Отсюда мы имеем: $v=(x-y)^2$, $w=\frac{1}{2}\frac{z-x}{x-y}$, и форма, стоящая в левой части данного уравнения, допускает каноническое представление вида (A_3):

$$y\,dx+z\,dy+x\,dz=d\frac{1}{2}(xy+yz+zx)+(x-y)^2\,d\frac{1}{2}\frac{z-x}{y-x}.$$

Два соотношения, дающие интегральные многообразия одного измерения, мы получаем в виде:

$$xy+yz+zx=\varphi\left(\frac{z-x}{x-y}\right),\quad (x-y)^2=-\varphi'\left(\frac{z-x}{x-y}\right),$$

где φ — произвольная функция.

ЗАДАЧИ.

Проверить условия интегрируемости и найти интегральные многообразия уравнений:

205. $(yz-z^2)\,dx-xz\,dy+xy\,dz=0.$

206. $(z-y)^3(z-2x+y)\,dx+(x-z)^3(x-2y+z)\,dy+$
$+(y-x)^3(y-2z+x)\,dz=0.$

Указание. Ввести вместо x и y новые переменные: $y-z=u$, $z-x=v$.

207. $z(1-z^2)\,dx+z\,dy-(x+y+xz^2)\,dz=0.$

208. $(3x^2+yz)\,y\,dx-x^2\,dy+(x+2z)\,y^2\,dz=0.$

209. $(1-4x)\,dx+(1+4y)\,dy-4z\,dz=0$; начальные условия $x=y=z=1$.

210. $dx+(y+z)\,dy+z\,dz=0.$

§ 3. Полный, общий и особый интегралы уравнения в частных производных первого порядка.

1. Прежде чем дать способ решения одного нелинейного уравнения в частных производных первого порядка, постараемся изучить ту форму, в которой целесообразно искать решение такого уравнения. Для простоты рассуждений и для геометрической наглядности мы остановимся на случае трёх переменных: независимые переменные x, y; искомая функция z.

Мы будем систематически применять обозначения Монжа для частных производных:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=q.$$

Общее уравнение в частных производных первого порядка может быть записано в виде:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0, \tag{1}$$

где F — данная функция пяти аргументов; надо ввести определённые ограничения относительно её дифференциальных свойств. Достаточно потребовать существования и непрерывности вторых частных производных от F по всем аргументам. В левую часть уравнения (1), по определению, непременно входит хоть одна из производных p, q; предположим, что это есть p. Тогда уравнение (1) может быть разрешено относительно p (по крайней мере в окрестности тех значений

аргументов, которые обращают F в нуль и для которых $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$). Мы, наряду с уравнением (1), будем также рассматривать уравнение в форме, разрешённой относительно p:

$$p = f(x, y, z, q)^{1}). \tag{18}$$

Решение уравнения в частных производных первого порядка, зависящее от двух произвольных постоянных (независимых), называется *полным интегралом*. Мы будем записывать полный интеграл в неявной форме:

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \tag{19}$$

или же в форме, разрешённой относительно z:

$$z = \varphi(x, y, a, b). \tag{19_1}$$

Можно также определить полный интеграл как такое соотношение между тремя переменными и двумя произвольными постоянными, из которого и из соотношений, получаемых его дифференцированием по независимым переменным, получается, путём исключения постоянных, данное уравнение.

Покажем, что два определения эквивалентны. При этом мы будем пользоваться формой уравнения (18) и формой полного интеграла (19_1).

