обыкновенных дифференциальных уравнений. В силу этой тесной связи уравнений в частных производных первого порядка с обыкновенными дифференциальными уравнениями, естественно излагать их теорию в том же курсе, что и теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 2. Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка.

1. Рассмотрим уравнение вида

$$X[f] \equiv X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \tag{10}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — данные функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (мы их будем предполагать непрерывными и непрерывно дифференцируемыми в рассматриваемой области), а f обозначает искомую функцию. Мы назовём это уравнение *линейным однородным уравнением в частных производных.* Решением уравнения (10) будет (дифференцируемая) функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая по подстановке в уравнение (10) обращает его в тождество. Мы уже встретились с этим уравнением в главе VII в связи с исследованием первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений симметричного вида. Пишем, наряду с дифференциальным уравнением в частных производных (10), систему обыкновенных дифференциальных уравнений [которую мы будем называть *соответствующей уравнению* (10)]:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}. \tag{11}$$

Задачи интегрирования уравнения (10) и системы уравнений (11) суть задачи эквивалентные. В самом деле, мы доказали следующую теорему (глава VII, § 5, 1):

Левая часть любого первого интеграла системы (11) *есть решение уравнения* (10); обратно, *всякое решение уравнения* (10), *приравненное произвольной постоянной, даёт первый интеграл системы* (11).

Постараемся найти вид наиболее общей функции, удовлетворяющей уравнению (10). Для этого заметим такое свойство оператора $X[f]$. Пусть $\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)$ есть некоторая дифференцируемая функция своих аргументов, которые, в свою очередь, являются дифференцируемыми функциями независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда легко видеть, что

$$X[\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_k)] = \\ = \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_1} X[\psi_1] + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_2} X[\psi_2] + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial \psi_k} X[\psi_k]. \tag{12}$$

Пусть теперь

$$\left.\begin{array}{c}\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1, \quad \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2 \ldots \\ \ldots, \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_{n-1}\end{array}\right\} \tag{13}$$

есть некоторая определённая система (независимых) интегралов системы уравнений (11), определённая в некоторой области D [1]).

По доказанной теореме $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ являются частными решениями уравнений (10), т. е. мы имеем тождества:

$$X[\psi_1] = 0, \quad X[\psi_2] = 0, \ldots, X[\psi_{n-1}] = 0. \tag{14}$$

Возьмём теперь произвольную (дифференцируемую) функцию Φ от аргументов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$:

$$\Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}). \tag{15}$$

В силу свойства (12), будем иметь тождественно:

$$X[\Phi] = 0,$$

т. е. *выражение* (15) *является решением уравнения* (10).

Таким образом, мы встречаемся при изучении уравнений в частных производных с фактом, уже отмеченным в § 1: решение такого уравнения может содержать произвольные функции, тогда как решения обыкновенных дифференциальных уравнений заключали лишь произвольные постоянные. Нашей ближайшей задачей будет установить, что выражение (15) является общим решением уравнения (10), а также выяснить, какие дополнительные данные нужно ввести, чтобы из бесконечного множества решений, даваемых выражением (15), выделить одно определённое решение (задача Коши).

2. Переходим к доказательству того, что *формула*

$$f = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}), \tag{15}$$

где Φ есть произвольная дифференцируемая функция своих аргументов, даёт общее решение уравнения (10), т. е. что в этой формуле содержится любое частное решение.

Пусть какое-нибудь решение уравнения (10) в области D есть $f = \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда имеем тождественно $X[\Psi] = 0$, или, в раскрытой форме,

$$X_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0. \tag{14'}$$

Так как $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$, по предположению, суть решения, то имеют место тождества (14), которые в раскрытом виде перепишутся так:

$$X_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{14''}$$

---

[1]) Для теоретических рассуждений удобнее всего за систему (13) принять систему (41) главы VII.

Система уравнений (14′) и (14″) для определения n функций X_1, $X_2, \ldots, X_n$ есть линейная однородная; она допускает не равные нулю решения, и следовательно, определитель этой системы (тождественно) равен нулю. Этот определитель есть якобиан от функций Ψ, $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$.

Итак, мы имеем:

$$\frac{D(\Psi, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv 0. \tag{16}$$

Отсюда, в силу основной теоремы о якобианах, следует, что *между функциями* $\Psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}$ *существует функциональная зависимость*, т. е. для всех значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в рассматриваемой области имеет место равенство (тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$):

$$F(\Psi, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}) = 0. \tag{17}$$

Заметим, что в функциональном определителе, стоящем в левой части равенства (16), заведомо один из миноров первой строки не равен тождественно нулю; в самом деле, если система (11) имела неособые начальные значения

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \ldots, \quad x_n = x_n^0,$$

причём $X_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$, то, в предположении, что в системе (11) x_n взято за независимое переменное, и первые интегралы имеют вид $\psi_i = x_i^0 (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ при значениях переменных, близких к начальным,

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} \neq 0.$$

Отсюда следует, в силу той же основной теоремы о якобианах, что соотношение (17) может быть разрешено относительно функции Ψ, и мы получаем:

$$\Psi = \Phi(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1}).$$

Итак, *всякое решение уравнения* (10) *даётся* (в окрестности точки $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$) *формулой* (15). Теорема доказана. Можно сказать, что формула (15) даёт общее решение уравнения (10).

