Для получения решения в явной форме исключаем параметры u и v:

$$z = ye^{-u}, \quad e^{2u} + 2xe^{u} - 1 = 0,$$

откуда

$$e^{u} = -x + \sqrt{x^2+1}, \quad e^{-u} = x + \sqrt{x^2+1},$$

и окончательно

$$z = xy + y\sqrt{x^2+1}.$$

ЗАДАЧИ.

Проинтегрировать по методу Коши уравнения:

220. $z = pq$; начальные условия: $x_0 = u$, $y_0 = u^2$, $z_0 = u^3$.

221. $p^2 + q^2 = 1$; $x_0 = \cos u$, $y_0 = \sin u$, $z_0 = \frac{1}{2}u$.

222. $z = px + qy + pq$; $x_0 = 1$, $z_0 = y_0^3$.

§ 6. Метод Коши для n независимых переменных.

1. Характеристики; построение решения из характеристик. Изложенный в предыдущем параграфе метод непосредственно распространяется на уравнение в частных производных первого порядка с n независимыми переменными. Мы будем постоянно пользоваться следующими обозначениями: независимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$; искомая функция z; частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x_i} \equiv p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} \equiv p_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

В этих обозначениях уравнение в частных производных первого порядка имеет вид:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0. \tag{62}$$

Данную функцию F мы будем предполагать имеющей непрерывные вторые частные производные; дальнейшие ограничения выяснятся в ходе доказательств.

Применяя обычный язык многомерной геометрии, мы скажем, что решение уравнения (62):

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{63}$$

представляет интегральную поверхность уравнения (62) в пространстве $n+1$ измерений $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$. Мы будем предполагать, что функция φ допускает непрерывные частные производные второго порядка.

Введём ещё обозначения:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z, \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Характеристики (характеристические линии) на интегральной поверхности (63) мы определим как линии, проекции которых на гиперплоскость $z=0$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}, \tag{64}$$

или (приравнивая отношения (64) дифференциалу вспомогательной независимой переменной u):

$$\frac{dx_1}{du}=P_1, \quad \frac{dx_2}{du}=P_2, \ldots, \quad \frac{dx_n}{du}=P_n. \tag{64_1}$$

Если в правые части этих уравнений на место z, p_i подставить функции φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то система (64_1), в силу сделанных предположений о дифференцируемости, имеет решения, однозначно определяемые начальными условиями: $u=0$, $x_1=x_1^0, \ldots, x_n=x_n^0$. Этот факт можно выразить такой теоремой: *через каждую точку* $[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, z_0=\varphi(x_1, \ldots, x_n)]$ *интегральной поверхности проходит единственная характеристическая линия, лежащая на этой поверхности* (при этом сделано предположение, что в этой точке не имеют места равенства $P_1=P_2=\ldots=P_n=0$).

Введём понятие интегрального элемента. *Интегральным элементом* (первого порядка) или элементом прикосновения решения (63) уравнения (62) назовём совокупность $2n+1$ чисел (координат интегрального элемента):

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \quad z=\varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad p_i=\varphi'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Совокупность интегральных элементов вдоль характеристической линии называется *характеристикой первого порядка*.

Подобно тому как в § 5, дополним систему (64_1) дифференциальными уравнениями для всех координат линейных элементов характеристик.

Для всякого перемещения по интегральной поверхности, следовательно, и для перемещения вдоль характеристической линии, имеет место соотношение:

$$dz=\sum_{i=1}^{n} p_i\,dx_i,$$

откуда вдоль характеристики

$$\frac{dz}{du}=\sum_{i=1}^{n} p_i\frac{dx_i}{du}=\sum_{i=1}^{n} P_i p_i. \tag{64_2}$$

Далее, при перемещении по интегральной поверхности, имеем:

$$dp_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, dx_j \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

откуда вдоль характеристики

$$\frac{dp_i}{du} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \frac{dx_j}{du} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} P_j \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{64_3}$$