Пусть, во-первых, дано, что (19_1) есть решение уравнения (18), то-есть имеет место тождество (по x, y, a, b):

$$\varphi'_x(x, y, a, b) = f(x, y, \varphi(x, y, a, b), \quad \varphi'_y(x, y, a, b)). \tag{A}$$

Мы имеем равенства:

$$z = \varphi(x, y, a, b), \tag{19_1}$$

$$p = \varphi'_x(x, y, a, b), \tag{19_2}$$

$$q = \varphi'_y(x, y, a, b). \tag{19_3}$$

Покажем, что в результате исключения параметров a, b из уравнений (19_1), (19_2), (19_3) мы придём к уравнению (18). Мы будем определять параметры a и b из уравнений (19_1) и (19_3) и полученные выражения внесём в равенство (19_2). Заметим, что это разрешение возможно по крайней мере в некоторой области изменения переменных. В самом деле, если бы якобиан

$$\frac{D(\varphi, \varphi'_y)}{D(a, b)}$$

---

[1]) Это разрешение невозможно, если правая часть (18) не содержит p; тогда она непременно содержит q, так как иначе мы не имели бы уравнения в частных производных. Меняя в этом случае роль переменных, мы без ограничения общности всегда можем представить уравнение (1) в виде (18), если только оно вообще допускает действительное решение относительно p или q.

тождественно равнялся нулю, то, так как $\frac{\partial\varphi}{\partial a}\neq 0$ (φ действительно зависит от a), уравнения (19_1) и (19_2) дали бы

$$q=\chi(z,\ x,\ y)\text{[1]}. \tag{18_1}$$

Функция z удовлетворяет двум уравнениям (18) и (18_1), которые могут быть разрешены относительно p, q, т. е. z удовлетворяет двум совместным уравнениям первого порядка. Мы исследовали такие системы в § 1 настоящей главы и видели, что их общее решение не может содержать более одной произвольной постоянной. Это противоречит нашему предположению, что решение (19_1) содержит две существенные произвольные постоянные.

Итак, якобиан (B) не равен тождественно нулю. Следовательно, уравнения (19_1) и (19_3) в некоторой области могут быть разрешены относительно a и b, и мы получим:

$$a=\psi_1(x,\ y,\ z,\ q),\ b=\psi_2(x,\ y,\ z,\ q). \tag{20}$$

Таким образом, мы имеем тождества:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(x,\ y,\ \psi_1(x,\ y,\ z,\ q),\ \ \psi_2(x,\ y,\ z,\ q))=z,\\&\varphi'_y(x,\ y,\ \psi_1(x,\ y,\ z,\ q),\ \ \psi_2(x,\ y,\ z,\ q))=q,\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и из определения обратного преобразования тождества:

$$\left.\begin{aligned}&\psi_1(x,\ y,\ \varphi(x,\ y,\ a,\ b),\ \ \varphi'_y(x,\ y,\ a,\ b))=a,\\&\psi_2(x,\ y,\ \varphi(x,\ y,\ a,\ b),\ \ \varphi'_y(x,\ y,\ a,\ b))=b.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Подставляя значения (20) в равенство (19_2), получаем:

$$p=\varphi'_x(x,\ y,\ \psi_1(x,\ y,\ z,\ q),\ \ \psi_2(x,\ y,\ z,\ q)). \tag{C}$$

Покажем, что правая часть равенства (C) тождественна с правой частью уравнения (18). Подставив в тождество (A) вместо a и b их выражения (20), мы получим в левой части:

$$\varphi'_x(x,\ y,\ \psi_1(x,\ y,\ z,\ q),\ \ \psi_2(x,\ y,\ z,\ q)),$$

а в правой части, принимая во внимание тождества (21),

$$f(x,\ y,\ z,\ q).$$

Таким образом, имеем:

$$\varphi'_x(x,\ y,\ \psi_1(x,\ y,\ z,\ q),\ \ \psi_2(x,\ y,\ z,\ q))\equiv f(x,\ y,\ z,\ q), \tag{D}$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь, обратно, уравнение (18) получено исключением a и b из соотношений (19_1), (19_2), (19_3), то-есть имеет место тождество (D). Подставим в обе части этого тождества значения z, q, даваемые формулами (19_1), (19_3). В силу тождеств (22), получим тождество (A), т. е. (19_1) есть решение уравнения.

