где $A \geqslant B \geqslant C > 0$ — заданные постоянные (главные моменты инерции тела), а искомые функции p, q, r — составляющие вектора мгновенной скорости.

Умножая уравнения соответственно на p, q, r и складывая, получим:

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0.$$

Левая часть есть полный дифференциал; интеграция его даёт:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = m^2$$

(m — произвольная постоянная) — один первый интеграл уравнения.

Умножая уравнения на Ap, Bq, Cr и складывая, находим:

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда получаем другой первый интеграл:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = n^2$$

(n — произвольная постоянная). Других интегралов, не зависимых от этих двух и не содержащих явно t, наша система, очевидно, не имеет. По общей теории, мы можем воспользоваться этими интегралами, чтобы понизить порядок системы до первого. Предполагая $A > B > C$, разрешаем два полученных соотношения относительно p^2, q^2; имеем:

$$p^2 = \alpha r^2 + a, \quad q^2 = -\beta r^2 + b,$$

где $\alpha = \frac{C(B-C)}{A(A-B)} > 0$, $\beta = \frac{C(A-C)}{B(A-B)} > 0$, и постоянные величины a и b, завися от произвольных постоянных m^2 и n^2, сами являются произвольными.

Внося значения p и q в третье уравнение системы, получаем:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A-B}{C}\sqrt{(\alpha r^2 + a)(-\beta r^2 + b)};$$

это — уравнение с разделяющимися переменными, и решение получается квадратурой в эллиптических функциях.

Метод, которым мы нашли первые интегралы для указанного примера, заключается в том, что мы подбираем такие комбинации левых частей уравнений, которые представляют полные производные по t, причём правая часть обращается в нуль; приравнивая соответствующие первообразные функции постоянным, мы получаем первые интегралы.

§ 5. Симметричная форма системы дифференциальных уравнений.

1. Соотношения (42), дающие общий интеграл системы (4), имеют ту особенность, что в них независимые и зависимые переменные входят равноправно. Таким образом, эти соотношения сохраняют свою силу, если мы выберем в качестве независимого переменного одну

из функций y_i. Соответствующая замена переменных изменит форму системы (4), так как в неё входят производные; но если написать данные уравнения при помощи дифференциалов (первого порядка), то, по известному их свойству, система в этой форме сохраняет свою силу при любой замене переменных, в частности, вышеуказанного типа. Итак, мы можем написать систему (4) в виде:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}=$$
$$=\frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}=\ldots=\frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Эта система останется равносильною первоначальной, если все знаменатели умножить на один и тот же множитель (при этом надо ограничиться рассмотрением тех областей, где этот множитель не обращается в нуль). Поэтому мы можем предположить, что и стоящий вначале дифференциал dx имеет в знаменателе не единицу, а некоторую функцию. Тогда несимметрия переменных останется только в обозначениях. Делаем последний шаг: вместо переменных x, y_1, $y_2, \ldots, y_n$ пишем переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (для простоты письма число переменных мы будем обозначать через n, а не $n+1$).

Система дифференциальных уравнений в симметричной форме имеет вид:

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}. \quad (45)$$

Общий интеграл этой системы запишется в виде:

$$\left.\begin{array}{c}\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_1,\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_2, \ldots \\ \ldots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)=C_{n-1}.\end{array}\right\} \quad (46)$$

Так как мы желаем иметь возможность принять любое из переменных за независимое, а всё остальное—за искомые функции, то естественно требовать от функции X_i непрерывности и существования непрерывных частных производных по всем аргументам $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Чтобы перейти от симметричной системы (45) к системе вида (4), надо назначить одно из переменных, например x_n, в качестве независимого. Систему перепишем в виде:

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)},\quad \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n}. \quad (45')$$

При этом, чтобы не нарушалась непрерывность правых частей, необходимо при начальных значениях $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ иметь

$$X_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\neq 0.$$

Если же данные начальные значения обращают в нуль X_n, мы можем взять за независимое переменное такое x_i, чтобы соответствующая функция X_i не обращалась в нуль. Правые части системы вида (45′) могут оказаться разрывными при любом выборе независимого переменного лишь в том случае, если начальные значения $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ обращают в нуль все функции X_i:

$$X_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = X_2(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \ldots$$
$$\ldots = X_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0.$$

Такие начальные значения называются *особыми начальными значениями*; они соответствуют *особым точкам* системы (45). Очевидно, к особым начальным значениям неприменимо доказательство Пикара существования и единственности решения. Мы будем исключать особые точки из рассматриваемой области.

