215. $\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=z^2$.

216. $z-px-qy-3p^2+q^2=0$. Решить задачу Коши: $z=y^2$ при $x=0$; найти особый интеграл.

217. $(z-px-qy)^2=1+p^2+q^2$. Найти особый интеграл.

218. $p^2+q^2-2px-2qy+1=0$.

219. $p^2+q+x+z=0$.

§ 5. Метод Коши для двух независимых переменных.

Метод Коши интегрирования уравнений в частных производных первого порядка состоит в том, что сначала отыскиваются характеристики (точнее — характеристические полосы). Так как характеристическая полоса представляет многообразие одного измерения (вдоль характеристической линии x, y, z выражаются функциями одного параметра: отнесённые к каждой точке линии величины p и q тем самым являются функциями того же параметра), то естественно ожидать, что нахождение характеристических полос сведётся к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. После того как характеристики найдены, возникает вторая задача — составить из этих характеристик интегральную поверхность.

1. Определение характеристических линий на интегральной поверхности. Дано дифференциальное уравнение:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0, \tag{1}$$

где функция F допускает в рассматриваемой области непрерывные частные производные второго порядка.

В п. 5 § 3 настоящей главы мы определили характеристические линии на поверхности, входящей в полный интеграл уравнения (1), при помощи уравнений ($19'''$), которые в случае, если полный интеграл дан в форме (19_1), разрешённой относительно z, имеют вид

$$z=\varphi(x,\ y,\ a,\ b),\quad \varphi'_a(x,\ y,\ a,\ b)+\varphi'_b(x,\ y,\ a,\ b)\,c=0^{1)}. \tag{44}$$

Замечаем, что второе из уравнений (44) не содержит z и представляет уравнение проекций характеристических линий на плоскость xOy. Найдём дифференциальное уравнение этих проекций. Дифференцирование второго из уравнений (44) даёт для перемещения вдоль проекции характеристической линии на плоскость xOy соотношение:

$$(\varphi''_{ax}+\varphi''_{bx}c)\,dx+(\varphi''_{ay}+\varphi''_{by}c)\,dy=0. \tag{45}$$

Оба выражения в скобках не равны тождественно нулю, ибо иначе, в силу произвола c, φ'_x и φ'_y не зависели бы от a и b, и функция z

---

[1]) Мы предполагаем, что φ допускает непрерывные первые производные, а также непрерывные вторые смешанные производные по переменным x, y, с одной стороны, и параметрам a, b — с другой.

удовлетворяла бы двум уравнениям в частных производных:

$$p = \varphi'_x(x, y), \quad q = \varphi'_y(x, y),$$

следовательно, зависела бы только от одного существенного параметра. Подставляя значение z из (44) в уравнение (1) и дифференцируя полученное тождество по a и b, получим [1]):

$$Z\varphi'_a + P\varphi''_{ax} + Q\varphi''_{ay} = 0, \quad Z\varphi'_b + P\varphi''_{bx} + Q\varphi''_{by} = 0.$$

Умножаем второе из этих равенств на c и складываем с первым; в силу второго из соотношений (44) члены, содержащие Z, уничтожатся, и останется

$$P(\varphi''_{ax} + \varphi''_{bx}c) + Q(\varphi''_{ay} + \varphi''_{by}c) = 0. \tag{46}$$

Рассматривая (45) и (46) как два линейных уравнения, допускающих отличные от нуля решения, приходим к равенству нулю их определителя: $\begin{vmatrix} dx & dy \\ P & Q \end{vmatrix} = 0$, откуда

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}$$

— искомое дифференциальное уравнение.

