рой определённые по теореме существования неявные функции остаются однозначными. Для всей области, в которой определены интегральные кривые системы, первые интегралы могут и не существовать. Рассмотрим следующий простой пример. Система

$$\frac{dx}{dt}=x,\ \frac{dy}{dt}=y$$

имеет общее решение $x=x_0e^t$, $y=y_0e^t$, в частности, при $x_0=y_0=0$, $x=y=0$. Интегральные кривые заполняют плоскость. Но эта система не может иметь интеграла, не зависящего от времени и непрерывного во всей плоскости. В самом деле, такой интеграл имеет постоянное значение вдоль всякого решения, а так как каждое решение (не равное нулю тождественно) имеет пределом при $t\to-\infty$ значения $x=0$, $y=0$, то это же постоянное значение интеграл должен принимать в силу непрерывности в точке (0, 0); следовательно, в силу однозначности в точке (0, 0), это постоянное значение должно быть одно и то же для всех интегральных кривых, т. е. левая часть интеграла была бы тождественно равна постоянной, что противоречит определению первого интеграла. Между тем во всякой области, не содержащей точек оси Ox, система имеет первый интеграл (однозначный и непрерывный) $\frac{x}{y}=C$; если же взять интеграл $\frac{x^2}{x^2+y^2}=C$ того же уравнения, то он будет непрерывен в областях, не содержащих точки (0, 0).

ЗАДАЧИ.

Найти общее решение (или общий интеграл) систем:

193. $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}$.

194. $\frac{dx}{x(y^2+z^2)}=\frac{dy}{-y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

195. $\frac{dx}{x(x+y)}=\frac{dy}{-y(x+y)}=\frac{dz}{(x-y)(2x+2y+z)}$.

196. $\frac{dx}{dt}=\frac{x-y}{z-t}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{x-y}{z-t}$, $\frac{dz}{dt}=x-y+1$.

§ 6. Устойчивость по Ляпунову. Теорема об устойчивости по первому приближению[1]).

1. Мы будем рассматривать системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n), \tag{48}$$

где $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ предположим непрерывными ($i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Будем интерпретировать $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ как координаты движущейся точки, а t, $t_0\leqslant t<\infty$, как время.

Каждое частное решение системы (48) будем называть *движением*. Рассмотрим движение, определённое начальными данными:

$$t=t_0,\quad x_i=x_i^0,\quad \text{т. е.} \tag{49}$$
$$x_i=x_i(t;\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

---

[1]) Для понимания этого параграфа требуется ознакомление с § 3 и с материалом, напечатанным мелким шрифтом в § 2.

Определение. *Движение* (49) *называется устойчивым по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое* $\delta > 0$, *что как только* $|x_i^0 - \tilde{x}_i^0| < \delta$, $i = 1, \ldots, n$, *то*

$$|x_i(t;\ t_0,\ x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0) - x_i(t;\ t_0,\ \tilde{x}_1^0,\ \ldots,\ \tilde{x}_n^0)| < \varepsilon \qquad (50)$$
$$(i = 1, \ldots, n)$$

для всех значений $t_0 \leqslant t < +\infty$.

Всякое движение, не являющееся устойчивым, называется неустойчивым; это означает, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, *что какое бы малое* $\delta > 0$ *ни было выбрано, всегда найдутся значения* $(\tilde{x}_1^0,\ \tilde{x}_2^0,\ \ldots,\ \tilde{x}_n^0)$ и $t = T$, *что для некоторого* i *и этих* T *будет выполняться неравенство*:

$$|x_i(T,\ t_0,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0) - x_i(T,\ t_0\ \tilde{x}_1^0,\ \ldots,\ \tilde{x}_n^0)| \geqslant \varepsilon_0,$$

несмотря на то, что

$$|x_k^0 - \tilde{x}_k^0| < \delta \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Исследуемое движение, соответствующее начальным условиям t_0, $x_1^0, \ldots, x_n^0$, Ляпунов называет *невозмущённым*, а движение с изменёнными начальными условиями: t_0, $\tilde{x}_1^0, \ldots, \tilde{x}_n^0$ — *возмущённым* движением. Таким образом, устойчивость невозмущённого движения геометрически означает, что в любой данный момент времени t точка траектории возмущённого движения находится в достаточно малой окрестности соответствующей точки невозмущённого движения.