Примечание. *Если уравнение* (19_1) *явно не содержит* z, *то, наряду с решением* $z=\varphi(x,\ y)$, *решением является также* $z=\varphi(x,\ y)+C$,

---

[1]) См., например, В. Немыцкий и др., Курс математического анализа, т. II, гл. XII, теорема 1.

то есть можно искать полный интеграл, содержащий один из параметров аддитивно,

$$z = \varphi(x, y, a) + b. \tag{19_4}$$

Обратно, если полный интеграл имеет форму (19_4), то уравнения (19_2), (19_3) содержат один параметр a, и в результате его исключения мы получим уравнение, связывающее p и q и не содержащее явно z.

Если брать уравнение в форме (1) и полный интеграл в неразрешённом виде (19), то мы можем сказать, что уравнение (1) эквивалентно уравнению, получаемому исключением a и b из системы:

$$\left.\begin{aligned} V(x, y, z, a, b) &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

2. Полный интеграл, т. е. решение, зависящее от двух произвольных постоянных, однозначно определяет, как мы видели, то уравнение в частных производных, которому он принадлежит. По аналогии с линейными уравнениями в частных производных мы не вправе, однако, ожидать, что получим все решения уравнения в частных производных, придавая произвольным постоянным всевозможные числовые значения, ибо для названного частного типа уравнений мы убедились, что общее решение зависело от произвольной функции. Лагранж показал, однако, что все решения уравнения в частных производных первого порядка могут быть получены из полного интеграла путём вариации постоянных; при этом требуются только операции дифференцирования и исключения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$p = f(x, y, z, q) \tag{18}$$

и его полный интеграл

$$z = \varphi(x, y, a, b). \tag{19_1}$$

Пусть теперь a и b будут некоторые функции от x и y.

Если мы определим в этих предположениях две функции p и q равенствами:

$$p = \varphi'_x(x, y, a, b), \tag{19_2}$$

$$q = \varphi'_y(x, y, a, b), \tag{19_3}$$

не предрешая вопроса о том, будут ли p и q частными производными от z, то из первого определения полного интеграла следует, что функции z, p, q, определённые формулами (19_1), (19_2), (19_3), обращают уравнение (18) в тождество по x, y, a, b, т. е., в частности, при любых функциях a и b. Подберём теперь функции a и b

от x и y таким образом, чтобы выражение (19_1) было решением дифференциального уравнения (18), т. е. чтобы выражения (19_2) и (19_3) были частными производными от z соответственно по x и по y. Дифференцируя (19_1) по x и по y в предположении, что a и b суть функции x и y, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \varphi'_x + \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial x} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \varphi'_y + \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial y} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Сравнивая формулы (19_2), (19_3) и (24), мы видим, что p и q из формул (19_2) и (19_3) будут частными производными от z по x и y при переменных a и b, если a и b удовлетворяют уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial x} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial y} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

При выполнении условий (25) функция $\varphi(x, y, a, b)$ с переменными a и b будет решением уравнения (18).

Рассмотрим вопрос о том, как удовлетворить уравнениям (25).

1) Уравнения (25) удовлетворяются, если функции a и b удовлетворяют двум конечным (не дифференциальным) уравнениям:

$$\varphi'_a(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi'_b(x, y, a, b) = 0. \tag{26}$$

Допуская, что эти уравнения разрешимы относительно a и b, мы подставим полученные в результате этого разрешения функции от x и y в выражение (19), которое окажется решением уравнения, не содержащим ни произвольных постоянных, ни произвольных функций.

Это решение называется *особым интегралом*.

2) Если функции φ'_a и φ'_b не обращаются в нуль при подстановке на место a и b соответствующих функций от x и y, то, рассматривая уравнения (25) как систему двух алгебраических линейных уравнений с двумя неизвестными, мы приходим к выводу, что определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial a}{\partial x} & \dfrac{\partial b}{\partial x} \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} & \dfrac{\partial b}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Если все элементы этого определителя равны нулю, то $a = \text{const}$., $b = \text{const}$., и мы возвращаемся к полному интегралу.