Примечание. Из доказательства полученной теоремы можно вывести такое следствие: между любыми n решениями $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ уравнения (10) существует фукциональная зависимость $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = 0$; если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ независимы, то функция Φ не обращается в рассматриваемой области в тождественный нуль, так как уравнение может быть разрешено относительно φ_n.

3. Задача Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для уравнения

$$X[f] \equiv X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{10}$$

решим задачу Коши: *найти решение уравнения* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *такое, чтобы*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), \tag{18}$$

где x_n^0 — *заданное число,* $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ — *заданная* (дифференцируемая) *функция своих аргументов.*

Мы предположим, что φ определена для значений $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ в окрестности значений $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-1}^0$, причём точка $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ не является особой точкой для системы (11); далее, допустим, что $X_n(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$ (это ограничение не является очень существенным, так как если бы при значениях $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ функция X_n обращалась в нуль, мы дали бы постоянное значение тому x_i, которому соответствует X_i, не обращающееся в нуль, и задали бы начальную функцию φ от всех остальных аргументов).

При этих предположениях система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) &= \bar{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) &= \bar{\psi}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^0) &= \bar{\psi}_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где ψ_i являются независимыми интегралами системы (11), а $\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}$ — новые переменные, может быть в окрестности точки $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ разрешена относительно $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ [1]).

Пусть соответствующие формулы будут:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \omega_1(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ x_2 &= \omega_2(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \omega_{n-1}(\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}). \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

---

[1]) Если система (18) взята в виде (41) главы VII, то якобиан

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}$$

при $x_i = x_i^0$ обращается в 1; следовательно, он отличен от нуля в окрестности точки $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

При этом, когда $\overline{\psi}_i$ принимают значения:

$$\overline{\psi}_i^0 = \psi_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

соответствующие функции ω_i принимают значения x_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. При наличии частных производных у функций ψ_i функции ω_i также являются дифференцируемыми (существование этих производных при дифференцируемости функций X_i доказано в § 3 главы VII). Я утверждаю, что *искомое решение уравнения* (10), *удовлетворяющее начальному условию* (18), есть:

$$f = \varphi(\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \omega_2(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})). \quad (21)$$

В самом деле, во-первых, выражение (21), являясь функцией от частных решений ψ_i, само является решением уравнения (10); далее, если положить $x_n = x_n^0$, то величины ψ_i обращаются в $\overline{\psi}_i$, в силу формул (19). Но, по формулам (20), $\omega_i(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1})$ равны величинам x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$; поэтому из формулы (21) получаем: при $x_n = x_n^0$

$$f = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

т. е. условие (18) выполнено.

Из построения решения очевидно, что оно *однозначно определено начальными данными* (18).

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Пишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Независимая система её первых интегралов есть

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = C_2, \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1} \quad (x_n \neq 0).$$

Общее решение данного уравнения есть

$$f = \Psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

т. е. наиболее общая однородная функция n пере-

менных нулевого измерения (обращение теоремы Эйлера об однородных функциях для функций нулевого измерения).

Пример 5. Проинтегрировать уравнение

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

(искомая функция обозначена буквой z).

Соответствующая система обыкновенных уравнений сводится к одному уравнению:

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}$$

и имеет интеграл $x^2+y^2=C$. Общее решение данного уравнения $z=\varphi(x^2+y^2)$, где φ есть произвольная функция, геометрически представляет любую поверхность вращения с осью вращения Oz. Задача Коши: $z=f(x)$ при $y=0$, где f есть данная функция; её решение: функция ψ есть x^2+y^2, следовательно, функция ψ есть x^2, откуда $x=\sqrt{\psi}$; искомое решение: $z=f(\sqrt{\psi})=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

Геометрическое истолкование задачи Коши: если задано уравнение меридиана, то поверхность вращения однозначно определяется.

ЗАДАЧИ.

197. Найти геометрическое свойство поверхностей, удовлетворяющих уравнению:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Какая поверхность даёт решение задачи Коши: $z=x$ при $y=1$?

198. Найти общее решение уравнения:

$$\sqrt{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

и решить задачу Коши: $f=y-z$ при $x=1$.

§ 3. Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка.

1. Обозначим искомую функцию через z, независимые переменные через $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Названные в заголовке уравнения имеют вид:

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+P_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R, \tag{22}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$ — функции (непрерывные и непрерывно дифференцируемые) от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Линейные однородные уравнения (10) являются частным случаем уравнений типа (22), когда правая часть $R\equiv 0$ и когда коэффициенты $P_1, P_2, \ldots, P_n$ при