ГЛАВА IX.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

В дальнейшем мы будем рассматривать уравнения в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными; однако значительная часть результатов, которые мы получим, может быть распространена на случай любого числа независимых переменных. Обозначая независимые переменные буквами x, y, искомую функцию буквой z и пользуясь для частных производных обозначениями Монжа:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

мы ставим своей задачей разрешение уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

Оказывается более простой задачей решение не одного уравнения вида (1), а системы двух *совместных уравнений* вида (1), т. е. двух уравнений, допускающих общее им обоим решение $z(x, y)$. Эту задачу мы и рассмотрим в первом параграфе. Решение мы будем интерпретировать как поверхность (интегральная поверхность).

§ 1. Система двух совместных уравнений первого порядка.

Пусть нам даны два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= 0, \\ G(x, y, z, p, q) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Мы предположим, что в некоторой области изменения переменных x, y, z, p, q эти уравнения могут быть разрешены относительно p и q. Напишем результат разрешения в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= A(x, y, z), \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= B(x, y, z) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(относительно дифференцируемости правых частей мы введём ограничения в дальнейшем).

Два уравнения (2) или (3), содержащих только одну искомую функцию z, не являются, вообще говоря, совместными, т. е. не имеют общих решений.

Выведем необходимое *условие совместности* системы, написанной в форме (3). Допустим, что существует общее решение обоих уравнений z, имеющее непрерывные частные производные первого порядка и непрерывную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$. Подставив это решение в уравнения (3), мы получим тождества. Из этих тождеств можно найти два выражения для второй производной $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$. Из первого уравнения имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

или $\left(\text{заменяя } \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ в силу второго уравнения, его значением}\right)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B.$$

Аналогично из второго уравнения (3) находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A.$$

[Мы предполагаем существование и непрерывность производных $\frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z}, \frac{\partial B}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial z}$ в окрестности начальной точки (x_0, y_0, z_0).] Приравнивая друг другу оба значения второй смешанной производной (ввиду её непрерывности, результат не зависит от порядка дифференцирования), получаем искомое необходимое условие:

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A. \tag{4}$$

В силу нашего вывода, равенство (4) должно удовлетворяться, если вместо z подставим общее двум уравнениям решение $z(x, y)$.

Если условие (4) не выполняется тождественно, то это есть уравнение между тремя переменными x, y, z; оно определит, вообще говоря, z как неявную функцию от x и y, $z=\varphi(x, y)$, и предыдущие рассуждения показывают, что решение системы (3), если оно существует, не может быть иным, как этой функцией. Прямая подстановка в систему (3) даст нам ответ на вопрос, является ли функция $z=\varphi(x, y)$ решением системы (3) или нет.

Мы оставим этот случай в стороне. Нашей главной целью является найти условия, при которых система (3) имеет бесконечное множество решений, так чтобы через каждую

точку (x_0, y_0, z_0) рассматриваемой области пространства проходила поверхность, соответствующая некоторому решению. В таком случае условие (4) должно выполняться во всякой точке этой области, т. е. тождественно по x, y, z.

Итак, *тождественное выполнение условия* (4) *необходимо для того, чтобы система* (3) *имела множество решений, зависящее хотя бы от одного произвольного постоянного.*

Покажем, что тождественное выполнение условия (4) является также достаточным для совместности системы (3). Именно, мы покажем, что при выполнении этого условия нахождение совместных решений (3) сводится к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проинтегрируем сначала первое из уравнений (3), рассматривая в нём y как параметр. Пока этот параметр не изменяется, мы вправе рассматривать это уравнение как обыкновенное дифференциальное:

$$\frac{dz}{dx} = A(x, y, z). \tag{3$_1$}$$

Начальное условие для уравнения (3_1) пусть будет $z = \zeta(y)$ при $x = x_0$, где x_0 — заданное число; таким образом, при $x = x_0$ для различных значений параметра y начальное значение ζ предполагается различным: функцию $\zeta(y)$ пока оставляем неопределённой (но дифференцируемой). Решение уравнений (3_1) имеет вид:

$$z = \varphi(x, y; x_0, \zeta(y)), \tag{5}$$

причём, в силу начального условия,

$$\varphi(x_0, y; x_0, \zeta(y)) = \zeta(y), \tag{5$_1$}$$

откуда, дифференцируя, находим:

$$\zeta'(y) = \varphi'_y + \varphi'_\zeta \zeta'(y). \tag{5$_2$}$$

Потребуем теперь, чтобы выражение (5) удовлетворяло второму из уравнений (3); это условие даёт нам возможность определить функцию $\zeta(y)$. Подставляя, мы получим:

$$\varphi'_y + \varphi'_\zeta \frac{d\zeta}{dy} = B(x, y, \varphi(x, y; x_0, \zeta(y))). \tag{6}$$

В силу существования и непрерывности производной A'_y, производная φ'_y существует и удовлетворяет уравнению в вариациях (глава VII, § 3, примечание 2):

$$\frac{d}{dx}\varphi'_y = A'_z(x, y, \varphi)\varphi'_y + A'_y(x, y, \varphi). \tag{6$_1$}$$

В силу того же условия существует и производная от φ по начальному значению ζ; она удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dx}\varphi'_\zeta = A'_z(x, y, \varphi)\varphi'_\zeta. \tag{6_2}$$

Формулы (6_1) и (6_2) доказывают существование непрерывных производных φ''_{yx} и $\varphi''_{\zeta x}$. При этом φ'_ζ, как решение однородного линейного уравнения, нигде не обращается в нуль.

Разрешаем уравнение (6) относительно $\frac{d\zeta}{dy}$:

$$\frac{d\zeta}{dy} = \frac{B(x, y, \varphi) - \varphi'_y}{\varphi'_\zeta}. \tag{7}$$

Левая часть равенства (7) есть функция одного y; посмотрим, при каких условиях то же имеет место для правой части (7). Вычисляя производную правой части по x, мы в числителе получим выражение:

$$[B'_x(x, y, \varphi) + B'_z(x, y, \varphi)\varphi'_x - \varphi''_{yx}]\varphi'_\zeta - \varphi''_{\zeta x}[B(x, y, \varphi) - \varphi'_y]. \tag{7_1}$$

В силу сделанного выше замечания, вторые производные $\varphi''_{\zeta x}$ и φ''_{yx} существуют; мы заменяем в (7_1) φ'_x через $A(x, y, \varphi)$ и, далее, при помощи уравнений (6_1), (6_2) заменяем $\varphi''_{\zeta x}$ и φ''_{yx} через их выражения; после упрощений получаем:

$$\varphi'_\zeta(B'_x + B'_z A - A'_z B - A'_y). \tag{7_2}$$

Выражение в скобках в (7_2) тождественно равно нулю по условию, т. е. правая часть равенства (7), действительно, не зависит от x; это есть обыкновенное дифференциальное уравнение с искомой функцией $\zeta(y)$ и независимым переменным y. Чтобы выяснить, что его правая часть в наших предположениях удовлетворяет условию Липшица, преобразуем его. Заметим, что, ввиду независимости правой части от x, мы можем во всех выражениях в правой части заменить x на x_0. А в этом случае, применяя тождества (5_1) и (5_2) к уравнению (6), эквивалентному (7), находим:

$$\frac{d\zeta}{dy} = B(x_0, y, \zeta(y)). \tag{8}$$

Правая часть уравнения (8) удовлетворяет условию существования и единственности решения вследствие существования непрерывной производной B'_z. Интегрируя (8), при начальном условии $\zeta(y_0) = z_0$, мы получаем:

$$\zeta = \psi(y; y_0, z_0), \text{ причём } \psi(y_0; y_0, z_0) = z_0. \tag{8'}$$

Подставляя это решение в выражение (5), находим решение системы уравнений (3):

$$z = \varphi\big(x,\ y;\ x_0,\ \psi(y;\ y_0,\ z)\big), \tag{5_3}$$

которое при $x = x_0$, $y = y_0$ обращается в z_0. В силу построения и свойства единственности тех обыкновенных дифференциальных уравнений, которые мы интегрировали, мы приходим к выводу: *при наличии непрерывных частных производных* A'_y, A'_z, B'_x, B'_z *и при выполнении условий интегрируемости система* (3) *имеет единственное решение* $z = \Phi(x, y)$, *принимающее при* $x = x_0$, $y = y_0$ *заданное значение* z_0.