Пусть теперь дана любая интегральная поверхность для уравнения (1):

$$z = \varphi(x, y), \tag{47}$$

причём φ допускает непрерывные частные производные первого и второго порядков. На поверхности (47) мы назовём *характеристиками* (или характеристическими линиями) *линии, проекции которых на плоскость xOy удовлетворяют дифференциальному уравнению*:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}, \tag{48}$$

где на место входящих в P и Q переменных z, p, q подставлены соответственно $\varphi(x, y)$, φ'_x, φ'_y. Уравнение (48) есть обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка между x и y; если P и Q одновременно не обращаются в нуль, оно, в силу предположения относительно F, определяет единственное решение, соответствующее начальным данным x_0, y_0. Таким образом, *через каждую точку* $(x_0, y_0, z_0 = \varphi(x_0, y_0))$ *поверхности* (47) *проходит единственная характеристическая линия, лежащая на этой поверхности.*

2. Дифференциальные уравнения характеристик первого порядка. Наше определение характеристик не подвинуло ещё вперёд решения задачи об интегрировании уравнения

---

[1]) Сохраняем введённые в § 4 обозначения.

в частных производных первого порядка, так как мы умеем пока определять характеристические линии только на данной интегральной поверхности, а перед нами стоит задача — найти интегральные поверхности. Решающий факт, благодаря которому в методе Коши оказывается возможным сведение задачи об интегрировании уравнения в частных производных первого порядка к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений, заключается *в переходе к характеристикам первого порядка*. Определим *характеристику первого порядка как характеристическую линию, лежащую на интегральной поверхности, каждой точке которой отнесён соответствующий элемент прикосновения этой поверхности*; т. е. угловые коэффициенты p и q касательной плоскости к поверхности. Для удобства введём вдоль характеристической линии параметр u, приравнивая дифференциалу от u отношения (48):

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=du,$$

или

$$\frac{dx}{du}=P, \quad \frac{dy}{du}=Q. \tag{48_1}$$

К уравнениям (48_1) мы можем непосредственно присоединить ещё одно уравнение; в самом деле, при перемещении по поверхности переменные x, y, z, p, q связаны соотношением $dz=p\,dx+q\,dy$ (так как p и q являются угловыми коэффициентами касательной плоскости), или

$$\frac{dz}{du}=p\frac{dx}{du}+q\frac{dy}{du},$$

откуда, сопоставляя с уравнениями (48_1), получим уравнение:

$$\frac{dz}{du}=Pp+Qq. \tag{48_2}$$

Вдоль характеристики первого порядка мы имеем пять неизвестных функций x, y, z, p, q от u и всего только три уравнения (48_1), (48_2). Постараемся дополнить эту систему ещё двумя уравнениями. Для всякого перемещения по интегральной поверхности мы имеем:

$$dp=r\,dx+s\,dy, \quad dq=s\,dx+t\,dy\ ^{1)};$$

в частности, для перемещения вдоль характеристической линии имеем:

$$\frac{dp}{du}=r\frac{dx}{du}+s\frac{dy}{du}, \quad \frac{dq}{du}=s\frac{dx}{du}+t\frac{dy}{du},$$

---

[1]) Через r, s, t обозначены соответственно $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

или, заменяя $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ их значениями из (48_1),

$$\frac{dp}{du} = Pr + Qs, \quad \frac{dq}{du} = Ps + Qt. \tag{49}$$

В добавленные уравнения (49) входят три новые неизвестные функции — значения вторых производных от z вдоль характеристической линии (совокупность значений x, y, z, p, q, r, s, t вдоль этой линии есть характеристика второго порядка). Но мы можем выразить правые части уравнений (49) только через величины x, y, z, p, q. Для этого обращаемся к уравнению (1), которое по подстановке в него решения (47) обращается в тождество. Дифференцируя это тождество по x и по y, получаем:

$$X + Zp + Pr + Qs = 0, \quad Y + Zq + Ps + Qt = 0. \tag{50}$$

Определяя из равенств (50) значения $Pr + Qs$, $Ps + Qt$ и подставляя их в уравнения (49), получаем два добавочных дифференциальных уравнения:

$$\frac{dp}{du} = -X - Zp, \quad \frac{dq}{du} = -Y - Zq.$$

Присоединяя эти уравнения к системе (48_1), (48_2), получим пять уравнений с пятью неизвестными функциями:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + Zp} = -\frac{dq}{Y + Zq} = du. \tag{51}$$

Заметим, что с точностью до введённого нами вспомогательного переменного u (несущественного) система (51) совпадает с системой (38), которая была получена в методе Лагранжа-Шарпи.