Для исключения вторых производных замечаем, что уравнение (62) обращается в тождество при подстановке вместо z его значения (63), а вместо p_i — соответствующих частных производных. Дифференцируя это тождество $F = 0$ по x_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, получаем:

$$X_i + Zp_i + \sum_{j=1}^{n} P_j p_{ji} = 0,$$

откуда $\sum_{j=1}^{n} P_j p_{ji} = -X_i - Zp_i$, и уравнения ($64_3$) обращаются в

$$\frac{dp_i}{du} = -X_i - Zp_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{64_4}$$

Собирая вместе уравнения (64_1), (64_2), (64_4), получаем систему $2n+1$ уравнений с $2n+1$ функциями x_i, z, p_i:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{\sum\limits_{i=1}^{n} P_i p_i} =$$

$$= -\frac{dp_1}{X_1 + Zp_1} = \ldots = -\frac{dp_n}{X_n + Zp_n} = du. \tag{65}$$

Эти уравнения можно интегрировать, не зная решения (63). Решение системы (65) (единственное), определённое начальными значениями u_0, x_1^0, $\ldots$, x_n^0, z_0, p_1^0, $\ldots$, p_n^0, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(u;\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ z_0,\ p_1^0,\ \ldots,\ p_n^0) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),\\ z &= \varphi(u;\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ z_0,\ p_1^0,\ \ldots,\ p_n^0),\\ p_i &= \psi_i(u;\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ z_0,\ p_1^0,\ \ldots,\ p_n^0) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Замечаем, что $F(x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n) = C$ является первым интегралом системы (65). В самом деле, в силу уравнений (65), имеем:

$$\frac{dF}{du} = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{dx_i}{du} + Z\frac{dz}{du} + \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{dp_i}{du} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_i P_i + Z\sum_{i=1}^{n} P_i p_i - \sum_{i=1}^{n} P_i (X_i + Zp_i) = 0.$$

Свяжем начальные значения соотношением:

$$F(x_1^0, \ldots, x_n^0, z_0, p_1^0, \ldots, p_n^0) = 0. \tag{67}$$

Тогда, в силу определения первого интеграла, будем иметь тождество:

$$F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n) = 0,$$

то-есть при выполнении условия (67) все элементы, даваемые решением системы (65), удовлетворяют данному уравнению (62). Так как координаты определённых на интегральной поверхности характеристик первого порядка должны удовлетворять данному уравнению, то, наложив на начальные значения условие (67), мы среди соответствующих решений (66) системы (65) найдём все характеристики всех интегральных поверхностей уравнения (62). Пока ещё не видно, что все такие решения окажутся характеристиками на некоторой интегральной поверхности. Принимая это положение (оно будет доказано ниже), мы назовём *характеристиками первого порядка уравнения* (62) решения (66) системы (65), в которых начальные условия связаны соотношением (67).

Из теоремы единственности получается как следствие теорема: *если две интегральные поверхности имеют общий элемент первого порядка* (т. е. соприкасаются в одной точке), *то они соприкасаются вдоль целой характеристической линии, проходящей через эту точку*: в самом деле, обе интегральные поверхности имеют общую характеристику, определённую общим начальным элементом.

Поставим теперь задачу — построить решение уравнения в частных производных из характеристик. Так как характеристики являются многообразиями одного измерения, а интегральная поверхность есть многообразие n измерений, то для её построения необходимо ввести (через начальные значения) ещё $n-1$ параметров $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, т. е. положить:

$$\left.\begin{aligned} &x_i^0 = x_i^0(v_1, \ldots, v_{n-1}), \quad z_0 = z_0(v_1, \ldots, v_{n-1}), \\ &p_i^0 = p_i^0(v_1, \ldots, v_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

причём, конечно, условие (67) должно выполняться для этих функций. Тогда уравнения

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(u;\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1}) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \\ z &= \varphi(u;\ v_1,\ \ldots,\ v_{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

определяют многообразие n измерений. Чтобы оно было интегральным [при условии, что исключение параметров u, $v_1, \ldots, v_{n-1}$ даёт соотношение вида (63)], необходимо выполнение условия

$$dz - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i = 0,$$

которое равносильно n условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial u} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \\ &\frac{\partial z}{\partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_j} = 0 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1). \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Первое уравнение (70) выполняется в силу уравнения (64_2), остальные требуют для своего выполнения особого выбора функций (68). Чтобы найти условия, которым должны удовлетворять эти функции, обозначим:

$$\frac{\partial z}{\partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_j} = V_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1) \tag{71}$$

и выясним, возможно ли подобрать функции (62) так, чтобы иметь $V_j \equiv 0$.