Перейдём теперь к координатам $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ по формулам:

$$x_i = \bar{x}_i + x_i(t) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (51)$$

где для краткости мы положили $x_i(t) = x_i(t,\ t_0,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0)$; тогда невозмущённое движение $x_i(t)$ перейдёт в невозмущённое движение в новых координатах $\bar{x}_i(t) \equiv 0\ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, т. е. в так называемую точку покоя. Действительно, произведём замену переменных (51) в уравнениях (48). Имеем:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} + \frac{d}{dt}(x_i(t)) = X_i(t;\ \bar{x}_1 + x_1(t),\ \ldots,\ \bar{x}_n + x_n(t)).$$

Разлагая правые части последних равенств в ряд Тейлора по $\bar{x}_i$ вплоть до членов первого порядка, получим:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} + \frac{d}{dt}(x_i(t)) = X_i(t;\ x_1(t),\ \ldots,\ x_n(t)) +$$
$$+ \sum_{m=1}^{n} \bar{x}_m \frac{\partial X_i}{\partial x_m}(t;\ x_1(t) + \theta_i \bar{x}_1,\ \ldots,\ x_n(t) + \theta_i \bar{x}_n).$$

Так как $x_i(t)$ есть решение системы (48), то мы получаем:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \sum_{m=1}^{n} \bar{x}_m \frac{\partial X_i}{\partial x_m}(t;\ x_1(t) + \theta_i \bar{x}_1,\ \ldots,\ x_n(t) + \theta_i \bar{x}_n). \qquad (52)$$

Ранее было доказано (см. стр. 298), что коэффициенты при $\bar{x}_m$ в правой части равенства (52) являются непрерывными функциями. Этой системе с начальными условиями $\bar{x}_i^0 = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяет решение $\bar{x}_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что и доказывает наше утверждение.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что преобразование уже совершилось, и будем рассматривать устойчивость по Ляпунову *тривиального решения*: $x_i(t) \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Условия (50), определяющие устойчивость, означают теперь, что траектория возмущённого движения не выходит при $t_0 \leqslant t < +\infty$ из ε-окрестности точки покоя.

В дальнейшем нас будут интересовать *качественные* критерии устойчивости по Ляпунову: и теоретически и для практических приложений важны лишь те случаи, когда мы, не умея интегрировать систему (48), можем, тем не менее, делать заключения об устойчивости невозмущённого движения.

2. Предположим, что функции X_i допускают непрерывные производные первого порядка по x_i и что эти производные являются постоянными вдоль тривиального решения, т. е.

$$\frac{\partial X_i(t,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)}{\partial x_j} = a_{ij} = \text{const}. \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

В сделанных предположениях функции X_i могут быть представлены в виде:

$$X_i(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \varphi_i(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n),$$

где φ_i — бесконечно малые порядка выше первого в окрестности точки $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Система (48) примет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \varphi_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (53)$$

Если в системе (53) отбросить члены порядка выше первого, то полученная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (54)$$

называется системой *первого приближения* для нелинейной системы (53), а значит, при сделанных предположениях, и для системы (48).

Можно рассматривать уравнения (54) и как систему уравнений *в вариациях* (см. § 3 настоящей главы, стр. 304) для системы (48) в окрестности её тривиального решения.

До Ляпунова при исследовании вопроса об устойчивости ограничивались в основном изучением устойчивости *в первом приближении*, считая полученный результат разрешающим вопрос об устойчивости и основной нелинейной системы (48).

Ляпунов первый показал, что в общем случае такое заключение неверно; с другой стороны, он даёт ряд примеров нелинейных систем (48), для которых вопрос об устойчивости разрешается до конца по первому приближению.

