($\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ — произвольные постоянные) или, после выполнения дифференцирования,

$$t-\alpha'=\int\frac{dr}{\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}},$$

$$\beta'=-\int\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2k^2}{r}-2\alpha-\frac{2\beta}{r^2}}}+\int\frac{d\varphi}{\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}},$$

$$\gamma'=-\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{2\beta-\frac{2\gamma}{\sin^2\varphi}}}+\frac{1}{\sqrt{2\gamma}}\psi.$$

Очевидно, квадратуры вычисляются в элементарных функциях.

## § 7. Геометрическая теория уравнений с частными производными первого порядка.

1. Конус $T$. Рассмотрим уравнение:

$$F(x, y, z, p, q)=0, \tag{1}$$

считая точку $(x, y, z)$ данной, фиксированной. В таком случае уравнение (1) устанавливает связь между угловыми коэффициентами $p$ и $q$ всех элементов первого порядка $(x, y, z, p, q)$, удовлетворяющих данному уравнению в частных производных и имеющих общую точку $(x, y, z)$. Таким образом, из связки плоскостей, проходящих через точку $(x, y, z)$,

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y), \tag{90}$$

соотношение (1) выделяет семейство от одного параметра, за который мы можем принять, например, $q$. Огибающая этого семейства есть некоторый конус; назовём его *конусом* $T$; его прямолинейные образующие являются характеристиками (в смысле дифференциальной геометрии) рассматриваемого семейства плоскостей. Найдём уравнение образующих конуса $T$; для этого дифференцируем уравнение (90) по параметру $q$:

$$\frac{dp}{dq}(X-x)+(Y-y)=0.$$

Производную $\frac{dp}{dq}$ находим из уравнения (1):

$$P\frac{dp}{dq}+Q=0;$$

подставляя её значение в предпоследнее уравнение, находим:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}. \tag{91}$$

Уравнения (90) и (91) при фиксированных $p$ и $q$, связанных соотношением (1), определяют образующие конуса $T$; эти уравнения можно написать в симметричной форме:

$$\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{Pp+Qq}. \tag{92}$$

Сопоставляя уравнения (92) с уравнениями ($48_1$), ($48_2$) и условием (54), мы видим, что каждая характеристика, проходящая через точку $(x, y, z)$, касается одной из образующих конуса $T$. В частности, если дана интегральная поверхность, проходящая через данную точку, то её касательная плоскость, очевидно, принадлежит семейству (90), (1); направление характеристической линии на этой поверхности в точке $(x, y, z)$ совпадает с направлением той образующей конуса $T$, по которой этот конус касается касательной плоскости к поверхности. Так как $(x, y, z)$ есть произвольная точка поверхности, то мы приходим к новому, геометрическому определению *характеристических линий на интегральной поверхности*: это — *линии, касающиеся в каждой точке* $(x, y, z)$ *поверхности той образующей соответствующего этой точке конуса* $T$, *которая лежит в касательной плоскости к поверхности.*

Чтобы получить уравнение конуса $T$, надо исключить $p$ и $q$ из уравнений (1) и (92); из системы (92) $p$ и $q$ определяются как функции $x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}, \frac{Z-z}{X-x}$; подставляя их выражения в уравнение (1), получим уравнение конуса $T$ вида:

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}, \frac{Z-z}{X-x}\right)=0. \tag{93}$$

Если уравнение в частных производных дано в разрешённом виде:

$$p=f(x, y, z, q), \tag{18}$$

где $f$ — дважды дифференцируемая функция своих аргументов, то система (92) имеет вид:

$$X-x=\frac{Y-y}{-f'_q}=\frac{Z-z}{f-qf'_q},$$

или

$$\frac{Y-y}{X-x}=-f'_q, \quad \frac{Z-z}{X-x}=f-qf'_q. \tag{$92_1$}$$

Первое из уравнений ($92_1$) может быть разрешено относительно $q$, если $f''_{qq}\neq 0$ (тождественное обращение в нуль второй производной соответствует случаю линейного уравнения, для которого конус $T$ вырождается в прямую, см. ниже, п. 3). Подставляя найденное значение $q$ в уравнение (18), а затем значения $p$ и $q$ во второе уравнение ($92_1$), найдём уравнение конуса $T$ в виде:

$$Z-z=(X-x)\varphi\left(x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}\right). \tag{$93_1$}$$