3) Если не все элементы определителя (27) равны нулю, то его тождественное обращение в нуль показывает, что между a и b

существует функциональная зависимость, не содержащая x и y; если, например, $\frac{\partial a}{\partial x} \neq 0$ или $\frac{\partial a}{\partial y} \neq 0$, то эта зависимость может быть записана в виде:

$$b = \omega(a), \tag{28}$$

причём ω — произвольная функция. Подставляя значение (28) в уравнения (25), мы придём к одному уравнению $\left[\text{так как } \frac{\partial b}{\partial x} = \omega'(a)\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial y} = \omega'(a)\frac{\partial a}{\partial y}\right]$:

$$\varphi'_a(x, y, a, \omega(a)) + \varphi'_b(x, y, a, \omega(a))\,\omega'(a) = 0. \tag{29}$$

Если из этого уравнения можно определить a как функцию от x и y, то затем из уравнения (28) мы находим b как функцию независимых переменных; подставляя эти значения a и b в выражение (19_1), мы, согласно предыдущему, получим решение. Совокупность таких решений при любом выборе дифференцируемой функции $\omega(a)$ называется *общим интегралом* уравнения (1) или уравнения (18). Каждому выбору произвольной функции $\omega(a)$ соответствует, вообще говоря, некоторое частное решение, входящее в общий интеграл. В этом смысле мы можем сказать, что общий интеграл зависит от произвольной функции.

Мы провели все рассуждения для полного интеграла, представленного в разрешённой форме (19_1). Соответствующие вычисления можно провести и для полного интеграла, данного в неразрешённой относительно z форме (19); только в соответствующих местах придётся вводить производные от неявной функции и иногда вводить дополнительные требования о разрешимости тех или иных уравнений.

В самом деле, уравнение (1) является следствием уравнений (23) как при постоянных, так и при переменных a и b. Если a и b являются функциями от x, y, то соответствующие производные от z по x и y, т. е. p, q, вычисляются из соотношений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}p + \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}q + \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{24_1}$$

Сравнивая формулы (24_1) и (23), мы получаем условия:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{25_1}$$

Из этих условий, совместно с уравнением $V=0$, нам надо определить функции a и b. Мы снова получаем три случая:

1) если положить $\frac{\partial V}{\partial a}=0$, $\frac{\partial V}{\partial b}=0$, то, исключая из этих уравнений и из уравнения (19) a и b, мы придём *к особому интегралу*, вовсе не содержащему произвольных постоянных;

2) полагая $\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial x}=\frac{\partial b}{\partial y}=0$, мы возвращаемся к *полному интегралу*;

3) в общем случае мы имеем: $\frac{D(a, b)}{D(x, y)}=0$, откуда заключаем о существовании соотношения между a и b,

$$b=\omega(a), \tag{28}$$

где ω означает произвольную функцию. В силу уравнения (28), система (25_1) приводится к одному соотношению:

$$\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}\omega'(a)=0. \tag{29_1}$$

Исключая a и b из уравнений (19), (28) и (29_1), мы приходим к соотношению между x, y, z, входящему в общий интеграл; фактический вид этого решения зависит от выбора произвольной функции $\omega(a)$. Итак, общий интеграл определяется соотношениями (19), (28) и (29_1) при произвольной (дифференцируемой) функции ω.

3. Мы нашли три вида решения уравнения в частных производных. Сейчас мы покажем, что этими тремя видами исчерпываются все решения уравнения (1) или (18): иначе говоря, *всякое решение уравнения в частных производных входит или в полный, или в общий, или в особый интеграл.*

