менных нулевого измерения (обращение теоремы Эйлера об однородных функциях для функций нулевого измерения).

Пример 5. Проинтегрировать уравнение

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

(искомая функция обозначена буквой z).

Соответствующая система обыкновенных уравнений сводится к одному уравнению:

$$\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}$$

и имеет интеграл $x^2+y^2=C$. Общее решение данного уравнения $z=\varphi(x^2+y^2)$, где φ есть произвольная функция, геометрически представляет любую поверхность вращения с осью вращения Oz. Задача Коши: $z=f(x)$ при $y=0$, где f есть данная функция; её решение: функция ψ есть x^2+y^2, следовательно, функция $\bar{\psi}$ есть x^2, откуда $x=\sqrt{\bar{\psi}}$; искомое решение: $z=f(\sqrt{\bar{\psi}})=f(\sqrt{x^2+y^2})$.

Геометрическое истолкование задачи Коши: если задано уравнение меридиана, то поверхность вращения однозначно определяется.

ЗАДАЧИ.

197. Найти геометрическое свойство поверхностей, удовлетворяющих уравнению:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Какая поверхность даёт решение задачи Коши: $z=x$ при $y=1$?

198. Найти общее решение уравнения:

$$\sqrt{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

и решить задачу Коши: $f=y-z$ при $x=1$.

§ 3. Линейные неоднородные уравнения с частными производными первого порядка.

1. Обозначим искомую функцию через z, независимые переменные через $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Названные в заголовке уравнения имеют вид:

$$P_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+P_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=R, \tag{22}$$

где $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$ — функции (непрерывные и непрерывно дифференцируемые) от $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Линейные однородные уравнения (10) являются частным случаем уравнений типа (22), когда правая часть $R\equiv 0$ и когда коэффициенты $P_1, P_2, \ldots, P_n$ при

производных не зависят от искомой функции. В обозначениях

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} \equiv p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} \equiv p_2, \ \ldots, \quad \frac{\partial z}{\partial x_n} \equiv p_n$$

уравнение (22) напишется так:

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = R. \tag{22'}$$

Уравнение вида (22) может быть приведено к однородному линейному уравнению следующим приёмом. Мы будем искать удовлетворяющую уравнению (22) функцию z от независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в неявном виде:

$$V(z, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{23}$$

так что искомой функцией будет V.

Из формулы (23) получаются значения частных производных $\frac{\partial z}{\partial x_i}$:

$$p_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial V}{\partial z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Внося эти выражения в данное уравнение (22), умножив обе части на $\frac{\partial V}{\partial z}$ (мы предполагаем, очевидно, этот множитель не равным тождественно нулю и рассматриваем окрестность точки, где он не обращается в нуль) и перенося все члены в левую часть, получаем соотношение

$$P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{24}$$

Из вывода соотношения (24) следует: в предположении, что (23) определяет z как решение уравнения (22), соотношение (24) должно удовлетворяться тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при условии, что вместо z подставлено его значение, определённое формулой (23). Если мы потребуем больше, а именно, чтобы искомая функция V удовлетворяла соотношению (24) тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и z [т. е. рассматривая в уравнении (24), наряду с $x_1, x_2, \ldots, x_n$, также и z как независимое переменное], то (24) окажется линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка с искомой функцией V и $n+1$ независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Очевидно, каждое решение этого уравнения (24), содержащее z, будучи приравнено нулю, даёт соотношение вида (23), которое определит функцию z от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющую данному уравнению (22). Заметим, что мы наложили дополнительное ограничение, потребовав, чтобы соотношение (24) выполнялось тождественно относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$; поэтому мы не можем утверждать a priori, что указанным приёмом

получим все решения уравнения (22). Мы ещё вернёмся к этому вопросу.

Напишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую линейному уравнению в частных производных (24):

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}. \tag{25}$$

Эта система n уравнений имеет n независимых первых интегралов; пусть это будут:

$$\left.\begin{aligned} \psi_0(z, x_1, \ldots, x_n) &= C_0, \\ \psi_1(z, x_1, \ldots, x_n) &= C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \psi_{n-1}(z, x_1, \ldots, x_n) &= C_{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Общее решение уравнения (24) имеет вид:

$$V = \Phi(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}),$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция. Из предыдущего вывода следует, что *уравнение*

$$\Phi(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = 0 \tag{27}$$

определяет (если удовлетворяются условия теоремы существования для неявных функций) z *как функцию от* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *причём эта функция удовлетворяет данному уравнению* (22).

Пример 6. Найти решение уравнения:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = mf,$$

где m — постоянное. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая этому уравнению в частных производных, есть

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{df}{mf};$$

система первых интегралов

$$\frac{x_1}{x_n} = C_1, \quad \frac{x_2}{x_n} = C_2, \quad \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \quad \frac{f}{x_n^m} = C_n.$$

Решение, содержащее произвольную функцию Φ, будет:

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{f}{x_n^m}\right) = 0.$$

Разрешая относительно последнего аргумента и затем относительно f, получим:

$$f = x_n^m \Psi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right),$$

где Ψ — произвольная функция. Это — полное обращение теоремы Эйлера об однородных функциях (ср. пример 4).

2. Формула (27) решения дифференциального уравнения (22) выведена при дополнительном требовании, чтобы уравнение (24) удовлетворялось функцией V тождественно по $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Посмотрим, насколько общей является эта формула, т. е. какие частные решения в ней заключаются.

Пусть будет

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{28}$$

какое-нибудь решение уравнения (22). Возьмём в системе первых интегралов уравнений (25) в качестве произвольных постоянных начальные значения $z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$; эта система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_0(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = z_0, \\ &\psi_i(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{26'}$$

В главе VII, § 4, 1 доказаны существование и дифференцируемость этих интегралов по $z, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ в некоторой окрестности начальной точки $(z_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если это — обыкновенная точка системы (25), в которой $P_n(x_1^0, \ldots, x_n^0, z_0) \neq 0$[1]). Пусть значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и z для решения (26′) принадлежат рассматриваемой окрестности. Подставим в левые части равенств (26′) вместо z его выражение (28); для получившихся функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ введём обозначения:

$$\psi_k(\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \Psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_j} = \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_k}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Замечая, что функции $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ удовлетворяют уравнению (24), мы получаем после подстановки в соответствующие тождества

---

[1]) Если $P_n = 0$ в рассматриваемой точке, а $P_j \neq 0$, то рассуждения не изменятся, стоит только за независимое переменное взять x_j вместо x_n. К особым точкам уравнения (24) следует причислить все точки, в которых $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0$, хотя бы было $R \neq 0$.

на место z его выражения (28) систему тождеств:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(\varphi(x_1, \ldots, x_n),\ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} + R(\varphi,\ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial \psi_k}{\partial z} = 0$$

$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1). \tag{29}$$

Так как, по предположению, (28) есть решение уравнения (22), то имеем тождество:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(\varphi,\ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - R(\varphi,\ x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Умножаем последнее равенство последовательно на $\frac{\partial \psi_0}{\partial z}$, $\frac{\partial \psi_1}{\partial z}$, ..., $\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z}$ и прибавляем к соответствующим равенствам (29). В силу определения функций Ψ_k и их производных по x_j, получаем:

$$P_1(\varphi(x_1, \ldots, x_n),\ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_1} + \ldots + P_n(\varphi,\ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial \Psi_k}{\partial x_n} = 0$$

$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, n-1).$$

Таким образом, $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$ являются системой n решений уравнения в частных производных с n независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$P_1(\varphi,\ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + P_n(\varphi,\ x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Отсюда, в силу примечания к § 2, **2**, существует тождественная по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ зависимость между $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}$:

$$\Phi(\Psi_0,\ \Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}) = 0. \tag{27'}$$