Обратно, если дано уравнение (93) или ($93_1$), относящее каждой точке $(x, y, z)$ конус с текущими координатами $X$, $Y$, $Z$, то, рассматривая этот конус, как конус $T$ некоторого уравнения в частных производных первого порядка, мы можем найти это последнее; а именно, это будет уравнение, связывающее угловые коэффициенты $p$ и $q$ касательных плоскостей к конусу. Будем исходить из уравнения ($93_1$) как более простого. Обозначим через $\varphi_1$ производную от $\varphi$ по аргументу $\frac{Y-y}{X-x}$; тогда для угловых коэффициентов касательных плоскостей к конусу ($93_1$) получаются выражения:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} \equiv p = \varphi - \varphi_1 \frac{Y-y}{X-x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} \equiv q = \varphi_1\left(x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}\right). \tag{94}$$

Из второго уравнения (94) можно выразить $\frac{Y-y}{X-x}$ через $x, y, z, q$ $\Big($если бы производная от $\varphi_1$ по $\frac{Y-y}{X-x}$ оказалась тождественным нулём, это означало бы, что $\varphi$ — линейная функция последнего аргумента, т. е. конус вырождается в плоскость$\Big)$. Подставляя найденное выражение в первое из уравнений (94), мы получим уравнение в частных производных вида (18).

Если конус задан уравнением (93), то уравнение в частных производных получится исключением отношений $\frac{Y-y}{X-x}$ и $\frac{Z-z}{X-x}$ из уравнений (93) и следующих:

$$p = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}\frac{Y-y}{X-x} + \frac{Z-z}{X-x}, \quad q = -\frac{\Phi_1}{\Phi_2}, \tag{$94_1$}$$

где $\Phi_1$ и $\Phi_2$ обозначают частные производные от $\Phi$ соответственно по предпоследнему и последнему аргументам. Получим уравнение вида (1), соответствующее конусу (93).

Примечание. С точки зрения введённой нами геометрической интерпретации является возможным истолковать упомянутое в сноске на стр. 404 дополнительное условие для возможности решения общей задачи Коши. Оно состоит в существовании общего решения относительно $p_0$ и $q_0$ уравнений (54) и (58). При заданных функциях $x_0(v)$, $y_0(v)$, $z_0(v)$ уравнение $z_0(v) - p_0 x_0'(v) - q_0 y_0'(v) = 0$ определяет при фиксированном $v$ пучок плоскостей с осью $\frac{X-x_0}{x_0'} = \frac{Y-y_0}{y_0'} = \frac{Z-z_0}{z_0'}$; уравнение (54), как мы видели, определяет семейство плоскостей, касательных к конусу $T$. Таким образом, условие, о котором идёт речь, сводится к тому, чтобы в числе плоскостей пучка существовала плоскость, касательная к $T$. Если, например, $T$ есть конус второго порядка, то это условие равносильно требованию, чтобы через ось пучка, т. е. касательную к начальной прямой, можно было провести действительную касательную к конусу $T$.