3. Рассмотрим сначала случай, когда все корни характеристического уравнения первого приближения, т. е. системы (54), простые, или по крайней мере все элементарные делители матрицы коэффициентов системы (54) простые. Тогда существует неособое линейное преобразование:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{55}$$

приводящее систему (54) к диагональной форме. Применим теперь это преобразование к системе (53), тогда эта система примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + \overset{*}{\varphi}_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_2 y_2 + \overset{*}{\varphi}_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \lambda_n y_n + \varphi_n^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического уравнения системы (54), а $\varphi_i^*(t, y_1\ y_2, \ldots, y_n)$ определяются равенствами:

$$\varphi_i^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \varphi_k(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{57}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

ТЕОРЕМА. *Если*: 1) *все корни характеристического уравнения первого приближения* (54) *отрицательны*;

2) *все функции* $\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в системе* (53) *удовлетворяют условию*:

$$|\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant M\Big[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big]^{\frac{1}{2}+\alpha} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{A}$$

где M — *некоторая постоянная, а* $\alpha > 0$;

3) *все корни характеристического уравнения первого приближения* (54) *простые или по крайней мере элементарные делители матрицы коэффициентов системы уравнений* (54) *простые,* — *то тривиальное решение системы уравнений* (53) *устойчиво.*

Доказательство. Условие 3) теоремы позволяет при помощи неособого линейного преобразования (55) привести систему (53) к виду (56).

Покажем предварительно, что функции $\overset{*}{\varphi}_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ из системы (56) удовлетворяют условию (А). В самом деле, пусть α — верхняя грань модулей коэффициентов преобразования (55), т. е.

$$|\alpha_{ik}| \leqslant \alpha \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда, пользуясь равенством (57), получим:

$$|\overset{*}{\varphi}_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)| = |\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\varphi_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant$$

$$\leqslant M\alpha \sum_{k=1}^{n} (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}+\alpha} \leqslant M_1 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}+\alpha}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (58)$$

где

$$M_1 = M\alpha n.$$

Но при всяком неособом преобразовании сумма квадратов старых переменных не превосходит суммы квадратов новых переменных, умноженных на некоторую постоянную. В самом деле, разрешим равенства (55) относительно переменных x_i:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} y_k, \qquad (59)$$

и пусть β — верхняя грань $|\beta_{ik}|$, т. е. $|\beta_{ik}| \leqslant \beta$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, тогда

$$x_i^2 = (\sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} y_k)^2 \leqslant \{\sum_{k=1}^{n} |\beta_{ik}||y_k|\}^2 \leqslant \beta^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |y_k||y_j| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta^2}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (y_k^2 + y_j^2) = n\beta^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Здесь мы воспользовались известным неравенством:

$$|y_k||y_j| \leqslant \frac{y_k^2 + y_j^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant L \sum_{k=1}^{n} y_k^2, \tag{60}$$

где

$$L = n^2\beta^2.$$

Отметим попутно, что

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leqslant L_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \tag{61}$$

где

$$L_1 = n^2\alpha^2.$$

Из неравенств (58) и (60) получаем требуемое неравенство:

$$|\varphi_i^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqslant M^* \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}, \tag{62}$$

где

$$M^* = M_1 L^{\frac{1}{2}+\alpha}.$$

Теперь умножим первое уравнение системы (56) на y_1, второе — на y_2 и т. д. и сложим их, тогда получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n). \tag{63}$$

По условию, все числа λ_i отрицательны; обозначим наибольшее из них через $-\omega$ и пусть

$$\lambda_n \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_1 = -\omega; \quad \omega > 0. \tag{64}$$

Теперь оценим сверху выражение, стоящее справа в равенстве (63). В силу неравенств (62) и (64), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant -\omega \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + M^* \sum_{i=1}^{n} |y_i| \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}$$

