Составляем выражение:

$$A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A = z + (1+y)(z^2 + 2xz) - 2z - \\ - 2(z+x)(z+yz) = z[-1 - z(1+y)].$$

Это выражение не равно нулю тождественно; приравнивая его нулю, получаем для значения z: $z = 0$ и $z = -\frac{1}{1+y}$. Подстановкой убеждаемся в том, что первое значение даёт решение нашей системы, а второе — нет.

Пример 2. $\frac{\partial z}{\partial x} = ay^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b}{2y^2} + \frac{2z}{y} - ay^2$ (Имшенецкий). Условие совместности

$$A'_y + A'_z B - B'_x - B'_z A = 2ay - \frac{2}{y} ay^2 = 0$$

выполняется тождественно. Интегрируем указанным в примечании 2 способом. Из первого уравнения имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ay^2, \quad z = axy^2 + u(y);$$

подставляем во второе:

$$2axy + u'(y) = \frac{b}{2y^2} + 2axy + \frac{2u}{y} - ay^2, \quad \text{или} \quad \frac{du}{dy} - \frac{2u}{y} = \frac{b}{2y^2} - ay^2,$$

линейное уравнение первого порядка относительно u. Написав его в виде:

$$y^{-2}\,du - 2y^{-3}u\,dy = \frac{b}{2}\,y^{-4}\,dy - a\,dy,$$

находим

$$y^{-2}u = -\frac{b}{6y^3} - ay + C, \text{ откуда } u = \frac{-b}{6y} - ay^3 + Cy^2.$$

Подставляя это значение в найденное выражение для z, находим общее решение системы:

$$z = -\frac{b}{6y} + Cy^2 + ay^2(x - y).$$

§ 2. Уравнение Пфаффа.

1. Этим именем называется уравнение:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0, \tag{9}$$

где P, Q, R — данные в некоторой области D функции от x, y, z, удовлетворяющие условиям непрерывности и дифференцируемости, которые будут ясны из дальнейшего.

Сначала исследуем геометрическое значение уравнения (9). В каждой точке рассматриваемой области пространства задан некоторый вектор (P, Q, R), т. е. задано векторное поле; так как уравнение (9) переходит в равносильное при умножении на любой множитель, отличный от нуля, то, в сущности, нам задано только направление вектора, или, иначе, задано поле направлений. Мы допускаем, что ни в одной точке области не имеют места одновременно равенства $P=Q=R=0$ (точки обращения одновременно в нуль, P, Q, R, являются особыми).

Уравнение (9) показывает, прежде всего, что x, y, z не могут оставаться независимыми в области D, так как иначе dx, dy, dz были бы независимыми приращениями, и в области D мы имели бы $P\equiv 0$, $Q\equiv 0$, $R\equiv 0$, против условия. Следовательно, между этими переменными существует по крайней мере одно соотношение, и совокупность значений x, y, z, удовлетворяющих уравнению (9), есть (при некоторых естественных ограничениях) многообразие числа измерений $\leqslant 2$ (интегральное многообразие).

Очевидно, что уравнению (9) удовлетворяет решение $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, (x_0, y_0, z_0 — постоянные). Мы считаем это решение тривиальным, и в дальнейшем не будем его рассматривать. Таким образом, число измерений интегрального многообразия будет у нас $\geqslant 1$. Само уравнение (9) показывает, что бесконечно малое перемещение dx, dy, dz вдоль интегрального многообразия из точки x, y, z перпендикулярно к направлению векторного поля в этой точке (т. е. всякая касательная прямая к многообразию перпендикулярна к соответствующему вектору). Ясно, что задача нахождения интегрального многообразия уравнения (9) будет носить различный аналитический характер, смотря по тому, ищем ли мы интегральное многообразие двух измерений или одного измерения.