2. Кривые Монжа. Заменяя в уравнении (93) или ($93_1$) приращения $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ соответственно дифференциалами $dx$, $dy$, $dz$, мы получаем уравнение Монжа:

$$\Phi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{dz}{dx}\right)=0, \tag{95}$$

однородное относительно дифференциалов и нелинейное (линейное уравнение — уравнение Пфаффа — соответствует вырождению конуса $T$ в плоскость). Это уравнение определяет кривые в пространстве, обладающие тем свойством, что в каждой точке такая кривая касается одной из характеристических линий уравнения (1), проходящих через данную точку (*кривые Монжа*, «интегральные кривые» по терминологии Софуса Ли). В число этих кривых входят характеристические кривые уравнения (1) (т. е. кривые, являющиеся носителями характеристик первого порядка); геометрически это очевидно из определения; это же можно усмотреть и из того факта, что вдоль характеристик выполняются соотношения (1) и ($48_1$), ($48_2$), следствием которых является уравнение (95). Но множество кривых Монжа значительно обширнее, чем множество характеристик, так как эти последние образуют семейство от трёх параметров, а общее решение уравнения Монжа (95) зависит от произвольной функции. В самом деле, уравнение (95) есть обыкновенное дифференциальное уравнение с двумя искомыми функциями; для его интегрирования можно одну из функций задать произвольно, например $z=\psi(x)$, и для определения $y(x)$ останется проинтегрировать уравнение первого порядка:

$$\Phi\left(x,\ y,\ \psi,\ (x),\ \frac{dy}{dx},\ \psi'\ (x)\right)=0.$$

Мы видели, что если в качестве начальной кривой взять характеристическую линию, задача Коши становится неопределённой; посмотрим, как обстоит дело, если за начальную кривую взять одну из кривых Монжа (не характеристических). Возьмём уравнение в частных производных в форме (18) и соответствующее уравнение Монжа в виде, соответствующем уравнению конуса $T$ ($93_1$):

$$\frac{dz}{dx}=\varphi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{dy}{dx}\right). \tag{$95_1$}$$

Пусть начальная кривая задана в параметрической форме:

$$x=x_0(v),\quad y=y_0(v),\quad z=z_0(v), \tag{96}$$

причём имеет место тождество:

$$z_0'=x_0'\varphi\left(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \frac{y_0'}{x_0'}\right).$$

Формулы (94), с заменой приращений дифференциалами, однозначно определяют $p_0(v)$ и $q_0(v)$, причём легко проверить, что выполняется тождество $z_0'-p_0x_0'-q_0y_0'=0$. Так как следствием формул (94) и уравнения ($93_1$) является уравнение (18), то $x_0, \ldots, q_0$ связаны также соотношением

$p_0 = f(x_0, y_0, z_0, q_0)$. Подставляя начальные значения, как функции параметра $v$, в уравнения характеристик (52), мы получаем семейство характеристик от одного параметра, касающихся в каждой точке начальной кривой; соответствующие формулы имеют вид:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad p = p(u, v), \quad q = q(u, v), \tag{97}$$

причём, ввиду выполнения условий ($54_1$) и (58), имеем тождественно относительно $u$, $v$:

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Однако в окрестности кривой $u = 0$ первые два уравнения (97) не могут быть однозначно разрешены относительно $u$, $v$, так как начальная кривая касается характеристик, и, следовательно, $\left.\dfrac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|_{u=0} = 0$. Но вне кривой $u = 0$ первые три уравнения (97), вообще говоря, определяют интегральную поверхность; эта поверхность содержит кривую Монжа (96), которая является для поверхности особой линией (ребром возврата). Таким образом, *если за начальную кривую взята кривая Монжа, то не существует интегральной поверхности, непрерывно дифференцируемой на этой кривой*; однако *существует интегральная поверхность, составленная из характеристик, касающихся кривой Монжа, причём эта кривая является ребром возврата поверхности.*

На этом замечании основан метод нахождения кривых Монжа, при котором в формулы, выражающие координаты кривой, произвольная функция входит только под знаком производной (а не под знаком квадратуры, и тем более не входит в подлежащее интегрированию дифференциальное уравнение).