Дифференцируем уравнение (71) по u, а первое равенство (70) по v_j:

$$\frac{\partial V_j}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v_j},$$

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial v_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial v_j} \frac{\partial x_i}{\partial u}.$$

Вычитая почленно, находим, используя уравнения (65):

$$\frac{\partial V_j}{\partial u} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial p_i}{\partial v_j} \frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial v_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial p_i}{\partial v_j} + \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial v_j} + Z \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_j}.$$

Дифференцируя по v_j тождество $F=0$, в левой части которого подставлены x_i, z, p_i как функции u, v_i, ..., v_{n-1}, находим:

$$0=\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial x_i}{\partial v_j}+Z\frac{\partial z}{\partial v_j}+\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial p_i}{\partial v_j}.$$

Вычитая почленно это равенство из предыдущего, получим, принимая во внимание (71):

$$\frac{\partial V_j}{\partial u}=-ZV_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Интегрируя полученное обыкновенное дифференциальное уравнение для V_j, находим:

$$V_j=V_j^0 e^{-\int\limits_0^u Z\,du}.$$

Итак, для выполнения тождества $V_j\equiv 0$ необходимо и достаточно иметь $V_j^0=0$, или, в раскрытом виде,

$$\frac{\partial z_0}{\partial v_j}-\sum_{i=1}^{n} p_i^0 \frac{\partial x_i^0}{\partial v_j}=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1), \tag{72}$$

или

$$dz_0-\sum_{i=1}^{n} p_i^0\,dx_i^0=0. \tag{72'}$$

Итак, чтобы уравнения (69) давали интегральную поверхность, необходимо и достаточно, чтобы функции x_i^0, z_0, p_i^0 от v_1, ..., v_{n-1} удовлетворяли уравнениям (67) и (72). Нахождение этих функций уже не требует дальнейших интеграций.

Рассмотрим, например, общую задачу Коши: найти интегральную поверхность, проходящую через данное многообразие $n-1$ измерений. Это начальное многообразие мы зададим в параметрической форме:

$$x_i^0=\omega_i(v_1,\ \ldots,\ v_{n-1})\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n);\ z=\omega(v_1,\ \ldots,\ v_{n-1}). \tag{73}$$

Тогда для нахождения n функций p_i^0 мы будем иметь n уравнений (67) и (72); одно из условий их разрешимости есть неравенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & \ldots & P_n \\ \dfrac{\partial x_1^0}{\partial v_1} & \dfrac{\partial x_2^0}{\partial v_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n^0}{\partial v_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial x_1^0}{\partial v_{n-1}} & \dfrac{\partial x_2^0}{\partial v_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n^0}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix},$$

т. е. характеристическая линия не может лежать в касательной $(n-1)$-мерной плоскости начального многообразия. Если в функции ω_i, ω (73) ввести n параметров $a_1, a_2, \ldots, a_n$, мы получаем решение уравнения (62), зависящее от n параметров, которое при некоторых добавочных условиях в случае n независимых переменных также называется **полным интегралом**.

2. Первый метод Якоби. Первый метод Якоби принципиально тождествен с методом Коши; в нём лишь специализирована форма уравнения, в целях приложения к задачам механики.

Искомую функцию обозначаем V, независимые переменные (числом $n+1$) $t, x_1, \ldots, x_n$, частные производные $\frac{\partial V}{\partial x_i} \equiv p_i$ $\left(\text{иногда будем писать также } \frac{\partial V}{\partial t} \equiv P\right)$.