Если уравнение дано в виде, разрешённом относительно p:

$$p = f(x, y, z, q), \tag{18}$$

то система (51) напишется в виде:

$$dx = \frac{dy}{-f'_q} = \frac{dz}{f - qf'_q} = \frac{dp}{f'_x + ff'_z} = \frac{dq}{f'_y + qf'_z}. \tag{51_1}$$

В системе (51_1) нет нужды вводить вспомогательное переменное u; естественно взять x в качестве независимого переменного; кроме того, в эту систему явно не входит p, так что достаточно проинтегрировать систему из первого, второго и четвёртого уравнений и затем определить p при помощи равенства (18).

Итак, *всякая характеристика первого порядка удовлетворяет системе* (51). *Эту систему*, в которой число уравнений равно числу искомых функций, *можно интегрировать без предварительного знания интегральной поверхности* (47).

3. Определение характеристик из дифференциальных уравнений. Мы показали, что всякая характеристика первого порядка уравнения в частных производных (1) или (18) удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (51) или (51_1). Пусть общее решение системы (51) при начальных значениях $u=0$, x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 будет:

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi_1(u;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0),\\ y&=\varphi_2(u;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0),\\ z&=\varphi_3(u;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0),\\ p&=\psi_1(u;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0),\\ q&=\psi_2(u;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0).\end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Однако не все эти решения являются характеристиками. Чтобы выделить из функций (52) те, которые соответствуют характеристикам, заметим, прежде всего, что система (51) допускает первый интеграл:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=C. \tag{53}$$

В самом деле, дифференцируя левую часть этого равенства по u и принимая во внимание уравнения (51), получаем:

$$\frac{dF}{du}=X\frac{dx}{du}+Y\frac{dy}{du}+Z\frac{dz}{du}+P\frac{dp}{du}+Q\frac{dq}{du}=$$
$$=XP+YQ+Z(Pp+Qq)-P(X+Zp)-Q(Y+Zq)=0\ ^{1)}.$$

Следовательно, функция F имеет вдоль каждого решения системы (51) постоянное значение — то самое, которое она имеет для начального элемента; итак, вдоль решения (52) системы (51) мы имеем:

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0). \tag{53_1}$$

Заметим теперь, что характеристики первого порядка состоят из элементов интегральных поверхностей данного уравнения, так что эти элементы удовлетворяют уравнению (1), т. е. функции (52), определяющие характеристики, должны быть связаны соотношением $F=0$. Равенство (53_1) показывает, что последнее соотношение будет выполняться вдоль всей характеристики, если начальные значения связать соотношением:

$$F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0)=0. \tag{54}$$

Итак, *мы назовём характеристиками первого порядка решения* (52) *системы* (51), *в которых начальные значения связаны соотношением* (54).

---

[1]) См. также § 4, 1, примечание 1.

В случае уравнения в частных производных вида (18) и соответствующей системы обыкновенных уравнений (51_1), с независимым переменным x, решения этой системы имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} y &= g_1(x;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ q_0);\\ z &= g_2(x;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ q_0);\\ p &= h_1(x;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ q_0)+p_0;\\ q &= h_2(x;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ q_0);\\ p &= f\ (x,\ g_1,\ g_2,\ h_2). \end{aligned}\right\} \qquad (52_1)$$

Соотношению (54) в этом случае соответствует равенство:

$$p_0 = f(x_0,\ y_0,\ z_0,\ q_0), \qquad (54_1)$$

которое определяет начальное значение p_0.

Подсчитаем, от скольких параметров зависит семейство характеристик. Если характеристики заданы уравнениями (52_1) и условием (54_1), то начальное значение независимого переменного x_0 следует рассматривать как заданное число, и остаются три независимых параметра y_0, z_0, q_0, в полном согласии с числом параметров, от которого зависят характеристики, получаемые из полного интеграла. В случае системы (52) и соотношения (54) замечаем, что переменное u не является существенным; если, например, $P \neq 0$ при начальных условиях, то за независимое переменное можно опять выбрать x; тогда, рассматривая x_0 как данное число, мы получим опять три независимых параметра y_0, z_0, q_0; p_0 выражается через них с помощью соотношения (54).