Пусть дано уравнение Монжа (95) или ($95_1$). Строим соответствующее ему уравнение в частных производных (1) или (18), пользуясь формулами (94) или ($94_1$), и пусть его полный интеграл есть

$$z = \varphi(x, y, a, b). \tag{$19_1$}$$

Беря произвольную функцию $b = \omega(a)$, мы получаем общий интеграл, присоединяя к уравнению ($19_1$) уравнение:

$$\varphi'_a + \varphi'_b \omega'(a) = 0. \tag{29}$$

Для постоянных значений $a$ уравнения ($19_1$) и (29) дают характеристики на поверхности, определённой общим интегралом; чтобы найти ребро возврата этой поверхности — огибающую семейства характеристик, зависящего от параметра $a$, — заметим, что уравнение (29) представляет проекцию семейства характеристик на плоскость $xOy$; находим огибающую этого плоского семейства, дифференцируя (29) по параметру:

$$\varphi''_{aa} + 2\varphi''_{ab}\omega'(a) + \varphi''_{bb}\omega'^2(a) + \varphi'_b\omega''(a) = 0. \tag{98}$$

Уравнения ($19_1$), (29) и (98), будучи разрешены относительно $x$, $y$, $z$, представят огибающую характеристик на интегральной поверхности, т. е. кривую Монжа; её уравнения будут иметь вид:

$$x = \psi_1(a, \omega(a), \omega'(a), \omega''(a)),$$
$$y = \psi_2(a, \omega, \omega', \omega''),$$
$$z = \psi_3(a, \omega, \omega', \omega'');$$

они содержат, кроме произвольной функции $\omega(a)$, только её производные. Так как всякая кривая Монжа является огибающей характеристик той интегральной поверхности, которая даётся тремя первыми формулами (97), то мы вправе ожидать, что полученное решение будет общим.

Пример 16. Уравнение Монжа $(dz+x\,dy+y\,dx)^2=4(z+xy)\,dx\,dy$. Переписываем его в виде $\frac{dz}{dy}=-y-x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{z+xy}\sqrt{\frac{dy}{dx}}$. По формулам (94) находим:

$$p=-y-x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{z+xy}\sqrt{\frac{dy}{dx}}+x\frac{dy}{dx}-\frac{dy}{dx}\sqrt{z+xy}\sqrt{\frac{dx}{dy}}=$$
$$=-y+\sqrt{z+xy}\sqrt{\frac{dy}{dx}};\quad q=-x+\sqrt{z+xy}\sqrt{\frac{dx}{dy}};$$

исключая $\frac{dy}{dx}$, получаем: $(p+y)(q+x)=z+xy$, или $z=px+qy+pq$ — уравнение в частных производных, соответствующее данному уравнению Монжа. Его полный интеграл $z=ax+by+ab$. Безинтегральное выражение общего решения уравнения Монжа получается из уравнений:

$$z=ax+\omega(a)\,y+a\omega(a),\quad x+\omega'y+\omega+a\omega'=0,$$
$$\omega''y+a\omega''+2\omega'=0,\quad \text{или}\quad y=-a-\frac{2\omega'}{\omega''},$$
$$x=\frac{2\omega'^2}{\omega''}-\omega,\quad z=-a\omega+2\frac{a\omega'^2}{\omega''}-\frac{2\omega\omega'}{\omega''}.$$

ЗАДАЧИ.

**223.** Найти дифференциальное уравнение (Монжа) кривых, касательная которых образует в каждой точке угол $\frac{\pi}{4}$ с плоскостью $xOy$; найти безинтегральное выражение общего решения.