или, так как $|y_i| \leqslant \left\{\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right\}^{\frac{1}{2}}$, то

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant -\omega \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + nM^* \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{1+\alpha}$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant \left(-\omega \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left(1 - \frac{nM^*}{\omega}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\alpha}\right). \tag{65}$$

Будем считать, что y_k настолько малы, что

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 < \left\{ \frac{1}{2} \frac{\omega}{nM^*} \right\}^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{66}$$

Такое предположение допустимо, потому что в начальный момент $t = t_0$ величины y_k можно предполагать как угодно малыми, в частности удовлетворяющими неравенству (66), а в силу непрерывной зависимости решений нашей системы от начальных условий, неравенство (66) будет иметь место в некоторой окрестности значения $t = t_0$.

Тогда неравенство (65) перепишется так:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) \leqslant -\frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^{n} y_k^2(t),$$

откуда, разделяя переменные и интегрируя от t_0 до t, получим:

$$\ln \left[\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) \right]_{t_0}^{t} \leqslant -\omega (t - t_0)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t) \leqslant e^{-\omega(t-t_0)} \sum_{k=1}^{n} y_k^2(t_0). \tag{67}$$

Из неравенства (67) видно, что $\sum_{k=1}^{n} y_k^2(t)$ *монотонно* убывает и стремится к нулю при $t \to \infty$. Поэтому, если неравенство (66) выполнено в начальный момент t_0, то это неравенство будет выполнено при всех значениях $t \geqslant t_0$. Следовательно, и неравенство (67) справедливо при всех $t > t_0$, если только при $t = t_0$ неравенство (66) имело место.

Из неравенств (60) и (61) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t) \leqslant LL_1 e^{-\omega(t-t_0)} \sum_{k=1}^{n} x_k^2(t_0), \tag{68}$$

поэтому, если $|x_k(t_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{LL_1 n}}$, то $|x_k(t)| < \varepsilon$, а это и означает, что тривиальное решение системы (53) устойчиво. Отметим также, что, как видно из неравенства (68), все $x_k(t)$ стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Таким образом, теорема доказана.

4. Рассмотрим теперь случай, когда среди элементарных делителей матрицы коэффициентов системы (54) будут встречаться кратные. Тогда существует неособое линейное преобразование, которое приведёт систему (54) к нормальной форме (30_1), ..., (30_k) (см. стр. 293).

Сделаем ещё одно линейное неособое преобразование, а именно, положим:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= z_1\gamma^{n-1}, \\ y_2 &= z_2\gamma^{n-2}, \\ &\cdots\cdots \\ y_n &= z_n, \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

где γ — произвольное, не равное нулю число. Это число γ будем считать положительным; в дальнейшем оно будет выбрано достаточно малым.

Таким образом, мы имеем неособое линейное преобразование:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^* x_k, \tag{70}$$

приводящее систему (53) к виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \lambda_1 y_1 + \gamma y_2 + \varphi_1^*(t, y_1, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \lambda_1 y_2 + \gamma y_3 + \varphi_2^*(t, y_1, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_{e_1}}{dt} &= \lambda_1 y_{e_1} + \varphi_{e_1}^*(t, y_1, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_{n-e_k+1}}{dt} &= \lambda_k y_{n-e_k+1} + \gamma y_{n-e_k+2} + \varphi_{n-e_k+1}^*(t, y_1, \ldots, y_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= \lambda_k y_n + \varphi_n^*(t, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Здесь

$$\varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}^* \varphi_k(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{72}$$

Замечание. Равенства (72) определяют функции $\varphi_k^*(t, y_1, \ldots, y_n)$ также и в том случае, когда некоторые из чисел λ_i, а следовательно, и α_{ij} и величины y_i комплексны. В самом деле, каждой данной системе значений величин y_i, в силу неособенности преобразования (70), соответствует единственная система значений x_i (мы рассматриваем такие значения y_i, которые соответствуют действительным значениям x_i), а системе значений x_i, в силу равенств (72), соответствует определённое значение функций $\varphi_i^*(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Таким

образом, установлена зависимость $\overset{*}{\varphi}_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ от своих аргументов.