В самом деле, пусть

$$z=\Phi(x, y) \tag{30}$$

будет какое-нибудь решение уравнения (18), т. е. имеет место тождество:

$$\Phi'_x(x, y)=f(x, y, \Phi(x, y), \Phi'_y(x, y)). \tag{C}$$

Пусть, с другой стороны,

$$z=\varphi(x, y, a, b) \tag{19_1}$$

есть полный интеграл того же уравнения. В силу предыдущей теории, чтобы (если это возможно) получить решение (30) из полного интеграла, надо подобрать две функции a и b от x и y так, чтобы имели место тождества:

$$\Phi(x, y)=\varphi(x, y, a, b), \tag{31}$$

$$\Phi'_x(x, y)=\varphi'_x(x, y, a, b), \tag{31_1}$$

$$\Phi'_y(x, y)=\varphi'_y(x, y, a, b). \tag{31_2}$$

Мы уже видели (п. 1), что уравнения (31) и (32_2) разрешимы относительно a и b:

$$a = \psi_1(x, y, \Phi, \Phi'_y),$$
$$b = \psi_2(x, y, \Phi\ \Phi'_y);$$

ψ_1 и ψ_2 имеют то же значение, что в формулах (20). Внося найденные значения a и b в правую часть уравнения (31_1), мы получим:

$$\varphi'_x(x, y, \psi_1(x, y, \Phi, \Phi'_y), \psi_2(x, y, \Phi, \Phi'_y)),$$

а это, в силу тождества (D) (п. 1), совпадает с выражением

$$f(x, y, \Phi, \Phi'_y);$$

это же последнее выражение, в силу тождества (C), даёт $\Phi'_x(x, y)$. Таким образом, значения a и b, найденные из системы (31) и (31_2), удовлетворяют также уравнению (31_1). Итак, если Φ есть решение, то определение a и b из уравнений (31), (31_1), (31_2) всегда возможно.

Дифференцируя обе части уравнения (31), в которое вместо a и b подставлены найденные функции, соответственно по x и y, мы получаем:

$$\Phi'_x(x, y) = \varphi'_x + \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial x} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial x},$$

$$\Phi'_y(x, y) = \varphi'_y + \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial y} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial y}.$$

Сравнивая полученные тождества с равенствами (31_1) и (31_2), приходим к заключению, что a и b удовлетворяют уравнениям:

$$\varphi'_a \frac{\partial a}{\partial x} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial x} = 0, \qquad \varphi'_a \frac{\partial a}{\partial y} + \varphi'_b \frac{\partial b}{\partial y} = 0.$$

Но в п. 2 мы исследовали эту систему и пришли к выводу, что она приводит лишь к полному, общему или особому интегралу. Таким образом, наше утверждение доказано.

Примечание. Легко убедиться в том, что одному дифференциальному уравнению соответствует бесчисленное множество полных интегралов.

В самом деле, пусть мы имеем один из них: $z = \varphi(x, y, a, b)$. При нахождении из него общего интеграла выберем функцию ω, совершенно определённую, но зависящую от двух постоянных a', b', $b = \omega(a; a', b')$; полученное по правилу нахождения общего интеграла исключением a и b решение будет зависеть от двух новых параметров a' и b', т. е. будет представлять полный интеграл данного уравнения, отличный, вообще, от исходного.

4. Полученные результаты относительно интегралов дифференциального уравнения в частных производных допускают простую геометрическую интерпретацию. Решение уравнения в частных

производных определяет в координатном пространстве (x, y, z) поверхность, которую мы будем называть *интегральной поверхностью*. Полный интеграл

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \tag{19}$$

представляет семейство интегральных поверхностей от двух параметров.

Назовём *элементом прикосновения*, или просто элементом, совокупность пяти величин (x, y, z, p, q), где x, y, z суть координаты некоторой точки, а p и q — угловые коэффициенты проходящей через неё плоскости. Тогда задача нахождения решения уравнения (1) может быть поставлена так: найти такую поверхность, чтобы совокупность элементов, образованных точками этой поверхности и угловыми коэффициентами касательных плоскостей, удовлетворяла соотношению:

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

Полный интеграл представляет семейство интегральных поверхностей, зависящее от двух параметров. Мы видели, что не все интегральные поверхности получаются из полного интеграла при частных значениях параметров. Посмотрим, что́ представляют геометрически общий и особый интегралы. Для получения решения, входящего в общий интеграл, мы брали произвольно соотношение:

$$b = \omega(a), \tag{28}$$

подставляли это значение b в уравнение (19) и исключали параметр a из соотношений:

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\omega'(a) = 0. \tag{19'}$$

Геометрически это значит следующее: мы, при помощи соотношения (28), из данного семейства (19) от двух параметров выделяем некоторое семейство от одного параметра и затем находим огибающую поверхность этого семейства. Так как огибающая поверхность в каждой своей точке касается одной из огибаемых поверхностей, т. е. имеет с нею общий элемент соприкосновения, то является очевидным тот факт, что эта огибающая также есть решение данного уравнения.

Наконец, особый интеграл получается исключением a и b из трёх уравнений:

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

Но этот процесс, как известно, приводит к огибающей семейства поверхностей от двух параметров, если она существует. Рассуждение, подобное предыдущему, показывает, что все элементы этой огибающей поверхности удовлетворяют данному уравнению, т. е. она является интегральной поверхностью.

Пример 7. Семейство шаровых поверхностей данного радиуса R с центрами в точках плоскости xOy

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2$$

есть семейство от двух параметров a и b. Чтобы найти уравнение в частных производных, для которого это семейство является полным интегралом, дифференцируем уравнение по x и по y в предположении, что z есть функция x и y; из трёх полученных уравнений исключаем a и b. Имеем:

$$x-a+zp=0, \quad y-b+zq=0;$$

отсюда $x-a=-zp$, $y-b=-zq$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем:

$$z^2(1+p^2+q^2)=R^2$$

— соответствующее уравнение в частных производных.

Чтобы получить решение, входящее в общий интеграл, вводим соотношение $b=\omega(a)$, т. е. выделяем семейство шаров, центры которых лежат на линии $y=\omega(x)$, $z=0$. Всякая огибающая поверхность такого семейства (*поверхность каналов*) является интегральной поверхностью и входит в общий интеграл. Наконец, особый интеграл получится исключением a и b из трёх уравнений:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2, \quad x-a=0, \quad y-b=0,$$

откуда $z=\pm R$. Получим уравнения двух плоскостей, которые касаются каждой шаровой поверхности в одной точке.

Возьмём, в частности, в качестве линий центров шаров семейство всех прямых плоскости, зависящее от двух параметров α, β:

$$b=a\alpha+\beta.$$

Нам следует исключить параметр a из двух соотношений:

$$(x-a)^2+(y-a\alpha-\beta)^2+z^2=R^2, \quad x-a+(y-a\alpha-\beta)\alpha=0;$$

получаем семейство (от двух параметров) круглых цилиндров радиуса R, оси которых лежат в плоскости xOy, которое, в свою очередь, может служить полным интегралом:

$$\frac{(y-\alpha x-\beta)^2}{1+\alpha^2}+z^2=R^2.$$

Пример 8. Полный интеграл: $z=ax+by+ab$. Находим соответствующее уравнение: $p=a$, $q=b$; $z=px+qy+pq$. Находим особый интеграл: $0=x+b$, $0=y+a$; $z=-xy$. Особый интеграл есть гиперболоид, а полный состоит из семейства от двух параметров его касательных плоскостей. Для нахождения общего интеграла мы

должны установить соотношение $b=\omega(a)$ и исключить a из уравнений:

$$z=ax+\omega(a)y+a\omega(a), \quad 0=x+\omega(a)+\omega'(a)(y+a).$$

Получаем уравнение развёртывающейся поверхности (как огибающей семейства плоскостей от одного параметра), касающейся гиперболоида вдоль кривой, проекция которой на плоскость $z=0$ есть $x=-\omega(-y)$.

5. Характеристики. В дифференциальной геометрии при нахождении огибающей семейства поверхностей от одного параметра характеристики определяются как линии, вдоль которых огибаемая поверхность соприкасается с огибающей. Рассмотрим эти характеристики, или, точнее, *характеристические линии*, как они определяются при нахождении общего интеграла при известном полном интеграле.