Следовательно, существует такая функция $\Phi(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$, что по подстановке в неё вместо z выражения $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ мы получаем тождественно нуль. Таким образом, любое решение z при указанных условиях относительно коэффициентов P_i и R удовлетворяет соотношению вида (27). В этом смысле (27) *определяет общее решение.*

Заметим, что в противоположность однородному линейному уравнению в частных производных мы могли здесь доказать представимость при помощи формулы (27) частных решений лишь при выполнении коэффициентами уравнения добавочных условий непрерывности частных производных от коэффициентов и необращения в нуль одновременно всех коэффициентов P_i. Если эти условия не выполнены, уравнение (22) может иметь решения, не входящие в формулу (27), они соответствуют обращению в нуль левой части (24) не тождественно, а лишь в силу соотношения $V = 0$. Такие решения называются *специальными.*

Пример 7. $\frac{\partial z}{\partial x}(1+\sqrt{z-x-y})+\frac{\partial z}{\partial y}=2$. Уравнение (24) имеет здесь вид:

$$(1+\sqrt{z-x-y})\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}+2\frac{\partial V}{\partial z}=0.$$

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений есть

$$\frac{dx}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{2}.$$

Первые интегралы: 1) $z-2y=C_1$; 2) из интегрируемой комбинации $\frac{dy}{1}=\frac{dz-dy-dx}{-\sqrt{z-x-y}}$ имеем $y+2\sqrt{z-x-y}=C_2$. Общее решение получается из соотношения

$$\Phi(z-2y,\ y+2\sqrt{z-x-y})=0.$$

Но данное уравнение имеет ещё решение $z=x+y$. Если выражение $V=z-x-y$ подставить в левую часть уравнения для V, мы получим $-\sqrt{z-x-y}=-\sqrt{V}$; это выражение обращается в нуль только в силу равенства $V=0$. В этом примере в точках специального решения производные от коэффициентов перестают быть ограниченными.

3. Пусть в начальной точке $\bar{z}_0, \bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, \ldots, \bar{x}_n^0$ мы имеем:

$$P_n(\bar{z}_0, \bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_n^0)\neq 0.$$

Тогда в системе (25) можно взять x_n за независимое переменное. Систему первых интегралов обыкновенных дифференциальных уравнений (25) возьмём в виде, данном формулами (26′), причём начальные значения $z_0, x_1^0, \ldots x_{n-1}^0$ изменяются в окрестности значений $\bar{z}_0, \bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_{n-1}^0$, а x_n изменяется в окрестности $\bar{x}_n^0$.

Решим для уравнения (22) задачу Коши: *найти решение этого уравнения, которое при* $x_n=\bar{x}_n^0$ *обращается в данную дифференцируемую функцию* [определённую в окрестности значений $(\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, \ldots, \bar{x}_{n-1}^0)$]

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Подставим в интегралы (26′) вместо x_n начальное значение x_n^0, результат обозначим через $\bar{\psi}_i$; имеем:

$$\psi_i(z, x_1, \ldots, x_{n-1}, \bar{x}_n^0)=\bar{\psi}_i \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{30}$$

Формулы (26′) аналогичны формулам (42) главы VII; следовательно, их можно разрешить относительно $z, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, и результат будет аналогичен формулам (36‴) в сноске на стр. 308 [это есть решение системы (25), принимающее при $x_n=x_n^0$ начальные значения $z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$]:

$$z=\varphi_0(x_n, z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0),$$

$$x_i=\varphi_i(x_n, z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0) \quad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Подставим в эти формулы вместо x_n числовое значение $\bar{x}_n^0$ и заменим $z_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$ через $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}$. Получим выражения вида:

$$\left.\begin{aligned} z &= \omega_0(\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}), \\ x_i &= \omega_i(\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_1, \ldots, \bar{\psi}_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Легко видеть, что формулы (31) суть результат решения уравнений (30) относительно $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Решение задачи Коши даётся формулой:

$$V(z, x_1, \ldots, x_n) \equiv \omega_0(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) - \\ - \varphi[\omega_1(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1})] = 0. \tag{32}$$

