В. И. СМИРНОВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ ВТОРОЙ

ИЗДАНИЕ ДВАДЦАТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника
для механико-математических
и физико-математических факультетов
государственных университетов
и втузов с расширенной программой*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

ГЛАВА V

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

§ 12. КРИВЫЕ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

133. Плоская кривая, ее кривизна и эволюта. В настоящей главе мы дадим основы теории кривых и поверхностей, причем начнем с исследования плоских кривых, затем перейдем к кривым в пространстве и к поверхностям. При изложении мы будем пользоваться векторами, так что читателю необходимо твердо помнить содержание первых номеров предыдущей главы включительно до [119], содержащего вопрос о дифференцировании вектора. Начнем с доказательства леммы:

Лемма. *Если* $\mathbf{A}$ *есть вектор длины единицы (единичный вектор), зависящий от скалярного параметра* t, *то* $\frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A}=0$, то есть $\frac{d\mathbf{A}}{dt}\perp\mathbf{A}$.

Действительно, по условию леммы $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=1$, и, дифференцируя это равенство по t, получим

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{A}}{dt}=0,$$

или, в силу независимости скалярного произведения от порядка множителей:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{A}=0,\quad \text{т. е.}\quad \frac{d\mathbf{A}}{dt}\perp\mathbf{A},$$

причем условие $\frac{d\mathbf{A}}{dt}\perp\mathbf{A}$ имеет очевидно смысл лишь в том случае, если вектор $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ отличен от нуля.

Здесь и в дальнейшем мы всегда предполагаем существование и непрерывность тех производных, о которых говорится в тексте.

Пусть на плоскости имеется некоторая кривая (L) и скалярный параметр t определяет положение переменной точки M на этой кривой. Мы можем охарактеризовать нашу кривую радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$

из некоторой постоянной точки O в переменную точку кривой (рис. 96). Как мы видели [**119**], производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ дает вектор, направленный по касательной к кривой, а если за параметр принять длину дуги s кривой, отсчитываемую от определенной точки кривой в определенном направлении, то производная $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ даст *единичный вектор касательной* $\mathbf{t}$, направление которого совпадает с направлением увеличения параметра s вдоль кривой:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{t}. \tag{1}$$

Производная от единичного вектора-касательной по s называется *вектором кривизны*:

$$\mathbf{N}=\frac{d\mathbf{t}}{ds}. \tag{2}$$

Длина этого вектора характеризует быстроту изменения направления вектора $\mathbf{t}$ и называется *кривизной кривой.*

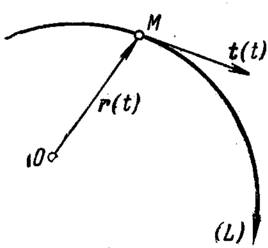

Рис. 96.

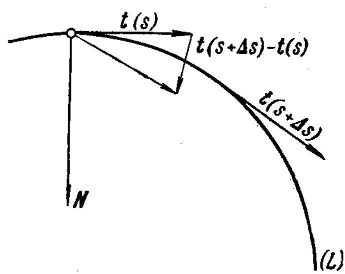

Рис. 97.

В силу доказанной леммы вектор кривизны перпендикулярен касательной, т. е. направлен по нормали.

Кроме того из его определения непосредственно следует, что он направлен в сторону вогнутости кривой, так как в эту сторону направлена разность $\mathbf{t}(s+\Delta s)-\mathbf{t}(s)$ при $\Delta s>0$ (рис. 97).

Длина вектора $\mathbf{N}$, как мы уже указали, называется кривизной кривой, и если ввести обозначение

$$|\mathbf{N}|=\frac{1}{\rho}, \tag{3}$$

то величина ρ, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны.* Введем в рассмотрение единичный вектор кривизны $\mathbf{n}$, то есть вектор длины единица, по направлению совпадающий с $\mathbf{N}$.

Если длина $|\mathbf{N}|=0$, то надо считать $\rho=\infty$, и вектор $\mathbf{n}$ не определен. Если, например, (L) — прямая, то во всех ее точках

$|\mathbf{N}|=0$, и мы можем выбирать любое из двух направлений нормали к прямой в той плоскости, в которой мы рассматриваем прямую. В дальнейшем будем считать, что $|\mathbf{N}|\neq 0$.

В силу (3) имеем

$$\mathbf{N}=\frac{1}{\rho}\mathbf{n}. \tag{4}$$

Отложим на направлении $\mathbf{n}$, т. е. на направлении нормали кривой в сторону вогнутости, отрезок MC, равный радиусу кривизны ρ в точке M (рис. 98). Его конец C называется *центром кривизны* кривой в точке M. Если M двигается вдоль кривой (L), то C меняется и описывает некоторую кривую (L_1), которая называется *эволютой кривой* (L), т. е. эволютой кривой называется геометрическое место ее центров кривизны.