2. Предположим сначала, что искомое многообразие двумерное. Допустим, что в окрестности некоторой точки (x_0, y_0, z_0) его можно представить в форме: $z=\varphi(x, y)$. Тогда z будет искомой функцией, а x и y — двумя независимыми переменными. Из формулы (9) мы получим выражение для дифференциала z:

$$dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy$$

(мы должны предположить, что $R(x_0, y_0, z_0)\neq 0$). С другой стороны, для выражения полного дифференциала функции z мы имеем:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Из этих двух равенств вытекает, в силу независимости дифференциалов dx и dy, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{P}{R},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Q}{R}. \tag{10}$$

Мы получаем систему двух уравнений вида (3). Как мы видели в предыдущем параграфе, вообще говоря, эта система не имеет решения, т. е. уравнение Пфаффа (9) не допускает интегрального многообразия двух измерений. На геометрическом языке это значит, что векторное поле (P, Q, R), вообще говоря, не допускает семейства поверхностей, которые были бы в каждой точке ортогональны к направлению соответствующего вектора. Если же такое семейство существует, то говорят, что уравнение Пфаффа *вполне интегрируемо* или *интегрируемо одним соотношением*. Для существования такого семейства интегральных многообразий двух измерений необходимо и достаточно выполнения условия (4), которое для уравнения (10) напишется в виде:

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{R}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P}{R}\right)\frac{Q}{R}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{R}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q}{R}\right)\frac{P}{R}=0.$$

Производя дифференцирования, умножая на не равный нулю множитель R^3 и меняя знаки, получим:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0. \tag{11}$$

Условие (11) имеет вполне симметричную форму относительно P, Q, R и x, y, z. Если бы в начальной точке было $R=0$, но, например, $P(x_0, y_0, z_0)\neq 0$, то при выполнении условия (11) мы нашли бы кусок интегрального многообразия двух измерений в форме $x=\psi(y, z)$.

При тождественном выполнении условия (11) *уравнение Пфаффа интегрируемо одним соотношением. Это условие является необходимым и достаточным.*

Покажем, что, обратно, *всякое семейство поверхностей от одного параметра* (при условии существования надлежащих производных) *является общим решением некоторого вполне интегрируемого уравнения Пфаффа.*

Напишем данное семейство в виде:

$$\Phi(x, y, z)=C. \tag{12}$$

Дифференцируя соотношение (12), получаем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dz=0.$$

Последнее уравнение допускает умножение на произвольную функцию от x, y, z; таким образом, (12) является интегральным многообразием для уравнения Пфаффа вида (9), причём необходимо имеют место равенства:

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{P}=\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{Q}=\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}{R}=\mu(x, y, z). \tag{13}$$

Разрешая уравнение (5_4), дающее общее решение вполне интегрируемого уравнения Пфаффа, относительно постоянного C, мы можем привести его к виду (5_5) или (12); следовательно, всегда имеют место соотношения (13). Иначе их можно переписать так:

$$\mu P = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{14}$$

а само уравнение (9) по умножении на μ примет вид:

$$\mu (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\,dz = 0, \tag{9'}$$

или

$$d\Phi = 0.$$

Таким образом, *для вполне интегрируемого уравнения Пфаффа всегда существует интегрирующий множитель* μ, *по умножении на который левая часть становится полным дифференциалом* некоторой функции от трёх переменных.

Из предыдущего очевидно, что и обратно, если существует интегрирующий множитель уравнения (9), то оно приводится к виду (9′) и интегрируется одним соотношением $\Phi = C$. Можно проверить это непосредственной выкладкой. По предположению, существует интегрирующий множитель μ уравнения (9), т. е. имеют место соотношения (14). Дифференцируем первое из них по y и приравниваем результату дифференцирования второго по x; далее приравниваем результаты дифференцирования второго по z и третьего по y; наконец, третьего по x и первого по z; получаем, перенося члены с μ в одну сторону, а члены с производными от μ в другую:

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y},$$

$$\mu\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) = R\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial z},$$

$$\mu\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) = P\frac{\partial \mu}{\partial z} - R\frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Умножая полученные три уравнения, соответственно, на R, P, Q, складывая и деля на множитель μ, не равный нулю (по крайней мере там, где поверхность (12) не имеет особой точки), получаем соотношение (11). Таким образом, если существует интегрирующий множитель для уравнения (9), то условие полной интегрируемости выполнено.