Докажем прежде всего, что уравнение (32) определяет z как однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в окрестности значений $\bar{x}_1^0, \bar{x}_2^0, \ldots, \bar{x}_n^0$. Для этого достаточно показать, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 \equiv \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\substack{z=\bar{z}_0 \\ x_i=\bar{x}_i^0}} \neq 0.$$

Вычисляем эту производную:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_0}\frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \omega_0}{\partial \psi_{n-1}}\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z} - \\ - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_i}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_0}\frac{\partial \psi_0}{\partial z} + \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \omega_i}{\partial \psi_{n-1}}\frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial z}\right).$$

Согласно формулам (31), мы имеем:

$$\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \bar{\psi}_0}\right)_{\substack{x_n=x_n^0 \\ z=z_0 \\ x_i=x_i^0}} = \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \bar{\psi}_0}\right)_{\substack{z=z_0 \\ x_i=x_i^0}} = 1;$$

аналогично $\left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \bar{\psi}_i}\right)_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)_0 = 0$ [в силу формул (A) и (38) главы VII, § 3], а также $\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial \bar{\psi}_j}\right) = 1$ или 0, смотря по тому, имеем ли $i = j$ или $i \neq j$.

Далее, мы имеем:

$$\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial z}\right)_0 = 1, \quad \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z}\right)_0 = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Итак,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = 1;$$

следовательно, эта производная не обращается в нуль в окрестности точки $(\bar{z}_0, \bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_n^0)$, и формула (32) определяет z как функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Так как формула (32) является специальным видом уравнения (27), то полученная из неё функция z есть решение уравнения (22). Наконец, легко

видеть, что она решает поставленную задачу Коши. В самом деле, при $x_n = \overline{x}_n^0$ функции ψ_i обратятся в $\overline{\psi}_i$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$), в силу равенств (30); функции $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ от этих аргументов ввиду равенств (31), дадут соответственно $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$, и мы получим: $z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ при $x_n = \overline{x}_n^0$.

Таким образом, *формула* (27) (при надлежащем выборе первых интегралов) *даёт все частные решения, определяемые начальными данными Коши.*

Самое построение показывает, что решение задачи Коши — единственное в классе решений, удовлетворяющих условиям непрерывной дифференцируемости и одновременного необращения в нуль коэффициентов уравнения в точках решения.

Примечание. Для доказательства возможности решения задачи Коши мы исходили из первых интегралов специальной формы. На практике большей частью той же цели можно достигнуть, исходя из любой системы n независимых первых интегралов:

$$\psi_0(z, x_1, \ldots, x_n) = C_0, \quad \psi_i(z, x_1, \ldots, x_n) = C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \qquad (26'')$$

Схема выкладок такова: пишем уравнения (30), разрешаем их относительно $z, x_1, \ldots, x_{n-1}$, получаем формулы (31) и находим искомое решение по формуле (32).

Пример 8. Для уравнения примера 7 найти решение, удовлетворяющее данным Коши:

$$z = 2x \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Исходим из первых интегралов $\psi_0 \equiv z - 2y = C_1$, $\psi_1 \equiv y + 2\sqrt{z-x-y} = C_2$. Подставляя значение $y = 0$, получаем:

$$z = \overline{\psi}_0, \; 2\sqrt{z-x} = \overline{\psi}_1, \quad \text{откуда} \quad z = \overline{\psi}_0, \quad x = \overline{\psi}_0 - \frac{\overline{\psi}_1^2}{4}.$$

Подставляя эти значения в данное начальное уравнение и заменяя $\overline{\psi}_i$ через ψ_i, получим искомое решение:

$$\psi_0 - 2\psi_0 + \frac{\psi_1^2}{2} = 0,$$

или $2\psi_0 - \psi_1^2 = 0$. Иначе:

$$2z - 4y - y^2 - 4y\sqrt{z-x-y} - 4z + 4x + 4y = 0,$$

или

$$4y\sqrt{z-x-y} = 4x - 2z - y^2,$$

откуда

$$z = 2x + \frac{3}{2}y^2 - 2y\sqrt{x - y + \frac{y^2}{2}}$$

(знак минус перед радикалом, как это следует из проверки, соответствует знаку плюс перед радикалом в данном уравнении).