Уравнение предполагается не содержащим искомой функции и разрешённым относительно производной $\frac{\partial V}{\partial t}$ и пишется в форме:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H(t, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{74}$$

где H — заданная функция своих аргументов.

Пишем уравнения характеристик:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial H}{\partial p_n}} = \frac{dV}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + P} =$$

$$= -\frac{dp_1}{\frac{\partial H}{\partial x_1}} = \ldots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial H}{\partial x_n}} = -\frac{dP}{\frac{\partial H}{\partial t}}. \tag{75}$$

Замечаем, что: 1) здесь нет нужды вводить вспомогательное независимое переменное; его роль играет t; 2) можно независимо проинтегрировать систему из $2n$ уравнений (75), не содержащих dV и dP,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \tag{76}$$

Уравнения вида (76) часто встречаются в механике и носят название *канонической системы*, а функция H называется *функцией Гамильтона*.

Пользуясь методом Коши, легко проинтегрировать уравнение (74), если известно общее решение канонической системы (76). Пусть это последнее будет (начальные значения t_0, x_i^0, p_i^0):

$$x_i = \varphi_i(t; t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0),$$

$$p_i = \psi_i(t; t_0, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{77}$$

Чтобы найти значение V вдоль характеристик, заменим в соответствующем дифференциальном уравнении P на $-H$ (в силу данного уравнения), получим:

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial pi}-H;$$

в правой части этого уравнения подставим на место x_i, p_i их найденные выражения (77); получим функцию от t, и V найдётся квадратурой:

$$V=\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i}-H\right)dt+V_0\equiv$$

$$\equiv \tilde{V}(t,\ t_0,\ x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ p_1^0,\ \ldots,\ p_n^0)+V_0. \qquad (78)$$

Для нахождения полного интеграла уравнения (74) достаточно выразить x_i^0, p_i^0, V_0 через n параметров (аналогичных v_j в п. 1 настоящего параграфа) так, чтобы удовлетворялось соотношение:

$$dV_0-\sum_{i=1}^{n} p_i^0\, dx_i^0=0 \qquad (79)$$

(член с dt_0 отсутствует, так как t принято за независимое переменное), и в начальные данные задачи Коши надо ещё ввести $n+1$ параметров a_1, a_2, $\ldots$, a_{n+1}.

Вместе с Гурса мы примем за параметры v_j начальные значения x_1^0, x_2^0, $\ldots$, x_n^0, а задачу Коши поставим так: при $t=t_0$ должно быть:

$$V_0=a_1x_1^0+\ldots+a_nx_n^0+a_{n+1}. \qquad (80)$$

Из уравнений (79) и (80) следует:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i^0}=a_i=p_i^0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Разрешаем n первых уравнений (77) относительно x_1^0, $\ldots$, x_n^0 (это возможно при t, достаточно близком к t_0, так как якобиан от x_i по x_j^0 при $t=t_0$ равен 1). Заменив в них p_i^0 через a_i, получим:

$$x_i^0=\chi_i(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ t,\ t_0;\ a_1,\ \ldots,\ a_n) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (81)$$

Тогда выражение

$$V=\int_0^t\left(\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}-H\right)t+\sum_{i=1}^n a_i x_i^0+a_{n+1}=$$

$$=\tilde{V}+\sum_{i=1}^n a_i x_i^0+a_{n+1}, \quad (78)$$

в котором p_i^0 заменены через a_i, а x_i^0 — через их выражения (81), есть решение уравнения (74), зависящее от $n+1$ произвольных постоянных, то есть полный интеграл.

3. Интегрирование канонической системы. В аналитической механике требуется найти решение канонической системы:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \quad (76)$$

а уравнение Якоби является вспомогательным орудием.