Примечание 1. Можно дать геометрическое истолкование условию полной интегрируемости в форме (4). Пусть мы исходим из точки (x, y, z) интегрального многообразия и продвигаемся по этому многообразию в точку $(x + dx, y)$; тогда получим значение:

$$z + \frac{\partial z}{\partial x}\,dx = z + A\,dx;$$

далее, переходим от точки $(x+dx,\ y)$ к точке $(x+dx,\ y+dy)$, не сходя с интегрального многообразия; соответствующее значение z будет:

$$z+A\,dx+\frac{\partial}{\partial y}(z+A\,dx)\,dy=z+A\,dx+B\,dy+(A'_y+A'_zB)\,dx\,dy.$$

Если мы продвинемся по интегральному многообразию сначала до точки $(x,\ y+dy)$, а затем до точки $(x+dx,\ y+dy)$, то соответствующее значение z будет:

$$z+A\,dx+B\,dy+(B'_x+B'_zA)\,dx\,dy.$$

Условия (4) выражают, что эти значения (с точностью до бесконечно малых порядка выше второго) равны, т. е. что значение функции z в бесконечно близкой точке не зависит от пути, по какому мы пришли в эту точку,

Примечание 2. Если μ есть какой-нибудь интегрирующий множитель уравнения (9), а $\Phi(x,\ y,\ z)=C$ — общее решение этого уравнения, то легко видеть, что наиболее общий вид интегрирующего множителя есть $\mu_1=\mu F(\Phi)$, где F — произвольная функция.

Примечание 3. Ввиду симметрии относительно x, y, z уравнения Пфаффа в форме (9), его можно привести к любой из трёх форм:

$$1)\ dz=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy,\quad 2)\ dx=-\frac{Q}{P}dy-\frac{R}{P}dz;$$

$$3)\ dy=-\frac{P}{Q}dx-\frac{R}{Q}dz.$$

Следовательно, в случае полной интегрируемости оно приводится к любой из трёх систем двух уравнений в частных производных:

$$1)\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{P}{R},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{Q}{R};\quad 2)\ \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{Q}{P},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{R}{P};$$

$$3)\ \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{P}{Q},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{R}{Q}.$$

Этим произволом можно пользоваться при решении задач, выбирая наиболее простое уравнение для начального интегрирования.

3. Рассмотрим теперь случай, когда для уравнения Пфаффа (9) не выполняется условие полной интегрируемости (11). Из предыдущего следует, что в таком случае не существует интегральных многообразий двух измерений. Будем тогда искать интегральные многообразия одного измерения. В этом случае будет только одно независимое переменное; примем за него x.

Уравнение (9) можно теперь написать в виде:

$$P(x,\ y,\ z)+Q(x,\ y,\ z)\frac{dy}{dx}+R(x,\ y,\ z)\frac{dz}{dx}=0. \tag{15}$$

Мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с двумя искомыми функциями. Задача его интегрирования заключает большую степень произвола. Мы можем задать произвольно одну искомую функцию, например

$$z = f(x); \tag{16}$$

тогда, вставляя в уравнение (15), получим:

$$P(x, y, f(x)) + R(x, y, f(x))f'(x) + Q(x, y, f(x))\frac{dy}{dx} = 0$$

— обыкновенное дифференциальное уравнение с одной искомой функцией y; его общее решение пусть будет (мы предполагаем, что выполнены условия теоремы Коши, например, что существуют производные P'_y, Q'_y, R'_y и что в начальной точке $Q \neq 0$):

$$y = g(x, C). \tag{17}$$

Совокупность уравнений (16) и (17) даёт интегральное многообразие одного измерения для уравнения Пфаффа (9).

Можно дать первое соотношение в общей форме $\Psi(x, y, z) = 0$, или

$$z = \varphi(x, y). \tag{16_1}$$

Подставляя это значение z в уравнение (15), получаем:

$$P(x, y, \varphi(x, y)) + R(x, y, \varphi(x, y))\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \\ + \left[Q(x, y, \varphi(x, y)) + R(x, y, \varphi(x, y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

— опять обыкновенное дифференциальное уравнение между x и y.