4. Линейное уравнение между тремя переменными; геометрическое истолкование. Для случая двух независимых переменных (мы их будем обозначать x, y) система трёх переменных x, y, z допускает простое истолкование — как

координаты точки трёхмерного пространства. Эта интерпретация поможет нам глубже проникнуть в факты, связанные с линейным уравнением в частных производных. Введём обозначения Монжа для частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv q$$

и напишем уравнение в виде:

$$Pp + Qq = R, \tag{33}$$

где P, Q, R — заданные (дифференцируемые) функции от x, y, z.

Искомое решение $z = f(x, y)$ представляет собой уравнение поверхности (интегральная поверхность), p и q — угловые коэффициенты её касательной плоскости в точке с координатами (x, y, z).

Уравнение этой плоскости есть

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \tag{T}$$

Уравнение (33) относит каждой точке пространства вектор

$$(P, Q, R). \tag{V}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку (x, y, z) в направлении, даваемом векторным полем, есть

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{R}. \tag{D}$$

Уравнение в частных производных (33) показывает, что прямая (D) лежит в плоскости (T).

Кривые в пространстве, которые в каждой точке касаются соответствующего вектора (P, Q, R) и вообще называются векторными кривыми, для уравнения (33) *называются характеристическими кривыми или характеристиками.* Их дифференциальные уравнения суть:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}. \tag{34}$$

Мы покажем, что *каждая интегральная поверхность составляется из характеристик.* В самом деле, поставим себе задачу: найти на данной интегральной поверхности $z = f(x, y)$ такие кривые, которые в каждой точке касаются вектора (V); очевидно, для проекций этих кривых на плоскость (x, y) мы получаем уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$, где в правой части надо заменить z через функцию $f(x, y)$. Но мы можем добавить ещё одно дифференциальное уравнение; в самом деле, при перемещении по поверхности

дифференциалы связаны соотношением

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

или

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx} = p + q\frac{Q}{P} = \frac{Pp + Qq}{P}.$$

В силу уравнения (33), это даёт $\frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}$, т. е. мы пришли к дифференциальным уравнениям характеристик (34). Заметим, что *система* (34) *может быть проинтегрирована без знания интегральной поверхности*, и мы получим *семейство характеристик от двух параметров*, обладающее тем свойством, что через каждую точку (x_0, y_0, z_0) пространства (точнее: той области, где выполнены условия существования и единственности решения) проходит одна характеристическая кривая. Если взять два первых интеграла системы (34):

$$u(x, y, z) = a, \quad v(x, y, z) = b, \tag{35}$$

то характеристики определятся как линии пересечения двух семейств поверхностей (35). Обратно, если на некоторой поверхности с непрерывно изменяющейся касательной плоскостью через каждую точку поверхности проходит лежащая на ней характеристика, то эта поверхность есть интегральная; в самом деле, в каждой её точке вектор (V) лежит в плоскости (T), т. е. удовлетворяется уравнение (33).

Теперь ясно, как построить интегральные поверхности; для этого достаточно из семейства характеристик (35) от двух параметров выделить семейство от одного параметра по некоторому закону, притом так, чтобы полученная поверхность имела непрерывно изменяющуюся касательную плоскость, а для этой цели достаточно установить между параметрами a и b одно произвольное соотношение

$$\Phi(a, b) = 0,$$

где Φ — дифференцируемая функция.

Исключая из этого соотношения и из уравнений (35) a и b, мы получаем уравнение интегральной поверхности:

$$\Phi[u(x, y, z), v(x, y, z)] = 0. \tag{36}$$

Задача Коши может быть поставлена в обобщённой форме (см. § 1, 4): дана пространственная кривая с непрерывно изменяющейся касательной; найти проходящую через неё интегральную поверхность. Геометрическое решение этой задачи очевидно: достаточно взять совокупность характеристик, проходящих через все точки данной кривой, и они образуют искомую поверхность.