Если некоторое λ_i — комплексное число, то ему соответствует некоторое с ним комплексно сопряжённое $\lambda_j = \bar{\lambda}_i$; тогда коэффициенты преобразования, соответствующие корню λ_j, будут комплексно сопряжены с коэффициентами преобразования, соответствующими корню λ_i, но равенства

$$\bar{y}_i = \sum_{k=1}^{n} \bar{\overset{*}{\alpha}}_{ik} x_k \tag{73}$$

показывают, что комплексно сопряжённым значениям коэффициентов преобразования соответствуют комплексно сопряжённые значения переменных y_i, поэтому

$$\bar{\overset{*}{\varphi}}_i(t, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} \bar{\overset{*}{\alpha}}_{ik} \varphi_k(t, x_1, \ldots, x_n) = \\ = \overset{*}{\varphi}_i(t, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n). \tag{74}$$

ТЕОРЕМА. *Если* 1) *все корни характеристического уравнения первого приближения* (54) *отрицательны,*

2) *все функции* $\varphi_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *в системе* (53) *удовлетворяют условию* (А),

то тривиальное решение системы (53) *устойчиво.*

Доказательство. Пусть система уравнений (53) приведена к виду (71). Поскольку функции $\overset{*}{\varphi}_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ выражаются линейно с помощью формул (72) через $\varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$, то оценка (62) имеет место и в этом случае, где $\alpha \geqslant |\overset{*}{\alpha}_{ik}|$. Пусть $\lambda_n \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_1 = -\omega$, где $\omega > 0$. Умножая первое уравнение системы (71) на y_1, второе — на y_2 и т. д. и складывая их и затем заменяя все λ_k через $-\omega$, мы получим неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant \\ \leqslant -\omega \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \gamma \sum_{i=1}^{n}{}' y_i y_{i+1} + \sum_{i=1}^{n} y_i \overset{*}{\varphi}_i(t, y_1, \ldots, y_n), \tag{75}$$

где штрих у знака средней суммы означает, что при суммировании выпускаются значения $i = e_1, e_1 + e_2, \ldots, n - e_k, n$. Применяя неравенство (62) для $\overset{*}{\varphi}_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ и замечая, что

$$y_i y_{i+1} \leqslant |y_i y_{i+1}| \leqslant \frac{y_i^2 + y_{i+1}^2}{2},$$

мы, усиливая неравенство (75), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant -\omega\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \gamma\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + M^*\sum_{i=1}^{n}|y_i|\left\{\sum_{k=1}^{n}|y_k^2|\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}. \tag{76}$$

Выберем теперь положительное число γ так, чтобы $-\omega+\gamma$ было отрицательным, и положим:

$$-\omega+\gamma=-\omega_1, \quad \text{где} \quad \omega_1>0.$$

Последнее слагаемое в неравенстве (76) оцениваем так же, как это было сделано при получении неравенства (65), тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant -\omega_1\sum_{i=1}^{n} y_i^2\left[1-\frac{nM^*}{\omega_1}\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)^{\alpha}\right]. \tag{77}$$

Неравенство (77) совершенно такое же, как и неравенство (65), только положительное число ω заменено положительным числом $\omega_1=\omega-\gamma$; поэтому, поскольку из неравенства (65) следовала устойчивость тривиального решения системы (53), то и из неравенства (77) будет следовать устойчивость этого решения.

Тем же методом, каким мы доказали первые две теоремы, можно доказать и следующую, их обобщающую теорему.