Вводя соответствующие предположения для того, чтобы выполнялись условия теоремы Коши, и обозначая решение этого уравнения через $y = \psi(x, C)$, мы получим уравнения интегрального многообразия одного измерения в виде:

$$\Psi(x, y, z) = 0, \quad y = \psi(x, C). \tag{17_1}$$

Таким образом, наиболее общее *интегральное многообразие одного измерения, удовлетворяющее уравнению Пфаффа, зависит от одной произвольной функции и затем ещё от одного произвольного постоянного.*

Легко дать геометрическую интерпретацию полученному результату. Произвольная функция в виде (16) представляет произвольный цилиндр с образующими, параллельными оси Oy, а в виде (16_1) — вообще произвольную поверхность. Совокупность уравнений (16_1) и (17) или (17_1) представляет семейство кривых от одного параметра, лежащих на этой поверхности (решение обыкновенного дифференциального уравнения между x и y даёт уравнение проекций кривых

этого семейства на плоскость xOz). Таким образом, интегральные кривые уравнения Пфаффа на произвольной заданной поверхности составляют семейство от одного параметра.

Примечание. Если уравнение Пфаффа вполне интегрируемо, можно также методом настоящего раздела разыскивать для него интегральные кривые. При этом мы получим следующий результат. Уравнение (9) допускает интегрирующий множитель $\mu(x, y, z)$; пусть $\mu(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = d\Phi(x, y, z)$; уравнение, полученное подстановкой (16_1), вида:

$$\left(P + R\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx + \left(Q + R\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dy = 0,$$

очевидно, допускает интегрирующий множитель

$$\bar{\mu} = \mu(x, y, \varphi(x, y)),$$

так как по умножении на него левая часть этого уравнения обратится в полный дифференциал $d\Phi(x, y, \varphi(x, y))$.

Итак, интегральные кривые определяются двумя уравнениями:

$$z = \varphi(x, y), \quad \Phi(x, y, \varphi(x, y)) = C,$$

или, что то же,

$$\Phi(x, y, z) = C, \quad z = \varphi(x, y).$$

Мы приходим к заключению: в случае полной интегрируемости уравнения Пфаффа, интегральными многообразиями одного измерения являются произвольные кривые, расположенные на интегральных поверхностях. Этот факт геометрически очевиден.

4. Пфаффовы формы. Пфаффовой формой называется выражение вида:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1, \ldots, x_n)\,dx_i.$$

Теория пфаффовых форм представляет хорошо развитый отдел анализа [1]). Мы приведём здесь некоторые результаты, касающиеся пфаффовых форм от трёх переменных,

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \tag{A}$$

где P, Q, R — данные функции от x, y, z; для дальнейших выводов мы их предположим непрерывно дифференцируемыми два раза. Рассмотрим приведение формы (A) к простейшему, каноническому виду. Здесь могут представиться три случая:

1) Форма (A) представляет точный дифференциал; следовательно, существует такая функция $u(x, y, z)$, что имеет место равенство:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du. \tag{A_1}$$

---

[1]) См., например, П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений с частными производными, Гостехиздат, 1947, и Э. Картан, Интегральные инварианты.

Замечая, что в таком случае $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial u}{\partial y}$, $R=\frac{\partial u}{\partial z}$, мы из сравнения различных выражений для вторых смешанных производных получаем три необходимых условия для представления формы (A) в виде (A_1):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{B$_1$}$$

Легко убедиться в том, что эти условия также достаточны для представления формы Пфаффа в виде (A_1), причём для u получаем значение:

$$u=\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy+\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz+C,$$

где C — произвольная постоянная (ср. главу II, § 3, **1**).