Из условий единственности решения системы (51) или (51_1) с заданными начальными данными (эта единственность следует из существования у функции F или f непрерывных вторых производных) следует, что *характеристика однозначно определяется начальным элементом*. В частности, пусть две интегральные поверхности соприкасаются в некоторой точке (x_0, y_0, z_0); тогда они имеют в этой точке общее значение частных производных, p_0 и q_0. Начальный элемент (x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) определяет единственную характеристику первого порядка, принадлежащую, очевидно, обеим интегральным поверхностям. Следовательно, если *две интегральные поверхности соприкасаются в одной точке* (причём соответствующий элемент не является особой точкой для системы (51)), *то они соприкасаются вдоль всей характеристической линии, проходящей через эту точку* [1]).

4. Построение интегральной поверхности из характеристик. Так как всякая дважды дифференцируемая инте-

[1]) Отсюда, в частности, следует, что элементы, принадлежащие особому интегралу, являются особыми для системы дифференциальных уравнений (51).

гральная поверхность, по доказанному, распадается на ∞^1 характеристик, то естественно поставить задачу: зная характеристики, построить из них интегральные поверхности. Для этого необходимо, прежде всего, выделить семейство характеристик от одного параметра, т. е. взять начальные значения $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$ как (дифференцируемые) функции одного параметра v. Эти функции, конечно, должны быть связаны соотношением (54). Затем надо потребовать, чтобы характеристики первого порядка были «прилажены», т. е. чтобы определённые вдоль характеристики плоскости с угловыми коэффициентами p, q стали касательными плоскостями поверхности, образованной характеристическими линиями. Это равносильно требованию, чтобы, если представить интегральную поверхность в форме:

$$z = \varphi(x, y), \tag{47}$$

имели место равенства:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Так как у нас независимыми переменными теперь являются u и v, то последние условия целесообразно написать в дифференциальной форме (справедливой при любом выборе независимых переменных):

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{55}$$

Дифференциальное равенство (55) равносильно двум уравнениям:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u}, \tag{55_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{55_2}$$

Равенство (55_1), выражающее условие, что плоскость с угловыми коэффициентами p, q касается характеристической линии, выполняется в силу уравнений (48_1), (48_2) (обыкновенные производные этих уравнений нужно заменить частными, так как мы ввели через начальные условия второе переменное v). Равенство (55_2) представляет новое условие; его геометрический смысл — тот, что линии на интегральной поверхности, соответствующие изменению v, т. е. переходу с одной характеристической линии на другую (при постоянном u), также должны касаться плоскости

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y).$$

Посмотрим, как можно удовлетворить этому условию.

Переносим все члены уравнения (55_2) в левую часть и обозначаем полученную функцию через V:

$$V = \frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{56}$$

Дифференцируя равенство (56) по u:

$$\frac{\partial V}{\partial u}=\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}-p\,\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}-q\,\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}-\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

и вычитая из полученного равенства результат дифференцирования тождества (55_1) по v [1]):

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}-p\,\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}-q\,\frac{\partial^2 u}{\partial v\,\partial u}-\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u},$$

получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial u}=\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial q}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}-\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v},$$

или, в силу дифференциальных уравнений (51),

$$\frac{\partial V}{\partial u}=P\,\frac{\partial p}{\partial v}+Q\,\frac{\partial q}{\partial v}+X\,\frac{\partial x}{\partial v}+Y\,\frac{\partial y}{\partial v}+Z\left(p\,\frac{\partial x}{\partial v}+q\,\frac{\partial y}{\partial v}\right).$$

С другой стороны, дифференцируя по v тождество $F=0$, в которое подставлены $x, \ldots, q$ как функции u и v, получаем:

$$X\,\frac{\partial x}{\partial v}+Y\,\frac{\partial y}{\partial v}+Z\,\frac{\partial z}{\partial v}+P\,\frac{\partial p}{\partial v}+Q\,\frac{\partial q}{\partial v}=0.$$