Аналитическое условие того, чтобы каждый интеграл из числа интегралов (46) или вообще любое соотношение вида

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C \tag{46′}$$

являлось первым интегралом системы, получается следующим образом. Вдоль интегральной кривой системы функция ψ сохраняет постоянное значение; следовательно, её полный дифференциал, взятый вдоль этой кривой, равен нулю:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial\psi}{\partial x_n}dx_n = 0.$$

Но вдоль интегральной кривой дифференциалы dx_i, в силу уравнений (45), пропорциональны значениям функций X_i; следовательно, вдоль каждой интегральной кривой имеем:

$$X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial\psi}{\partial x_n} = 0. \tag{47}$$

Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, мы заметим, что соотношение (47) выведено для значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляющих (переменную) точку некоторой интегральной кривой. Но так как это равенство справедливо для любого значения постоянного C в формуле (46′), то равенство (47) выполняется для точек любой интегральной кривой. Отсюда следует, так как через каждую точку рассматриваемой области проходит интегральная кривая, что *соотношение* (47) *для левой части первого интеграла выполняется тождественно и что, обратно, всякая функция* ψ, *удовлетворяющая тождественно уравнению* (47), *даёт первый интеграл, если её приравнять произвольному постоянному.*

Геометрически решение системы (45), заданное общим интегралом (46), можно рассматривать как многообразие одного измерения

(«интегральная кривая»), определённое пересечением $n-1$ многообразий $n-1$ измерений $\psi_i = C_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ («гиперповерхности $n-1$ измерений» в n-мерном пространстве $x_1, x_2, \ldots, x_n$); семейство интегральных кривых зависит от $n-1$ параметров $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$; каждое семейство гиперповерхностей зависит от одного параметра.

2. Приведение системы уравнений к симметричной форме часто оказывается полезным для разыскания первых интегралов. Написав уравнения в дифференциальной форме (45), мы ищем такие комбинации членов равенств (45), линейные относительно дифференциалов, чтобы в левой части стоял полный дифференциал, а в правой — нуль. Интегрируя этот полный дифференциал и приравнивая результат постоянному, получаем первый интеграл. Если таким путём найдено $n-1$ интегралов, мы получаем общий интеграл, эквивалентный общему решению; если найдено $n-2$ интегралов, задача нахождения общего решения сводится к интегрированию дифференциального уравнения первого порядка.

Пример 10. $(z-y)^2 \frac{dy}{dx} = z$, $(z-y)^2 \frac{dz}{dx} = y$. Пишем систему в симметричной форме:

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Два последних члена этих равенств дают интегрируемую комбинацию:

$$y\,dy - z\,dz = 0,$$

откуда первый интеграл: $y^2 - z^2 = C_1$.

Далее, приравнивая первое отношение отношению разности предыдущих и последующих членов двух последних отношений, имеем:

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy-dz}{z-y}, \text{ или } dx + (z-y)(dz-dy) = 0,$$

откуда — другой первый интеграл

$$2x + (z-y)^2 = C_2.$$

Задача интегрирования закончена. Впрочем, благодаря делению на $(y-z)^2$, мы потеряли семейство решений, зависящее от одного параметра: $x = C$, $y = z$; эти решения не существуют, если независимым переменным назначить x.

Пример 11. $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}$. Пишем систему в виде:

$$dy - dx = -\frac{dx}{z}, \quad \frac{dx}{y-x} = dz;$$

перемножая, получим интегрируемую комбинацию:

$$\frac{dy-dx}{y-x} + \frac{dz}{z} = 0,$$

откуда $(y-x)z=C_1$. Для дальнейшей интеграции определяем z: $z=\frac{C_1}{y-x}$, и вносим в первое уравнение; получаем: $dy-dx=-\frac{dx(y-x)}{C_1}$, или $(y-x)e^{\frac{x}{C_1}}=C_2$. Отсюда находим общее решение: $y=C_2e^{\frac{x}{C_1}}+x$, $z=\frac{C_1}{C_2}e^{\frac{x}{C_1}}$. Заметим, что соотношение, содержащее C_2, не является первым интегралом, так как оно содержит также произвольное постоянное C_1; чтобы получить из него первый интеграл, надо из первого соотношения выразить C_1 через x, y, z и подставить во второе; получим:

$$(y-x)e^{\frac{x}{z(y-x)}}=C_2.$$

Примечание 1. В п. 4 § 1 настоящей главы мы рассматривали динамическую систему:

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \frac{dx_n}{dt}=X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (6')$$

причём интерпретировали t как время. Для нахождения траекторий мы исключали dt из системы (6′); получаемую таким образом систему целесообразно написать в симметричной форме, так как все величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляющие координаты точек, в этой интерпретации равноправны. Полученная система вида

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n} \quad (45)$$

имеет $n-1$ первых интегралов (46), которые, очевидно, будут также интегралами системы (6′). Таким образом, система (6′), в которой правые части не зависят от времени, допускает $n-1$ интегралов, не зависящих от времени. В примере 9 мы нашли для системы третьего порядка два интеграла, не зависящих от времени.

Обратно, если дана система вида (45), то вместо того, чтобы назначать в качестве независимого переменного одну из величин x_i, можно приравнять все равные между собой отношения дифференциалу нового независимого переменного t:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots=\frac{dx_n}{X_n}=dt;$$

в результате мы получаем систему вида (6′). Если в формулах, дающих решение системы (6′), мы выразим t через одну из переменных x_i, например через x_n, и вставим это выражение в значения функций $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, то получим решение системы (45). Если такого исключения не производить, то мы получим интегральные кривые системы (45), выраженные в функции параметра t.

Примечание 2. Существование первых интегралов (однозначных и непрерывных) мы доказываем только для достаточно малой области, в кото-

рой определённые по теореме существования неявные функции остаются однозначными. Для всей области, в которой определены интегральные кривые системы, первые интегралы могут и не существовать. Рассмотрим следующий простой пример. Система

$$\frac{dx}{dt}=x,\ \frac{dy}{dt}=y$$

имеет общее решение $x=x_0e^t$, $y=y_0e^t$, в частности, при $x_0=y_0=0$, $x=y=0$. Интегральные кривые заполняют плоскость. Но эта система не может иметь интеграла, не зависящего от времени и непрерывного во всей плоскости. В самом деле, такой интеграл имеет постоянное значение вдоль всякого решения, а так как каждое решение (не равное нулю тождественно) имеет пределом при $t\to-\infty$ значения $x=0$, $y=0$, то это же постоянное значение интеграл должен принимать в силу непрерывности в точке (0, 0); следовательно, в силу однозначности в точке (0, 0), это постоянное значение должно быть одно и то же для всех интегральных кривых, т. е. левая часть интеграла была бы тождественно равна постоянной, что противоречит определению первого интеграла. Между тем во всякой области, не содержащей точек оси Ox, система имеет первый интеграл (однозначный и непрерывный) $\frac{x}{y}=C$; если же взять интеграл $\frac{x^2}{x^2+y^2}=C$ того же уравнения, то он будет непрерывен в областях, не содержащих точки (0, 0).

ЗАДАЧИ.

Найти общее решение (или общий интеграл) систем:

193. $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$.

194. $\frac{dx}{x(y^2+z^2)}=\frac{dy}{-y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

195. $\frac{dx}{x(x+y)}=\frac{dy}{-y(x+y)}=\frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}$.

196. $\frac{dx}{dt}=\frac{x-y}{z-t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{x-y}{z-t}$, $\frac{dz}{dt}=x-y+1$.

§ 6. Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению[1]).

1. Мы будем рассматривать системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \tag{48}$$

где $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ предположим непрерывными ($i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Будем интерпретировать $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ как координаты движущейся точки, а t, $t_0\leqslant t<\infty$, как время.

Каждое частное решение системы (48) будем называть *движением*. Рассмотрим движение, определённое начальными данными:

$$t=t_0,\quad x_i=x_i^0,\quad \text{т. е.} \tag{49}$$
$$x_i=x_i(t;\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

---

[1]) Для понимания этого параграфа требуется ознакомление с § 3 и с материалом, напечатанным мелким шрифтом в § 2.