2) Условия (B_1) не выполняются, но имеет место тождество:

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0. \tag{B$_2$}$$

В таком случае, как мы видели, выражение (A) допускает интегрирующий множитель; в силу соотношений (13), меняя обозначения $\left(\frac{1}{\mu}=u,\ \Phi=v\right)$, мы можем придать пфаффовой форме вид:

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz=u\,dv. \tag{A$_2$}$$

3) Не выполнены ни условия (B_1), ни (B_2). Покажем, что в этом случае можно от формы (A) отнять полный дифференциал так, что для разности будет выполнено условие (B_2). Итак, ищем такую функцию $u(x, y, z)$, что если положить

$$P\,dx+Q\,dy+R\,dz-du=P_1\,dx+Q_1\,dy+R_1\,dz,$$

то будет выполнено соотношение

$$P_1\left(\frac{\partial Q_1}{\partial z}-\frac{\partial R_1}{\partial y}\right)+Q_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial z}\right)+R_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)=0. \tag{B$_3$}$$

Заменяя в соотношении (B_3) P_1, Q_1, R_1 их выражениями:

$$P_1=P-\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q_1=Q-\frac{\partial u}{\partial y}, \quad R_1=R-\frac{\partial u}{\partial z},$$

мы после приведений получим для u уравнение:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}=$$
$$=P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right). \tag{C}$$

Соответствующая этому линейному неоднородному уравнению в частных производных система обыкновенных дифференциальных уравнений есть

$$\frac{dx}{Q'_z-R'_y}=\frac{dy}{R'_x-P'_z}=\frac{dz}{P'_y-Q'_x}=$$
$$=\frac{du}{P(Q'_z-R'_y)+Q(R'_x-P'_z)+R(P'_y-Q'_x)}. \tag{C'}$$

Все условия для существования решения (необращение в нуль некоторых знаменателей, дифференцируемость) выполнены, и в качестве u мы можем взять любое решение уравнения (C). Замечая, что форма $P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz$ подходит под случай 2), мы в рассматриваемом случае получаем канонический вид пфаффовой формы:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = du + v\,dw. \qquad (A_3)$$

Итак, *форма* (A) *приводится к одному из трёх канонических видов*:

$$du, \quad u\,dv, \quad du + v\,dw.$$

Наименьшее количество переменных, через которые может быть выражена пфаффова форма, определяет её класс. Итак, пфаффова форма от трёх переменных может принадлежать к I, II или III классу.

Приравнивая форму Пфаффа нулю, получаем уравнение Пфаффа. В первых двух случаях оно допускает интегральное соотношение двух измерений, соответственно $u = \text{const}$. и $v = \text{const}$. В последнем случае мы уже знаем, что существуют интегральные соотношения только одного измерения. Заметим, что если форма приведена к виду (A_3), эти соотношения будут содержать только произвольную функцию и её производную, притом в явном виде и не под знаком квадратуры. В самом деле, мы имеем уравнение:

$$du + v\,dw = 0.$$

Положим (первое соотношение) $u = \varphi(w)$, где φ — произвольная функция; тогда из уравнения получаем второе соотношение: $v = -\varphi'(w)$.

Пример 3. $yz\,dx + xz\,dy + xyz\,dz = 0$. Уравнение допускает, очевидно, интегрирующий множитель $\frac{1}{xyz}$; по умножении на него переменные разделяются:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + dz = 0.$$

Интегральное соотношение $xye^z = C$.

Пример 4. $(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)\,dx + dy + 2z\,dz = 0$. Условие интегрируемости

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}\right) + Q\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) =$$
$$= (2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)(0 - 0) + 1\,(0 - 4xz) + 2z\,(2x - 0) = 0$$

выполняется. Считая x за постоянное, следовательно, $dx = 0$, интегрируем уравнение между y и z: $\frac{\partial y}{\partial z} = -2z$; получаем: $y + z^2 = u(x)$. Согласно общей теории, в результате подстановки в начальное уравнение мы должны получить обыкновенное дифференциальное уравнение между x и u; и действительно, находим: $(2x^2 + 2xu + 1)\,dx + du = 0$. Это — линейное уравнение относительно u; его общее решение:

$$u = e^{-x^2}\left(C + \int e^{x^2}(-2x^2 - 1)\,dx\right) = Ce^{-x^2} - x.$$

Разрешая относительно C и заменяя u его значением, получаем:

$$e^{x^2}(x+y+z^2)=C.$$

Пример 5. Определить проекции на плоскость xOy семейства кривых, определяемых на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ уравнением Пфаффа:

$$x\,dx+y\,dy+c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}dz=0.$$

Данное уравнение Пфаффа не удовлетворяет условию интегрируемости. Поэтому определяем z из заданного конечного уравнения и вставляем полученное значение dz в уравнение Пфаффа:

$$z=c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$dz=-c\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right),$$

$$x\,dx+y\,dy-c^2\left(\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}\right)=0,$$