**224.** Найти общее решение уравнения $dz^2=4\,dx\,dy$.

**225.** Найти уравнение Монжа, соответствующее уравнению в частных производных $pq=z$, и написать общее решение.

**3. Сравнение с теорией линейных уравнений в частных производных.** Изложенная нами теория полного и общего интеграла нигде не зависела от предположения, что данное уравнение нелинейное. Она поэтому целиком прилагается и к линейному уравнению:

$$P(x,\ y,\ z)\,p+Q(x,\ y,\ z)\,q=R(x,\ y,\ z). \tag{99}$$

Заметим только, что мы в главе VIII строили общее решение из двух первых интегралов вспомогательной системы двух обыкновенных уравнений; пусть эти интегралы будут:

$$u(x,\ y,\ z)=C_1,\quad v(x,\ y,\ z)=C_2. \tag{100}$$

Мы можем, в частности, построить *полный интеграл, линейный относительно двух произвольных постоянных* $a$, $b$:

$$V\equiv u(x,\ y,\ z)+av(x,\ y,\ z)+b=0. \tag{101}$$

Легко видеть, что, обратно, если полный интеграл линейно зависит от произвольных постоянных,

$$V\equiv f(x,\ y,\ z)\,a+g(x,\ y,\ z)\,b+h(x,\ y,\ z)=0,$$

то полученное из него в результате исключения этих постоянных уравнение в частных производных будет линейным.

Из полного интеграла (101) мы легко приходим к известному нам общему решению уравнения (99).

В самом деле, согласно теории общего интеграла, полагаем $b = \omega(a)$; равенство (101) перепишется так:

$$u + av + \omega(a) = 0.$$

Дифференцируем последнее равенство по $a$:

$$v + \omega'(a) = 0,$$

откуда $a$ получается как некоторая функция от $v$; подставляя эту функцию в предпоследнее равенство, имеем общий интеграл:

$$u = \psi(v).$$

Определение характеристических линий из полного интеграла (101) даёт нам:

$$u + av + b = 0, \quad v + c = 0,$$

или

$$u = ac - b, \quad v = -c,$$

т. е. уравнения, эквивалентные системе (100), опять в согласии с теорией линейных уравнений в частных производных.

Однако уже здесь можно отметить различие с теорией нелинейных уравнений — семейство характеристических линий линейного уравнения зависит только от двух (существенных) параметров.

При применении метода Коши обнаруживается более глубокое различие между двумя типами уравнений.

В методе Коши конус $T$ определялся при постоянных $x$, $y$, $z$ как огибающая семейства плоскостей:

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \tag{90}$$

где $p$ и $q$ связаны данным уравнением, т. е. в случае линейного уравнения, линейным соотношением:

$$Pp + Qq = R. \tag{99}$$

В этом случае семейство плоскостей есть пучок, а огибающая, т. е. конус $T$, вырождается в ось пучка с уравнениями (62) и

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q},$$

или

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{Z - z}{R}.$$

Таким образом, направление характеристической кривой однозначно определено в каждой точке рассматриваемой области про-

странства. Соответствено этому, дифференциальные уравнения характеристических кривых

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \tag{102}$$

не содержат величин $p$, $q$ и могут быть проинтегрированы без предварительного задания интегральной поверхности. Итак, *в случае линейного уравнения характеристические линии уже являются характеристиками (нулевого порядка)*. Семейство характеристик нулевого порядка зависит от двух параметров. Для интеграции уравнения (99) нет надобности дополнять систему (102) добавочными уравнениями. Если всё же ввести эти добавочные уравнения, то при их интеграции для получения характеристик первого порядка одно из начальных значений $p_0$, $q_0$ остаётся произвольным, другое определится из уравнения:

$$P(x_0, y_0, z_0)\, p_0 + Q(x_0, y_0, z_0)\, q_0 = R(x_0, y_0, z_0).$$

Таким образом, каждая характеристика нулевого порядка является носителем $\infty^1$ характеристик первого порядка; семейство характеристик первого порядка и в случае линейного уравнения зависит от трёх произвольных постоянных.

ЗАДАЧА.

**226.** Пусть уравнения характеристик нулевого порядка для (102) будут $y = g(x; y_0, z_0)$, $z = h(x; y_0, z_0)$, где начальные значения $y_0$, $z_0$ соответствуют $x = x_0$. Найти характеристики первого порядка.

Указание. Воспользоваться соотношением $dz = p\,dx + q\,dy$.