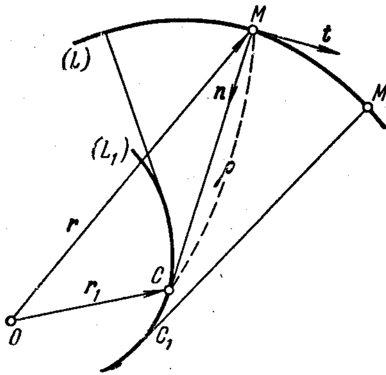

Рис. 98.

Для дальнейшего нам необходимо определить производную $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$. Вектор $\mathbf{n}$ есть единичный вектор, и, следовательно, $\frac{d\mathbf{n}}{ds}\perp\mathbf{n}$, то есть $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ параллелен касательной. Дифференцируя очевидное равенство $\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0$ по s, будем иметь

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}+\mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{n}}{ds}=0.$$

Но векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{n}$ совпадают по направлению, и, в силу (4), $\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{\rho}$, так что из последнего равенства следует $\mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}$. Сопоставляя это с параллельностью векторов $\mathbf{t}$ и $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$, видим, что $\frac{d\mathbf{n}}{ds}$ по направлению противоположен $\mathbf{t}$ и имеет длину $\frac{1}{\rho}$, т. е.

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\mathbf{t}. \tag{5}$$

Пусть, как и выше, $\mathbf{r}$ и s — радиус-вектор и длина дуги для кривой (L), а $\mathbf{r}_1$ и s_1 — те же величины для эволюты (L_1). Дифференцируя равенство (рис. 98)

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}+\rho\mathbf{n}$$

по s, получим

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds}=\mathbf{t}+\frac{d\rho}{ds}\mathbf{n}+\rho\frac{d\mathbf{n}}{ds},$$

или,

в силу (5),

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds}=\mathbf{t}+\frac{d\rho}{ds}\mathbf{n}-\mathbf{t}, \quad \text{то есть} \quad \frac{d\mathbf{r}_1}{ds}=\frac{d\rho}{ds}\mathbf{n}. \tag{6}$$

Правая часть этой формулы есть вектор, направленный по нормали к (L), а левая — вектор, направленный по касательной к эволюте, и, следовательно, нормаль кривой (L) параллельна касательной эволюты. Но обе эти линии проходят через одну и ту же точку C, и поэтому должны совпадать, и мы имеем первое свойство эволюты: *нормаль к кривой касается эволюты в соответствующей точке.*

Вспоминая определение огибающих семейств линий, мы можем высказать и следующее второе свойство эволюты: *эволюта есть огибающая семейства нормалей к кривой.*

Естественным параметром для эволюты является ее длина дуги s_1, и, согласно правилу дифференцирования сложных функций,

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{ds}=\frac{d\mathbf{r}_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds}=\frac{ds_1}{ds}\mathbf{t}_1,$$

где $\mathbf{t}_1$ — единичный вектор касательной эволюты. Подставляя в (6), получим

$$\frac{ds_1}{ds}\mathbf{t}_1=\frac{d\rho}{ds}\mathbf{n},$$

откуда, сравнивая длины векторов, стоящих в обеих частях этого равенства, будем иметь

$$\left|\frac{ds_1}{ds}\right|=\left|\frac{d\rho}{ds}\right|, \quad \text{т. е.} \quad |ds_1|=|d\rho|.$$

Считая для простоты, что на рассматриваемом участке кривой и эволюты величины s_1 и ρ увеличиваются, можно написать $ds_1=d\rho$. Интегрируя это соотношение по рассматриваемому участку, обнаружим, что приращение длины дуги эволюты совпадает с приращением радиуса кривизны исходной кривой. Таким образом мы получаем третье свойство эволюты: *на участке монотонного изменения радиуса кривизны приращение его равно приращению длины дуги эволюты между соответствующими точками.* В случае рис. 98 это свойство выразится равенством: $M_1C_1-MC=\smile CC_1$.

Выберем на плоскости определенные координатные оси OX и OY, и пусть φ есть угол, образованный направлением касательной $\mathbf{t}$ с осью OX. Выражая единичный вектор через его составляющие, получим

$$\mathbf{t}=\cos\varphi\,\mathbf{i}+\sin\varphi\,\mathbf{j},$$

где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ суть единичные векторы по осям OX и OY. Дифференцируем предыдущее равенство по s:

$$\mathbf{N}=-\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}\mathbf{i}+\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}\mathbf{j},$$

откуда квадрат длины вектора кривизны будет

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(-\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}\right)^2+\left(\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \text{ или } \frac{1}{\rho}=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|.$$

Мы получим таким образом выражение для кривизны, которое мы уже приводили в [**I, 71**].