откуда

$$\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)x^2+\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)y^2=C.$$

Пример 6. $y\,dx+z\,dy+x\,dz=0$. Условия (B_1) и (B_2) настоящего параграфа не выполнены; имеем случай 3). Составляем уравнение (C):

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=x+y+z.$$

Общее решение этого уравнения есть $u=\frac{1}{6}(x+y+z)^2+\psi(x-y,\,y-z)$ (ψ — произвольная функция). Нам удобно взять такое решение уравнения (C):

$$u=\frac{1}{6}(x+y+z)^2-\frac{1}{12}(x-y)^2-\frac{1}{12}(y-z)^2-\frac{1}{12}\{(x-y)+(y-z)\}^2=$$
$$=\frac{1}{2}(xy+yz+zx).$$

Вычитаем из левой части уравнения du; получаем пфаффову форму:

$$y\,dx+z\,dy+x\,dz-du=\frac{1}{2}\{(y-z)\,dz+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz\}.$$

Для этой формы условие (B_2) выполнено; легко убедиться в том, что она допускает интегрирующий множитель $\mu=\frac{1}{(x-y)^2}$, причём

$$\frac{1}{2(x-y)^2}\{(y-z)\,dx+(z-x)\,dy+(x-y)\,dz\}=\frac{1}{2}\,d\,\frac{z-x}{x-y}.$$

Отсюда мы имеем: $v=(x-y)^2$, $w=\frac{1}{2}\frac{z-x}{x-y}$, и форма, стоящая в левой части данного уравнения, допускает каноническое представление вида (A_3):

$$y\,dx+z\,dy+x\,dz=d\frac{1}{2}(xy+yz+zx)+(x-y)^2\,d\frac{1}{2}\frac{z-x}{y-x}.$$

Два соотношения, дающие интегральные многообразия одного измерения, мы получаем в виде:

$$xy+yz+zx=\varphi\left(\frac{z-x}{x-y}\right),\quad (x-y)^2=-\varphi'\left(\frac{z-x}{x-y}\right),$$

где φ — произвольная функция.

ЗАДАЧИ.

Проверить условия интегрируемости и найти интегральные многообразия уравнений:

205. $(yz-z^2)\,dx-xz\,dy+xy\,dz=0.$

206. $(z-y)^3(z-2x+y)\,dx+(x-z)^3(x-2y+z)\,dy+$
$+(y-x)^3(y-2z+x)\,dz=0.$

Указание. Ввести вместо x и y новые переменные: $y-z=u$, $z-x=v$.

207. $z(1-z^2)\,dx+z\,dy-(x+y+xz^2)\,dz=0.$

208. $(3x^2+yz)\,y\,dx-x^2\,dy+(x+2z)\,y^2\,dz=0.$

209. $(1-4x)\,dx+(1+4y)\,dy-4z\,dz=0$; начальные условия $x=y=z=1$.

210. $dx+(y+z)\,dy+z\,dz=0.$

§ 3. Полный, общий и особый интегралы уравнения в частных производных первого порядка.

1. Прежде чем дать способ решения одного нелинейного уравнения в частных производных первого порядка, постараемся изучить ту форму, в которой целесообразно искать решение такого уравнения. Для простоты рассуждений и для геометрической наглядности мы остановимся на случае трёх переменных: независимые переменные x, y; искомая функция z.

Мы будем систематически применять обозначения Монжа для частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=q.$$

Общее уравнение в частных производных первого порядка может быть записано в виде:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0, \tag{1}$$

где F — данная функция пяти аргументов; надо ввести определённые ограничения относительно её дифференциальных свойств. Достаточно потребовать существования и непрерывности вторых частных производных от F по всем аргументам. В левую часть уравнения (1), по определению, непременно входит хоть одна из производных p, q; предположим, что это есть p. Тогда уравнение (1) может быть разрешено относительно p (по крайней мере в окрестности тех значений