Пусть дан полный интеграл:

$$V(x, y, z, a, b)=0. \tag{19}$$

Мы видели, что общий интеграл определяется как огибающая семейства поверхностей от одного параметра,

$$V(x, y, z, a, \omega(a))=0,$$

где $\omega(a)$ есть произвольная функция. Уравнения характеристических линий для этого семейства имеют вид:

$$V(x, y, z, a, \omega(a))=0, \quad V'_a+V'_b\omega'(a)=0, \tag{19'}$$

т. е. по виду — это те же уравнения, которые определяют общий интеграл, но рассматриваемые при постоянном значении параметра. Если придавать параметру a различные значения, то уравнения (19′) определяют семейство характеристических линий от одного параметра, которые и образуют общий интеграл. Из определения огибающей поверхности следует, что вдоль характеристики огибающая и огибаемая имеют общие элементы прикосновения, т. е. не только точки, но и касательные плоскости. Чтобы получить угловые коэффициенты этой касательной плоскости, достаточно продифференцировать первое уравнение (19′) по x и по y (мы вправе рассматривать a как постоянное, т. е. определить угловые коэффициенты касательной плоскости к огибаемой поверхности):

$$V'_x(x, y, z, a, \omega(a))+V'_z p=0, \quad V'_y+V'_z q=0. \tag{19''}$$

Уравнения (19′) и (19″) определяют при постоянном a характеристическую линию и в каждой точке её угловые коэффициенты p и q некоторой плоскости; так как эта плоскость есть касательная к интегральной поверхности и характеристика лежит на этой поверхности, то плоскость

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$$

есть одна из касательных плоскостей к характеристической линии (19′) в точке (x, y, z).

Таким образом, уравнения (19′) и (19″) определяют при постоянном a геометрический образ, составленный из кривой (19′), каждой точке которой отнесена одна из касательных плоскостей к этой кривой. Этот образ мы будем называть *характеристикой первого порядка* или *характеристической полосой*. Вся характеристика первого порядка принадлежит интегральной поверхности как полного, так и общего интеграла — точки кривой лежат на интегральных поверхностях, а касательные плоскости, определённые уравнениями (19″), являются касательными плоскостями к интегральным поверхностям.

Мы провели наше рассмотрение, выбрав определённую функцию $\omega(a)$ и придавая затем параметру a постоянное значение. Поставим теперь вопрос об определении всех характеристик, которые можно получить из полного интеграла (19). Заметим, что при постоянном значении a_0 параметра a значение произвольной функции $\omega(a)$ есть произвольное число b_0, а значение производной $\omega'(a)$ есть ещё одно произвольное число c_0[1]. Итак, все возможные характеристические линии определяются уравнениями:

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \quad V'_a(x, y, z, a, b) + V'_b(x, y, z, a, b)c = 0, \quad (19''')$$

где a, b, c — три произвольные постоянные. Чтобы определить характеристики первого порядка, надо к уравнениям (19‴) присоединить ещё следующие:

$$V'_x(x, y, z, a, b) + V'_z p = 0, \quad V'_y + V'_z q = 0. \qquad (19^{IV})$$

Итак, *характеристики (нелинейного) дифференциального уравнения в частных производных образуют семейство от трёх параметров.*

§ 4. Метод Лагранжа-Шарпи нахождения полного интеграла.

1. В предыдущем параграфе мы видели, что задача интеграции уравнения в частных производных может считаться формально законченной, если нам удалось найти полный интеграл, так как все остальные решения получаются из него дифференцированием и исключением. Переходим к тем методам, которые дают возможность фактически разыскивать этот интеграл. При этом мы будем придерживаться формальной точки зрения, т. е. считать задачу разрешённой, если она сведена к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных

---

[1]) В самом деле, достаточно взять функцию $\omega(a)$ вида:

$$\omega(a) = b_0 + (a - a_0)c_0,$$

чтобы иметь

$$\omega(a_0) = b_0, \quad \omega'(a_0) = c_0.$$