Напомним определение полного интеграла, сформулировав это определение для любого числа независимых переменных. *Соотношение, связывающее искомую функцию, независимые переменные и параметры в числе, равном числу независимых переменных, называется полным интегралом уравнения в частных производных, если, исключая параметры из этого соотношения и из соотношений, получаемых его дифференцированием по независимым переменным, мы получаем данное уравнение.* Эквивалентно этому определению другое: *полным интегралом называется решение уравнения в частных производных первого порядка, содержащее независимые параметры в числе, равном числу независимых переменных*; при этом критерием независимости как раз является тот факт, что после упомянутого в первом определении исключения мы приходим к одному данному уравнению. Заметим, что в случае, если данное уравнение не содержит явно искомой функции, один из параметров в полном интеграле можно взять аддитивно.

Пусть мы имеем какой-нибудь полный интеграл *уравнения Якоби*:

$$V=V(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n;\quad a_1,\ \ldots,\ a_n)+a_{n+1}. \quad (82)$$

Из полного интеграла в случае $n+1$ независимых переменных, как и в случае двух переменных, характеристики получаются дифференцированием. Не останавливаясь на развёрнутой теории полного интеграла в общем случае, проведём это доказательство для полного интеграла уравнения Якоби.

ТЕОРЕМА ЯКОБИ. *Если известен полный интеграл* (82) *уравнения* (74), *то* $2n$ *интегралов канонической системы* (76) *даются*

равенствами:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = p_i, \quad \frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{83}$$

где b_i наряду с a_i суть произвольные постоянные.

Доказательство. Уравнение (74) получается из полного интеграла (82) исключением параметров из уравнения (82) и $n+1$ следующих:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V'_t(t, x_1, \ldots, x_n; \quad a_1, \ldots, a_n), \tag{84_1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = V'_{x_i}(t, x_1, \ldots, x_n; \quad a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{84_2}$$

Чтобы получить уравнение вида (74), надо определить из системы (84_2) параметры $a_1, \ldots, a_n$ через $\frac{dV}{dx_i}$, t, x_i и внести эти выражения в уравнение (84_1). Одно из условий разрешимости есть неравенство нулю якобиана:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_1} \cdots \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_n} \cdots \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{85}$$

Мы будем предполагать, что условие (85) выполнено. В таком случае вторая группа из n уравнений (83) даёт возможность (в некоторой области значений постоянных b_i) выразить x_i через t и параметры a_j, b_j.

Затем, подставляя эти значения в выражения

$$V_{x_i}(t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n),$$

определяем по первым n формулам (83) p_i в функции t и параметров a_i, b_i. Докажем, что найденные значения x_i, p_i удовлетворяют, как функции t, канонической системе обыкновенных дифференциальных уравнений (76). По подстановке найденных значений $x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ в уравнение $\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i$ оно обратится в тождество; дифференцируем это тождество по t:

$$0 = \frac{\partial^2 V}{\partial t \, \partial a_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \, \partial a_i} \frac{dx_k}{dt}.$$

С другой стороны, дифференцируя по параметру a_i уравнение (74), в которое на место V подставлено его значение (82), находим:

$$0=\frac{\partial^2 V}{\partial t\,\partial a_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\dfrac{\partial V}{\partial x_k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial a_i}.$$

Вычитая почленно последние равенства, находим, принимая во внимание первую группу уравнений (83):

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial a_i}\left(\frac{dx_k}{dt}-\frac{\partial H}{\partial p_k}\right)=0 \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Так как определитель этой системы не равен нулю, то все скобки равны нулю, и мы получаем первую группу из n канонических уравнений.

Аналогично, полученное после подстановки значений x_i равенство $p_i=V'_{x_i}(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ a_1,\ \ldots,\ a_n)$ дифференцируем по t:

$$\frac{dp_i}{dt}=\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{dx_k}{dt}.$$

Из уравнения (74) дифференцированием по x_i находим:

$$0=\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial\dfrac{\partial V}{\partial x_k}}\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\,\partial x_i}.$$

Вычитая оба равенства почленно и принимая во внимание уже полученные соотношения $\dfrac{dx_k}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial p_k}$, находим:

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то-есть вторую группу уравнений (76). Теорема доказана.