Вычитая почленно два последних равенства, имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial u}=-Z\left(\frac{\partial z}{\partial v}-p\,\frac{\partial x}{\partial v}-q\,\frac{\partial y}{\partial v}\right),$$

или, в силу определения (57) функции V,

$$\frac{\partial V}{\partial u}=-ZV. \tag{57}$$

Итак, функция V удовлетворяет обыкновенному линейному дифференциальному уравнению (57). Интеграция этого уравнения даёт:

$$V=V_0 e^{\int\limits_{u_0}^{u} Z du},$$

где V_0 есть значение V при $u=u_0$. Из последнего равенства видно, что для обращения V в нуль необходимо и достаточно, чтобы было $V_0=0$, т. е. чтобы x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, рассматриваемые как функции v, удовлетворяли соотношению:

$$\frac{dz_0}{dv}-p_0\,\frac{dx_0}{dv}-q_0\,\frac{dy_0}{dv}=0. \tag{58}$$

---

[1]) Согласно теоремам, доказанным в главе VII, § 3, производные от решений системы (51) по начальным данным, а следовательно, и по параметру v, существуют и являются непрерывными дифференцируемыми функциями независимого переменного u. Отсюда следует существование входящих в последующее рассуждение производных и законность перестановки порядка дифференцирования.

Таким образом, *чтобы построить из характеристик интегральную поверхность, необходимо, чтобы начальные условия, взятые как функции параметра v, удовлетворяли условиям* (54) [или (54_1)] и (58). Геометрический смысл последнего условия таков: характеристики первого порядка будут «прилажены» на всём своём протяжении, если «приладить» их начальные элементы.

5. Задача Коши. Чтобы найти какое-нибудь решение уравнения (1), нужно найти пять функций x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 параметра v, удовлетворяющих двум соотношениям (54) [или (54_1)] и (58). Задача, очевидно, неопределённая: можно, вообще говоря, произвольно задать три функции. Чтобы из бесконечного множества решений выделить одно определённое, поставим задачу Коши в простейшей форме.

Пусть уравнение задано в форме:

$$p = f(x, y, z, q), \tag{18}$$

где f — непрерывная и дважды дифференцируемая функция в окрестности значений $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$, $\bar{q}_0$, причём соответствующее значение p пусть будет $\bar{p}_0$, *Требуется найти решение, удовлетворяющее начальному условию*:

$$z_0 = \varphi(y_0) \text{ при } x = \bar{x}_0, \tag{59}$$

где $\varphi(y)$ имеет две непрерывные производные, причём пусть $\varphi(\bar{y}_0) = \bar{z}_0$ и $\varphi'(\bar{y}_0) = \bar{q}_0$. Уравнения характеристик (52_1) определены для некоторого интервала $|x - \bar{x}_0| \leqslant h$ и являются непрерывными и дифференцируемыми функциями параметров x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 в некоторой окрестности точки $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{p}_0, \bar{q}_0)$. За параметр v возьмём значение y_0; имеем:

$$y_0 = v, \quad z_0 = \varphi(v).$$

Тогда уравнение (58), ввиду того что $x_0 = \bar{x}_0$ есть постоянное, даёт:

$$q_0 = \varphi'(v);$$

наконец, условие (54_1) дает:

$$p_0 = f(\bar{x}_0, v, \varphi(v), \varphi'(v)) \equiv \psi(v).$$

Подставляя величины $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$, $\bar{q}_0$ в уравнения (52_1), мы получим из двух первых уравнений:

$$\left.\begin{aligned} y &= g_1(x; \bar{x}_0, v, \varphi(v), \varphi'(v)), \\ z &= g_2(x; \bar{x}_0, v, \varphi(v), \varphi'(v)), \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

причём правые части определены для достаточно малых значений $|x - \bar{x}_0|$, $|v - \bar{y}_0|$. Чтобы получить из уравнений (60) z как явную

функцию от x, y, достаточно разрешить первое из этих уравнений относительно v и затем подставить полученное выражение во второе уравнение (60). Для выяснения возможности такого разрешения вычислим производную от y по v:

$$\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial g_1}{\partial y_0}+\frac{\partial g_1}{\partial z_0}\varphi'(v)+\frac{\partial g_1}{\partial q_0}\varphi''(v).$$