Аналитически, если линия задана уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{C''}$$

то искомая интегральная поверхность может быть получена следую-

щим образом: подставляя эти заданные выражения x, y, z в функции t в левые части уравнений (35), мы получим выражения a и b в функции t; исключая t, получим требуемое соотношение между a и b.

Для исключения t можно разрешить, например, уравнение $u[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] = a$ относительно t, т. е. найти пересечение поверхности $u = a$ с кривой (C″); это невозможно, если кривая (C″) лежит на поверхности $u = a_0$, где a_0 есть постоянное; но тогда сама эта поверхность $u(x, y, z) = a_0$ есть искомая в задаче Коши интегральная поверхность. Наконец, если заданная кривая лежит на двух поверхностях $u = a_0$ и $v = b_0$, то она сама есть характеристика, и задача Коши становится неопределённой, так как каждая характеристика принадлежит бесконечному множеству интегральных поверхностей. Тогда уравнения этой характеристики суть:

$$u(x, y, z) = a_0, \quad v(x, y, z) = b_0,$$

и любая поверхность $\Phi(u, v) = 0$ проходит через эту характеристику, если только $\Phi(a_0, b_0) = 0$.

Примечание. Можно a priori определить характеристики как такие кривые, для которых задача Коши является неопределённой.

5. Мы видели, что общее решение уравнения (33) имеет вид:

$$\Phi[\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z)] = 0, \tag{36′}$$

где φ и ψ — некоторые определённые функции, а Φ — произвольная функция.

Легко видеть, что, обратно, дифференцируя равенство (36′) и исключая произвольную функцию Φ, мы придём к линейному уравнению в частных производных вида (33). В самом деле, дифференцируя (36′) соответственно по x и по y, получаем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}p\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}p\right)=0,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}q\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}q\right)=0.$$

Исключая из этих равенств $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial\psi}$, приходим к уравнению:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}p & \frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial z}p \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}q & \frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}q \end{vmatrix}=0,$$

или

$$p\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}+q\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

т. е. мы получим линейное неоднородное уравнение в частных производных первого порядка.

Пример 9. Уравнение всевозможных конических поверхностей с вершиной в начале координат имеет вид:

$$\Phi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right) = 0,$$

или $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, где Φ и φ — произвольные функции.

Найдём соответствующее уравнение в частных производных. Дифференцируя уравнение во второй форме сначала по x, затем по y, получаем:

$$p = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad q = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Исключая из данного уравнения и двух полученных соотношений φ и φ', приходим к уравнению:

$$p = \frac{z}{x} - \frac{qy}{x}, \text{ или } px + qy = z.$$

Характеристики уравнения даются соотношениями $\frac{z}{x} = C_1$, $\frac{y}{x} = C_2$; это — связка прямых, проходящих через начало координат.

ЗАДАЧИ.

199. Проинтегрировать уравнение $(mz - ny)p + (nx - lz)q = ly - mx$. Указать геометрический смысл характеристик и общего решения (l, m, n — постоянные числа).

Найти общее решение уравнений:

200. $(y + z + u)\frac{\partial u}{\partial x} + (z + u + x)\frac{\partial u}{\partial y} + (u + x + y)\frac{\partial u}{\partial z} = x + y + z.$

201. $\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c\frac{\partial u}{\partial z} = xyz$ (b, c — постоянные).

202. $(y^3x - 2x^4)p + (2y^4 - x^3y)q = 9z(x^3 - y^3)$.

203. Для уравнения $z(x + z)p - y(y + z)q = 0$ решить задачу Коши: $z = \sqrt{y}$ при $x = 1$.

204. Найти уравнение в частных производных поверхностей, описанных прямою, которая движется, пересекая данную прямую под данным углом.

Проинтегрировать это уравнение.

Указание. Взять данную прямую за ось Oz.