Положим, что уравнение кривой (L) дано в явной форме

$$y=f(x). \tag{7}$$

Семейство нормалей к этой кривой будет иметь уравнение

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x) \quad \text{или} \quad (X-x)+y'(Y-y)=0. \tag{8}$$

Здесь (X, Y) суть текущие координаты нормали, а (x, y) — координаты точки M кривой (L), причем y есть функция (7) от x. Таким образом роль параметра в уравнении семейства нормалей (8) играет абсцисса x переменной точки кривой. Применяя к семейству (8) обычное правило нахождения огибающей [**13**], мы должны написать два уравнения: уравнение (8) и новое уравнение, которое получается из него дифференцированием по параметру x:

$$\left.\begin{aligned}(X-x)+y'(Y-y)&=0,\\ -1+y''(Y-y)-y'^2&=0.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Исключая из этих уравнений параметр x, мы получим уравнение, связывающее X и Y. Это и будет уравнение огибающей семейства нормалей, т. е. уравнение эволюты. Можно поступать и иначе, а именно, решая систему (9) относительно X и Y, мы выразим последние через параметр x, т. е. получим параметрическое уравнение эволюты

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}. \tag{10}$$

Если уравнение кривой (L) задано само в параметрической форме, то надо в формулах (10) выразить производные от y по x через дифференциалы переменных [**I, 74**]:

$$y'=\frac{dy}{dx}, \quad y''=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d^2y\,dx-d^2x\,dy}{dx^3},$$

и, подставляя эти выражения в (10), получим параметрическое уравнение эволюты для этого случая:

$$X=x-\frac{dy\,(dx^2+dy^2)}{d^2y\,dx-d^2x\,dy}, \quad Y=y+\frac{dx\,(dx^2+dy^2)}{d^2y\,dx-d^2x\,dy}. \tag{11}$$

Примеры. 1. Найдем эволюты эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b).$$

Написав уравнение эллипса в параметрической форме

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

и подставляя в уравнение (11), найдем после несложных вычислений:

$$X = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \qquad Y = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3 t.$$

Исключим параметр t из этих двух уравнений. Умножая первое из уравнений на a, второе на b, возводя в степень $\frac{2}{3}$ и складывая, получим уравнение эволюты эллипса в неявной форме:

$$a^{\frac{2}{3}}X^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}Y^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Нетрудно, пользуясь этими уравнениями

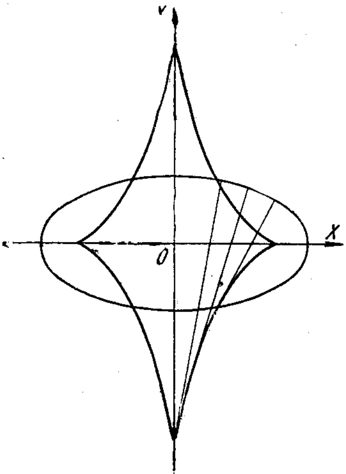

Рис. 99.

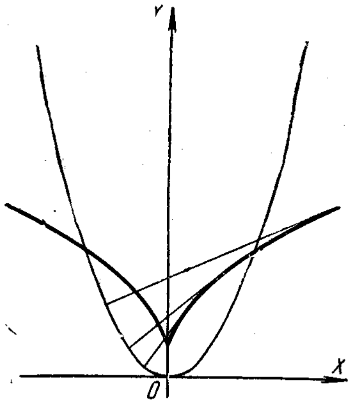

Рис. 100.

построить эволюту эллипса. Заметим, что в вершинах эллипса его радиус кривизны принимает наименьшее и наибольшее значения, и в соответствующих точках эволюта имеет особые точки, а именно точки возврата (рис. 99).

2. Найдем эволюту параболы $y = ax^2$. Пользуясь уравнениями (10), получим без труда

$$X = -4a^2x^3, \quad Y = \frac{1}{2a} + 3ax^2.$$

Исключая отсюда параметр x, получим уравнение эволюты параболы в явной форме (рис. 100):

$$Y = \frac{1}{2a} + \frac{3}{2\sqrt[3]{2a}}X^{\frac{2}{3}}.$$

3. Рассмотрим циклоиду

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

Пользуясь формулами (11), найдем для ее эволюты параметрическое уравнение

$$X = a(t + \sin t), \quad Y = -a(1 - \cos t).$$

Нетрудно показать, что эта кривая будет такая же циклоида, что и заданная кривая, но иначе расположенная относительно осей (рис. 101).

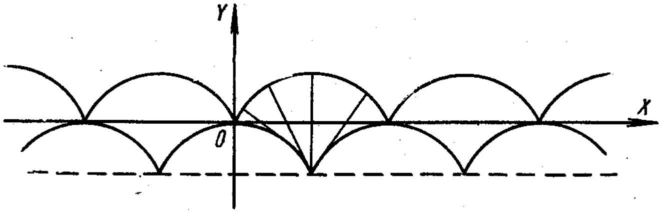

Рис. 101.

Действительно, полагая $t = \tau - \pi$, последние формулы можно переписать в виде

$$X + a\pi = a(\tau - \sin\tau), \qquad Y + 2a = a(1 - \cos\tau),$$

откуда и следует непосредственно наше утверждение.