4. Методы нахождения полного интеграла. Если полный интеграл уравнения Якоби используется для интегрирования канонической системы, то ясно, что к его нахождению нельзя применять первый метод Якоби, который требует предварительного нахождения характеристик. Однако в ряде случаев можно найти полный интеграл из соображений, общая теория которых относится ко *«второму методу Якоби»*. Некоторые такие соображения, относящиеся к случаю «отделения переменных», мы здесь изложим.

Весьма важный в механике случай, — когда функция Гамильтона не зависит явно от времени: $H=H(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)$. В этом случае каноническая система (76) допускает первый интеграл:

$$H(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ p_1,\ \ldots,\ p_n)=h \tag{86}$$

(интеграл энергии). В самом деле, дифференцируя соотношение (86) по t и принимая во внимание уравнения (76), находим:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0.$$

В этом случае полный интеграл V можно искать в виде:

$$V = -ht + W(x_1, \ldots, x_n) + a_{n+1},$$

где W — новая искомая функция. Подставляя в уравнение (74), находим:

$$H\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial W}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = h, \tag{74_1}$$

уравнение для W с n независимыми переменными (вместо $n+1$), причём в него уже входит один параметр h. Полный интеграл получится в виде:

$$V = -ht + W(x_1, \ldots, x_n;\ h;\ a_1, \ldots, a_{n-1}) + a_{n+1};$$

дифференцирование по параметрам $h, a_1, \ldots, a_{n-1}$ и приравнивание новым постоянным [вторая группа (83)] дают n соотношений, из которых можно получить $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в функции t и $2n$ произвольных постоянных:

$$\alpha = -t + \frac{\partial W}{\partial h}, \quad \frac{\partial W}{\partial a_j} = b_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Вообще, если в функцию H в уравнении (74) и (74_1) явно не входит какое-нибудь независимое переменное, например x_1 (циклическая координата), можно искать полный интеграл [например, для (74_1)] в форме:

$$W = a_1 x_1 + W_1(x_2, \ldots, x_n),$$

и для W мы имеем уравнение с $n-1$ независимыми переменными:

$$H\left(x_1, \ldots, x_n, a_1, \frac{\partial W}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial x_n}\right) = h,$$

в которое входят два параметра h и a_1. Если найдём его полный интеграл $W_1(x_2, \ldots, x_n;\ h, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$, то полный интеграл первоначального уравнения будет:

$$V = -ht + W_1(x_2, \ldots, x_n;\ a_1;\ a_2, \ldots, a_{n-1}) + a_1 x_1 + a_{n+1},$$

т. е. будет содержать нужное число $n+1$ параметров. Итак, можно предполагать, что уравнение в частных производных (74_1), где мы

опять обозначим $\frac{\partial W}{\partial x_i} \equiv p_i$, уже не содержит циклических координат. Предположим далее, что функция H в уравнении (74_1) имеет вид:

$$H \equiv H(\varphi(x_1, p_1), x_2, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n) = h \tag{87}$$

(переменные x_1, p_1 отделены). Ищем решение соответствующего уравнения Якоби в форме:

$$W = W_1(x_1) + W^*(x_2, \ldots, x_n).$$

Имеем:

$$p_1 = W_1'(x_1), \quad p_j = \frac{\partial W^*}{\partial x_j} \quad (j = 2, 3, \ldots, n).$$

Подставляя в уравнение (87), находим:

$$H[\varphi(x_1, W_1'(x_1)), x_2, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n] = h.$$

Если теперь подобрать $W_1(x_1)$ так, чтобы было

$$\varphi(x_1, W_1'(x_1)) = a_1, \tag{88}$$

где a_1 — произвольная постоянная, то нахождение W_1 сведётся к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения (88), а нахождение W сведётся к интеграции уравнения с $n-1$ независимыми переменными, причём вместо исключённого переменного x_1 вошёл параметр a_1. Отсюда правило: *если в функции Гамильтона отделены переменные x_1, p_1 (87), то составляем обыкновенное дифференциальное уравнение*:

$$\varphi(x_1, p_1) = a_1, \quad p_1 = \frac{dW_1}{dx_1};$$

квадратурой находим его решение:

$$p_1 = \psi(x_1, a), \quad W_1 = \int \psi(x_1, a)\, dx_1,$$

а затем находим полный интеграл W^* уравнения (с $n-1$ переменными):

$$H\left(a_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial W^*}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial W^*}{\partial x_n}\right) = h; \tag{89}$$

