают непрерывные частные производные по $y_1, y_2, \ldots, y_n$; тогда, как доказано выше, правые части равенств (41) допускают непрерывные частные производные по $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; мы можем рассматривать более общие соотношения вида (42), причём мы всегда будем предполагать, что их левые части допускают производные по $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$; это будет иметь место всегда, если левые части равенств (42) получены из правых частей равенств (41) формулами вида (42′), где Φ — функция, имеющая непрерывные производные по всем своим аргументам.

Предположим, что в одном из первых интегралов

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C \qquad (42'')$$

на место $y_1, \ldots, y_n$ подставлено какое-нибудь решение системы (4); тогда левая часть обратится в функцию от x, тождественно равную постоянной. Дифференцируя обе части этого тождества по x, получаем:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}=0. \tag{43}$$

Так как $y_1, \ldots, y_n$ суть решения системы (4), то производные $\frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ можно заменить в равенстве (43) равными им правыми частями уравнений (4), и мы получим:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial\psi}{\partial y_1}+\ldots+f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial\psi}{\partial y_n}=0. \tag{44}$$

В равенстве (44) $y_1, \ldots, y_n$ суть функции от x, являющиеся некоторым решением системы (4); таким образом, значения $(x, y_1, \ldots, y_n)$ в этом равенстве суть координаты точки $(n+1)$-мерного пространства, через которую проходит рассматриваемое решение. Но так как результат дифференцирования равенства (42″) не зависит от C, то равенство (44) выполняется для точки $(x, y_1, \ldots, y_n)$, лежащей на любой интегральной кривой в рассматриваемой области. Так как, по теореме существования, через каждую точку $(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ этой области проходит интегральная кривая, то, следовательно, равенство (44) имеет место для любой точки рассматриваемой области, т. е. тождественно по $x, y_1, \ldots, y_n$. Итак, левая часть каждого первого интеграла удовлетворяет тождественно соотношению (44).

Пусть, обратно, некоторая функция ψ обращает уравнение (44) в тождество; тогда вдоль любой интегральной кривой системы (4) имеет место равенство (43), а следовательно, и равенство (42″). Таким образом, вдоль каждой интегральной кривой функция ψ принимает постоянное значение.

Итак, *равенство* (44) *есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение* (42″) *представляло первый интеграл.*

Иногда свойство первого интеграла, выражаемое равенством (44), формулируют так: производная от левой части первого интеграла обращается в нуль в силу данной системы дифференциальных уравнений.

3. Если нам удастся каким-нибудь способом найти *n независимых* первых интегралов системы (4), т. е. таких, которые можно разрешить относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то разрешение их даёт выражение $y_1, y_2, \ldots, y_n$ через x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Эти выражения дадут нам общее решение системы (4).

В самом деле, условие независимости интегралов (42) означает, что якобиан $\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$ не равен нулю тождественно; пусть система значений $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ даёт ему отличное от нуля значе-

ние. Тогда в окрестности этих значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются однозначными непрерывными функциями от $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и от x. Задавая начальные значения x_0 и $\overline{y}_1^0, \overline{y}_2^0, \ldots, \overline{y}_n^0$, в достаточной близости от $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$ и обозначая соответствующие значения постоянных через $\overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n$, мы видим, что эти значения постоянных определяют решение системы (4): $y_1 = \overline{\varphi}_1(x, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n), \ldots$ $\ldots, y_n = \overline{\varphi}_n(x, \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n)$, которое при $x = x_0$ принимает наперёд заданные начальные значения $\overline{y}_1^0, \overline{y}_2^0, \ldots, \overline{y}_n^0$. А это и есть критерий для общего решения.

Таким образом, *знание n (независимых) первых интегралов равносильно интеграции системы* (4).

Если нам известен один первый интеграл системы:

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_n) = C,$$

то из него можно выразить одну из искомых функций, например y_n, через x, остальные искомые функции и произвольное постоянное C:

$$y_n = \omega(x, y_1, \ldots, y_{n-1}; C);$$

внося это выражение в первое, второе, ..., $(n-1)$-е уравнение системы (4), мы придём к системе $n-1$ уравнений с $n-1$ искомыми функциями; таким образом, *порядок системы понижается на единицу*. Производя интеграцию новой системы $(n-1)$-го порядка, мы введём $n-1$ произвольных постоянных, которые вместе с C дадут систему n произвольных постоянных, т. е. мы получили общее решение системы (4). Аналогично, если нам известны k независимых первых интегралов, то порядок системы понижается на k единиц.

Пример 8. Рассмотрим систему:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Её общее решение есть: $x = A\cos(t+\alpha)$, $y = A\sin(t+\alpha)$ (A и α — произвольные постоянные). Очевидно, что соотношение $x^2 + y^2 = C$ является первым интегралом этой системы. В самом деле, полная производная по t от левой части, в силу уравнений системы, будет:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2xy - 2yx = 0.$$

Первым интегралом будет также соотношение $\Phi(x^2 + y^2) = C$, где Φ — произвольная (дифференцируемая) функция.

Пример 9. В теории движения твёрдого тела встречается система уравнений:

$$A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr, \quad B\frac{dq}{dt} = (C-A)rp, \quad C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq,$$

где $A \geqslant B \geqslant C > 0$ — заданные постоянные (главные моменты инерции тела), а искомые функции p, q, r — составляющие вектора мгновенной скорости.

Умножая уравнения соответственно на p, q, r и складывая, получим:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0.$$

Левая часть есть полный дифференциал; интеграция его даёт:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = m^2$$

(m — произвольная постоянная) — один первый интеграл уравнения.

Умножая уравнения на Ap, Bq, Cr и складывая, находим:

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда получаем другой первый интеграл:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = n^2$$

(n — произвольная постоянная). Других интегралов, не зависимых от этих двух и не содержащих явно t, наша система, очевидно, не имеет. По общей теории, мы можем воспользоваться этими интегралами, чтобы понизить порядок системы до первого. Предполагая $A > B > C$, разрешаем два полученных соотношения относительно p^2, q^2; имеем:

$$p^2 = \alpha r^2 + a, \quad q^2 = -\beta r^2 + b,$$

где $\alpha = \frac{C(B-C)}{A(A-B)} > 0$, $\beta = \frac{C(A-C)}{B(A-B)} > 0$, и постоянные величины a и b, завися от произвольных постоянных m^2 и n^2, сами являются произвольными.

Внося значения p и q в третье уравнение системы, получаем:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C}\sqrt{(\alpha r^2 + a)(-\beta r^2 + b)};$$

это — уравнение с разделяющимися переменными, и решение получается квадратурой в эллиптических функциях.

Метод, которым мы нашли первые интегралы для указанного примера, заключается в том, что мы подбираем такие комбинации левых частей уравнений, которые представляют полные производные по t, причём правая часть обращается в нуль; приравнивая соответствующие первообразные функции постоянным, мы получаем первые интегралы.

§ 5. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений.

1. Соотношения (42), дающие общий интеграл системы (4), имеют ту особенность, что в них независимые и зависимые переменные входят равноправно. Таким образом, эти соотношения сохраняют свою силу, если мы выберем в качестве независимого переменного одну