Но при $x=x_0$ мы имеем (глава VIII, § 3): $\frac{\partial y}{\partial y_0}=1$, $\frac{\partial y}{\partial z_0}=\frac{\partial y}{\partial q_0}=0$; следовательно, при $x=\bar{x}_0$ производная $\frac{\partial y}{\partial v}=1$, а значит, она отлична от нуля при достаточно малой $|x-\bar{x}_0|$, т. е. разрешение первого уравнения (60) относительно v возможно, причём v оказывается непрерывно дифференцируемой функцией от x, y; подставляя найденное значение v во второе уравнение (60), мы получим решение уравнения (18), удовлетворяющее начальному условию (59), в виде:

$$z=\Phi(x,\ y),$$

где Φ допускает непрерывные частные производные первого порядка. Докажем, что Φ допускает также непрерывные производные второго порядка. Если в двух последних уравнениях (52_1) выразить начальные значения через параметр v и затем заменить v его выражением через x и y, то полученные функции p и q будут частными производными от z соответственно по x и по y, как это следует из равенства (55); мы знаем, что функции h_1 и h_2 допускают непрерывные производные по x и по начальным данным, а следовательно, и по параметру v; отсюда, в силу дифференцируемости v по x и по y, следует существование непрерывных частных производных от p и q по x и по y, т. е. вторых частных производных от z.

Единственность (среди дважды дифференцируемых функций) найденного решения следует из того, что всякая интегральная поверхность в окрестности неособой точки уравнений (51_1) образована характеристиками, и эти характеристики должны иметь общий элемент с начальной кривой (59). Но это кривая однозначно определяет в каждой своей точке, т. е. для каждого значения y_0, начальный элемент $(\bar{x}_0,\ \bar{y}_0,\ \bar{z}_0,\ \bar{p}_0,\ \bar{q}_0)$; следовательно (в силу теоремы Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений), характеристики, проходящие через точки начальной кривой (59,) определяются однозначно; поэтому и сама интегральная поверхность однозначно определяется начальными данными (59).

Общая задача Коши — найти интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через пространственную кривую

$$x=\alpha(y),\quad z=\beta(y). \tag{59_1}$$

— может быть сведена к рассмотренной частной задаче Коши заменой переменных. Вводим новые независимые переменные X, Y, полагая

$$x = X + \alpha(y), \quad y = Y;$$

тогда получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial X} = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial Y} = \frac{\partial z}{\partial x}\alpha'(y) + \frac{dz}{dy},$$

откуда

$$p = \frac{\partial z}{\partial X}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial Y} - \frac{\partial z}{\partial X}\alpha'(Y);$$

после этой замены уравнение (1) принимает вид:

$$F\left(X + \alpha(Y),\ Y,\ z, \frac{\partial z}{\partial X},\ \frac{\partial z}{\partial Y} - \alpha'(Y)\frac{\partial z}{\partial X}\right) = 0, \tag{1'}$$

а начальные условия будут:

$$X = 0, \quad z = \beta(Y).$$

Надо ещё исследовать вопрос, можно ли разрешить (1′) относительно производной $\frac{\partial z}{\partial X}$. Одно из условий для возможности непрерывного и однозначного разрешения вдоль кривой (59_1): производная от левой части уравнения (1′) по $\frac{\partial z}{\partial X}$ должна быть не равна нулю.

Имеем:

$$F'_{\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)} = F'_p - F'_q\alpha'(Y).$$

Замечая, что $\alpha'(Y) = \frac{dx}{dy}$ вдоль кривой (59_1), приходим к заключению, что приведение преобразованного уравнения к виду (18), вообще говоря, невозможно, если вдоль кривой (59_1) выполняется соотношение:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q}. \tag{48}$$

В частности, если через кривую (59_1) проходит интегральная поверхность, то последнее соотношение показывает, что кривая (59) есть характеристика. А в таком случае однозначное решение задачи Коши и фактически невозможно, так как через характеристики проходит бесконечное множество интегральных поверхностей, и задача Коши становится неопределённой.