ТЕОРЕМА. *Если* 1) *все корни характеристического уравнения для первого приближения* (54) *имеют отрицательную действительную часть,*

2) *все функции* $\varphi_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ *в системе* (53) *удовлетворяют условию* (A),

то тривиальное решение системы (53) *устойчиво.*

Доказательство. Пусть система уравнений (53) приведена к виду (71). Наряду с системой (71) рассмотрим также систему:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\bar{y}_1}{dt} &= \bar{\lambda}_1\bar{y}_1+\gamma\bar{y}_2+\varphi_1^*(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n),\\
\frac{d\bar{y}_2}{dt} &= \bar{\lambda}_1\bar{y}_2+\gamma\bar{y}_3+\varphi_2^*(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d\bar{y}_n}{dt} &= \bar{\lambda}_1\bar{y}_n+\varphi_n^*(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n).
\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Из замечания в п. 4 следует, что система (78), с точностью до нумерации, совпадает с системой (71).

Пусть $-\omega$ — наибольшая действительная часть корней характеристического уравнения системы (54), т. е.

$$R(\lambda_k)\leqslant-\omega, \quad \text{где} \quad \omega>0\,^{1)}. \tag{79}$$

---

[1]) $R(z)$ обозначает действительную часть числа z: если $z=x+iy$, то $R(z)=x$.

Заметим, что $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}y_i\bar{y}_i=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{d\bar{y}_i}{dt}+\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\frac{dy_i}{dt}$; тогда, пользуясь системами (71) и (78), получим:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2=\sum_{i=1}^{n}2R(\lambda_i)|y_i|^2+\gamma\sum_{i=1}^{n}{}'(\bar{y}_iy_{i+1}+\bar{y}_{i+1}y_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[\bar{y}_i\varphi_i^*(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)+y_i\varphi_i^*(t,\ \bar{y}_1,\ \ldots,\ \bar{y}_n)],\qquad(80)$$

но $\bar{y}_iy_{i+1}+\bar{y}_{i+1}y_i\leqslant 2|y_iy_{i+1}|\leqslant|y_i|^2+|y_{i+1}|^2$. Пользуясь этим оценкой (62) для $\varphi_i^*(t,\ y_1,\ \ldots,\ y_n)$ и $\varphi_i^*(t,\ \bar{y}_1,\ \ldots,\ \bar{y}_n)$, которая, очевидно, имеет место в нашем случае, и неравенством (79), мы найдём.

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\leqslant$$

$$\leqslant-2\omega\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2+2\gamma\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2+2M^*\sum_{i=1}^{n}|y_i|\left\{\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right\}^{\frac{1}{2}+\alpha}.\qquad(81)$$

Выбрав γ достаточно малым, положив $-\omega+\gamma=-\omega_1$, где $\omega_1>0$, получим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\leqslant-\omega_1\sum_{i=1}^{n}|y_1|^2\left[1-\frac{nM^*}{\omega_1}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right)^{\alpha}\right].\qquad(82)$$

Последнее неравенство совпадает с неравенством (77), только все y_i заменены через $|y_i|$ и положительная величина ω_1 имеет новое значение, но эти обстоятельства на наши заключения об устойчивости тривиального решения системы (53) не повлияют. Тем самым теорема доказана.

5. Отметим ещё одну теорему, устанавливающую некоторые достаточные условия *неустойчивости* решения системы (53).

ТЕОРЕМА. *Если* 1) *хотя бы один корень характеристического уравнения первого приближения* (54) *имеет положительную действительную часть,*

2) *все функции* $\varphi_i(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n)$, *входящие в систему* (53), *удовлетворяют условию* (A),

то тривиальное решение системы (53) *неустойчиво.*

Теорему докажем для случая, когда среди корней характеристического уравнения системы (54) нет корней с действительной частью, равной нулю.

Будем считать, что система (53) приведена к виду (71). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m \geqslant 1)$ — все корни характеристического уравнения системы (54) с положительной действительной частью, тогда корни $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ будут иметь действительную отрицательную часть.