Примечание 1. Общее решение системы (3) представляет семейство поверхностей от одного параметра. В самом деле, мы получим все решения в рассматриваемой области, если придадим x_0 и y_0 численные значения $\bar{x}_0$ и $\bar{y}_0$ и будем рассматривать z_0 как произвольное постоянное C. Решение (5_3) будет иметь вид:

$$z = \Phi(x,\ y,\ C). \tag{5_4}$$

Уравнение (5_4) разрешимо относительно $C \equiv z_0$. В самом деле, решение (8′) уравнения (8) разрешимо относительно z_0: меняя роли начальных координат $(y_0,\ z_0)$ и текущих координат $(y,\ \zeta)$, мы имеем:

$$z_0 = \psi(y_0;\ y,\ \zeta).$$

С другой стороны, решение (5) разрешимо относительно начального значения ζ, и мы имеем:

$$\zeta = \varphi(x_0,\ y_0;\ x,\ z).$$

Подставляем последнее выражение на место ζ в предыдущее равенство:

$$\psi\big(y_0;\ y,\ \varphi(x_0,\ y_0;\ x,\ z)\big) = z_0. \tag{5_5}$$

Легко убедиться в том, что левая часть равенства (5_5) допускает непрерывные производные по x, y, z.

Примечание 2. В приведённых теоретических рассуждениях мы при интегрировании уравнения (3_1) брали произвольное постоянное $\zeta(y)$ как начальное значение z при $x = x_0$ и любом y. На практике можно находить общее решение этого уравнения, содержащее любое произвольное C, и затем заменять это постоянное через искомую функцию $u(y)$; уравнение вида (7) для определения этой функции, как легко убедиться (если все производные существуют), также не зависит от x. Переменные x и y можно, конечно, поменять местами.

Пример 1.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + yz, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 + 2xz.$$

Составляем выражение:

$$A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A = z + (1+y)(z^2 + 2xz) - 2z - \\ - 2(z+x)(z+yz) = z[-1 - z(1+y)].$$

Это выражение не равно нулю тождественно; приравнивая его нулю, получаем для значения z: $z = 0$ и $z = -\frac{1}{1+y}$. Подстановкой убеждаемся в том, что первое значение даёт решение нашей системы, а второе — нет.

Пример 2. $\frac{\partial z}{\partial x} = ay^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b}{2y^2} + \frac{2z}{y} - ay^2$ (Имшенецкий). Условие совместности

$$A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A = 2ay - \frac{2}{y} ay^2 = 0$$

выполняется тождественно. Интегрируем указанным в примечании 2 способом. Из первого уравнения имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ay^2, \quad z = axy^2 + u(y);$$

подставляем во второе:

$$2axy + u'(y) = \frac{b}{2y^2} + 2axy + \frac{2u}{y} - ay^2, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dy} - \frac{2u}{y} = \frac{b}{2y^2} - ay^2,$$

линейное уравнение первого порядка относительно u. Написав его в виде:

$$y^{-2}\,du - 2y^{-3}u\,dy = \frac{b}{2}\,y^{-4}\,dy - a\,dy,$$

находим

$$y^{-2}u = -\frac{b}{6y^3} - ay + C, \text{ откуда } u = \frac{-b}{6y} - ay^3 + Cy^2.$$

Подставляя это значение в найденное выражение для z, находим общее решение системы:

$$z = -\frac{b}{6y} + Cy^2 + ay^2(x - y).$$

§ 2. Уравнение Пфаффа.

1. Этим именем называется уравнение:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{9}$$

где P, Q, R — данные в некоторой области D функции от x, y, z, удовлетворяющие условиям непрерывности и дифференцируемости, которые будут ясны из дальнейшего.