Наконец, можно поставить задачу Коши в таком виде: найти интегральную поверхность уравнения (1), проходящую через заданную кривую, данную в параметрической форме:

$$x_0 = \xi(v), \quad y_0 = \eta(v), \quad z_0 = \zeta(v). \tag{59_2}$$

Для определения p_0 из q_0 в функции параметра v имеем два уравнения [полученных из (54) и (58)]:

$$F(\xi(v),\ \eta(v),\ \zeta(v),\ p_0,\ q_0)=0,$$
$$\zeta'(v)\neq p_0\xi'(v)-q_0\eta'(v)=0.$$

Первое достаточное условие для того, чтобы из этих уравнений можно было определить p_0 и q_0, есть то, что якобиан этих уравнений по p_0, q_0 не обращается в нуль вдоль кривой (59_2), т. е.

$$\xi'(v)\,Q_0-\eta'(v)\,P_0\neq 0, \tag{61}$$

где P_0 и Q_0 означают производные от левой части уравнения (54) соответственно по p_0 и q_0.

Если выполнено также второе условие существования неявных функций (уравнения удовлетворяются для некоторых начальных условий), то при выполнении условия (61) мы определяем $p_0=\pi(v)$, $q_0=\varkappa(v)$. Найденные начальные значения достаточно подставить в систему трёх уравнений (52), и мы получим уравнения искомой интегральной поверхности в параметрической форме:

$$x=\Phi_1(u,\ v),\quad y=\Phi_2(u,\ v),\quad z=\Phi_3(u,\ v)\ ^{1)}.$$

Если выражение (61) равно нулю во всех точках кривой (59_2) и эта кривая лежит на интегральной поверхности, то, очевидно, она является характеристикой.

Покажем, что задача Коши, действительно, допускает бесконечное число решений, если за начальную кривую взята характеристическая кривая. Пусть уравнения начальной кривой суть $x_0=x_0(u)$, $y_0=y_0(u)$, $z_0=z_0(u)$, причём, если определить $p_0(u)$ и $q_0(u)$ из уравнений (54_1) и (58), то получится характеристика первого порядка. Пусть значению $u=0$ соответствует элемент $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$, $\bar{p}_0$, $\bar{q}_0$. Выбираем произвольно три (дважды дифференцируемые) функции $\tilde{x}(v)$, $\tilde{y}(v)$, $\tilde{z}(v)$, подчинив их лишь следующим условиям:

1) $\tilde{x}(0)=\bar{x}_0$, $\tilde{y}(0)=\bar{y}_0$, $\tilde{z}(0)=\bar{z}_0$;

2) $\tilde{x}'(0)\,y_0'(0)-\tilde{y}'(0)\,x_0'(0)\neq 0$;

3) $\tilde{z}'(0)=\bar{p}_0\tilde{x}'(0)+\bar{q}_0\tilde{y}'(0)$.

Решаем задачу Коши для начальной кривой $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$. Эта задача возможна и решается однозначно в окрестности точки ($\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$). В самом деле, определив из уравнений (54_1) и (58) вдоль начальной кривой $\tilde{p}(v)$ и $\tilde{q}(v)$, мы, в силу условий 1) и 3), получим при $v=0$ начальный элемент исходной характеристики ($\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$, $\bar{p}_0$, $\bar{q}_0$); но, в силу условия 2), эта характеристика

---

[1]) При начальных заданиях в форме (59_1) и (59_2) мы не исследовали до конца вопроса о возможности разрешения уравнения (1′) относительно $\dfrac{\partial z}{\partial X}$ и уравнений (54) и (58) относительно p_0 и q_0. Эта возможность требует дополнительных ограничений на начальную кривую; см. ниже, п. 6, примечание.

не касается начальной кривой, что достаточно для решения задачи Коши. При любом выборе функций $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$, удовлетворяющих условиям 1) — 3), интегральная поверхность содержит заданную характеристику, так как содержит её начальный элемент. Таким образом, мы построили бесчисленное множество поверхностей, содержащих данную характеристическую кривую.