Обозначим через σ наименьшую действительную часть чисел:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \ -\lambda_{m+1}, \ -\lambda_{m+2}, \ \ldots, \ -\lambda_n.$$

Число σ будет положительным,

$$\sigma > 0.$$

Вычислим производную от выражения $K = \sum_{i=1}^{m} |y_i|^2 - \sum_{i=m+1}^{n} |y_i|^2$; пользуясь системами (71) и (78), получим:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{m} y_i\bar{y}_i - \sum_{i=m+1}^{n} y_i\bar{y}_i\right] = \sum_{i=1}^{m} 2R(\lambda_i)|y_i|^2 - \sum_{i=m+1}^{n} 2R(\lambda_i)|y_i|^2 +$$

$$+\gamma\left[\sum_{i=1}^{m}{}' (\bar{y}_i y_{i+1} + \bar{y}_{i+1} y_i) - \sum_{i=m+1}^{n}{}' (\bar{y}_i y_{i+1} + \bar{y}_{i+1} y_i)\right] +$$

$$+\sum_{i=1}^{m} [\bar{y}_i \varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n) + y_i \varphi_i^*(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)] -$$

$$-\sum_{i=m+1}^{n} [\bar{y}_i \varphi_i^*(t, y_1, \ldots, y_n) + y_1 \varphi_i^*(t, y_1, \ldots, \bar{y}_n)].$$

Заменяя $R(\lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ и $-R(\lambda_i)$ при $i = m+1, \ldots, n$ через σ, вычитая модули слагаемых всех остальных сумм, пользуясь при этом оценками так же, как это делалось при доказательстве предыдущей теоремы, получим:

$$\frac{dK}{dt} \geqslant 2\sigma \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 - 2\gamma \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 - 2M^* n \left\{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right\}^{1+\alpha},$$

или, считая γ достаточно малым и обозначая $\sigma - \gamma = \sigma_1$ (величина σ_1 будет положительной), получим:

$$\frac{1}{2}\frac{dK}{dt} \geqslant \sigma_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \left\{1 - \frac{nM}{\sigma_1}\left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right]^{\alpha}\right\}. \tag{83}$$

Если бы тривиальное решение системы (53), а следовательно, и системы (71) было устойчивым, то для всякого $\varepsilon > 0$, в частности для $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(\frac{\sigma_1}{nM}\right)^{\frac{1}{2}\alpha}$, существовало бы такое δ, что при $|y_i(t_0)| < \delta$

$(i=1, \ldots, n)$ имели бы место неравенства $|y_i(t)|<\varepsilon\,(i=1, \ldots, n)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2<\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1}{nM}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

и неравенство (83) можно было бы, усиливая, переписать так:

$$\frac{1}{2}\frac{dK}{dt}>\frac{1}{2}\sigma_1\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\geqslant\frac{1}{2}\sigma_1\left[\sum_{i=1}^{m}|y_i|^2-\sum_{i=m+1}^{n}|y_i|^2\right]$$

или

$$\frac{dK}{dt}-\sigma_1 K>0. \tag{84}$$

Умножив неравенство (84) на $e^{-\sigma_1(t-t_0)}$, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\sigma_1(t-t_0)}K\right)>0, \tag{85}$$

откуда, интегрируя от t_0 до t и заменяя $K(t)$ его выражением, найдём:

$$\sum_{i=1}^{m}|y_i(t)|^2-\sum_{i=m+1}^{n}|y_i(t)|^2>e^{\sigma_1(t-t_0)}\left[\sum_{i=1}^{m}|y_i(t_0)|^2-\sum_{i=m+1}^{n}|y_i(t_0)|^2\right].$$

Мы всегда можем считать, что $\sum_{i=1}^{m}|y_i(t_0)|^2-\sum_{i=m+1}^{n}|y_i(t_0)|^2$—величина положительная; в частности, можем положить все $y_i(t_0)=0$ при $i=m+1, \ldots, n$.

Тогда из неравенства (85) мы можем заключить, что по крайней мере одна из величин $|y_i(t)|$ сделается больше выбранного ε, каким бы малым ни было δ, что противоречит предположению об устойчивости тривиального решения. Тем самым теорема доказана.