тогда полный интеграл первоначального уравнения Якоби получится в виде:

$$V = -ht + \int \psi(x_1, a_1)\, dx_1 + W^*(x_2, \ldots, x_n, a_1; a_2, \ldots, a_n) + a_{n+1}.$$

Может случиться, что в левой части уравнения (89) ещё какая-нибудь пара аргументов x_i, p_i окажется отделённой; тогда применяем тот же процесс, уменьшающий число независимых переменных.

В механике и физике интеграция канонических систем при помощи сведения к уравнению Якоби с успехом применяется только в тех случаях, когда нахождение полного интеграла сводится при надлежащем выборе координат к последовательному отделению всех пар переменных.

Пример (Якоби). Движение планеты в полярных координатах приводит к уравнению в частных производных:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\}=\frac{k^2}{r}-\alpha,$$

где α — произвольная постоянная (*постоянная энергии*). Якоби выделяет уравнение:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2\right\}=\beta,$$

после чего остаётся

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2=\frac{k^2}{r}-\alpha-\frac{\beta}{r^2}$$

$\left(\text{переменные } r,\ \frac{\partial W}{\partial r} \text{ отделены}\right)$; его интеграл:

$$W=\int\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}\,dr+F(\varphi,\ \psi),$$

и для F получается дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\varphi}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2\right\}=\beta.$$

Вводя соотношение $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \psi}\right)^2=\gamma$ (ψ — циклическая координата), получаем:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2=\beta-\frac{\gamma}{\sin^2\varphi};$$

из этих уравнений находим:

$$F(\varphi,\ \psi)=\int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}\,d\varphi+\sqrt{2\gamma}\,\psi,$$

и окончательно (без аддитивной постоянной):

$$W=\int\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}\,dr+\int\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}\,d\varphi+\sqrt{2\gamma}\,\psi.$$

Решение канонической системы (нет нужды её выписывать) есть

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha}=\alpha'-t,\quad \frac{\partial W}{\partial \beta}=\beta',\quad \frac{\partial W}{\partial \gamma}=\gamma'$$

(α', β', γ' — произвольные постоянные) или, после выполнения дифференцирования,

$$t-\alpha'=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}},$$

$$\beta'=-\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}}+\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}},$$

$$\gamma'=-\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}}+\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\psi.$$

Очевидно, квадратуры вычисляются в элементарных функциях.

§ 7. Геометрическая теория уравнений с частными производными первого порядка.

1. Конус T. Рассмотрим уравнение:

$$F(x, y, z, p, q)=0, \tag{1}$$

считая точку (x, y, z) данной, фиксированной. В таком случае уравнение (1) устанавливает связь между угловыми коэффициентами p и q всех элементов первого порядка (x, y, z, p, q), удовлетворяющих данному уравнению в частных производных и имеющих общую точку (x, y, z). Таким образом, из связки плоскостей, проходящих через точку (x, y, z),

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y), \tag{90}$$

соотношение (1) выделяет семейство от одного параметра, за который мы можем принять, например, q. Огибающая этого семейства есть некоторый конус; назовём его *конусом* T; его прямолинейные образующие являются характеристиками (в смысле дифференциальной геометрии) рассматриваемого семейства плоскостей. Найдём уравнение образующих конуса T; для этого дифференцируем уравнение (90) по параметру q:

$$\frac{dp}{dq}(X-x)+(Y-y)=0.$$

Производную $\frac{dp}{dq}$ находим из уравнения (1):

$$P\frac{dp}{dq}+Q=0;$$

подставляя её значение в предпоследнее уравнение, находим:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}. \tag{91}$$