Это свойство можно взять за определение характеристики: *характеристика есть такая кривая, для которой задача Коши становится неопределённой.*

Пример 15. Применим метод Коши к интеграции уравнения:

$$px + qy - pq = 0.$$

Дифференциальные уравнения характеристик будут:

$$\frac{dx}{x-q} = \frac{dy}{y-p} = \frac{dz}{-pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q} = du$$

(мы упростили выражение $Pp + Qq$, пользуясь данным уравнением). Интеграция этих уравнений с начальными данными x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 при $u = 0$ даёт сначала для двух последних уравнений:

$$p = p_0 e^{-u}, \quad q = q_0 e^{-u}.$$

Подставляя эти значения в три оставшихся уравнения, находим:

$$\frac{dx}{du} = x - q_0 e^{-u}, \quad \frac{dy}{du} = y - p_0 e^{-u}, \quad \frac{dz}{du} = -p_0 q_0 e^{-2u},$$

откуда

$$x = \left(x_0 - \frac{q_0}{2}\right) e^u + \frac{q_0}{2} e^{-u}, \quad y = \left(y_0 - \frac{p_0}{2}\right) e^u + \frac{p_0}{2} e^{-u},$$

$$z = z_0 - \frac{p_0 q_0}{2} + \frac{p_0 q_0}{2} e^{-2u},$$

причём начальные значения связаны соотношением:

$$p_0 x_0 + q_0 y_0 - p_0 q_0 = 0.$$

Для построения интегральной поверхности следует ещё связать начальные значения, рассматриваемые как функции v, соотношением:

$$z_0'(v) - p_0(v)\, x_0'(v) - q_0(v)\, y_0'(v) = 0.$$

Решим, в частности, такую задачу Коши: найти интегральную поверхность, проходящую через прямую $x = 0$, $z = y$. Здесь мы имеем: $x_0 = 0$, $y_0 = v$, $z_0 = v$. Уравнения для определения p_0 и q_0 суть: $q_0 v - p_0 q_0 = 0$, $1 - q_0(v) = 0$, откуда $q_0 = 1$, $p_0 = v$. Три последних из найденных уравнений характеристик дадут поверхность в параметрической форме:

$$x = -\frac{1}{2}(e^u - e^{-u}), \; y = \frac{v}{2}(e^u + e^{-u}), \; z = \frac{v}{2}(1 + e^{-2u}) = \frac{v}{2}\,\frac{e^u + e^{-u}}{e^u}.$$

Для получения решения в явной форме исключаем параметры u и v:

$$z = ye^{-u}, \quad e^{2u} + 2xe^{u} - 1 = 0,$$

откуда

$$e^{u} = -x + \sqrt{x^2+1}, \quad e^{-u} = x + \sqrt{x^2+1},$$

и окончательно

$$z = xy + y\sqrt{x^2+1}.$$

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать по методу Коши уравнения:

220. $z = pq$; начальные условия: $x_0 = u$, $y_0 = u^2$, $z_0 = u^3$.

221. $p^2 + q^2 = 1$; $x_0 = \cos u$, $y_0 = \sin u$, $z_0 = \frac{1}{2}u$.

222. $z = px + qy + pq$; $x_0 = 1$, $z_0 = y_0^3$.

§ 6. Метод Коши для n независимых переменных.

1. Характеристики; построение решения из характеристик. Изложенный в предыдущем параграфе метод непосредственно распространяется на уравнение в частных производных первого порядка с n независимыми переменными. Мы будем постоянно пользоваться следующими обозначениями: независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$; искомая функция z; частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x_i} \equiv p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \equiv p_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

В этих обозначениях уравнение в частных производных первого порядка имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0. \tag{62}$$

Данную функцию F мы будем предполагать имеющей непрерывные вторые частные производные; дальнейшие ограничения выяснятся в ходе доказательств.

Применяя обычный язык многомерной геометрии, мы скажем, что решение уравнения (62):

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{63}$$

представляет интегральную поверхность уравнения (62) в пространстве $n+1$ измерений $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$. Мы будем предполагать, что функция φ допускает непрерывные частные производные второго порядка.

Введём ещё обозначения:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$