135. Естественное уравнение кривой. Вдоль всякой кривой кривизна есть определенная функция длины дуги

$$\frac{1}{\rho}=f(s). \tag{12}$$

Покажем, наоборот, что всякому уравнению вида (12) соответствует одна определенная кривая. Действительно, выберем какое-нибудь направление за направление оси X и пусть φ есть угол, образованный касательной кривой с этой осью. Как известно, $\frac{1}{\rho}=\pm\frac{d\varphi}{ds}$, и уравнение (12) дает

$$\frac{d\varphi}{ds}=\pm f(s),$$

откуда

$$\varphi=\pm\int_0^s f(s)\,ds+C.$$

Можно считать, что направление оси OX совпадает с направлением касательной при $s=0$, так что в последней формуле можно считать $C=0$, т. е. мы получаем выражение для угла φ:

$$\varphi=\pm F(s), \quad \text{где} \quad F(s)=\int_0^s f(s)\,ds.$$

Далее мы знаем, что [**I, 70**]

$$\frac{dx}{ds}=\cos\varphi, \quad \frac{dy}{ds}=\sin\varphi,$$

откуда, в силу предыдущего равенства,

$$x=\int_0^s \cos[F(s)]\,ds+C_1, \qquad y=\pm\int_0^s \sin[F(s)]\,ds+C_2.$$

Помещая начало координат в точку кривой, для которой $s=0$, мы должны будем считать $C_1=C_2=0$ и получим вполне определенную кривую

$$x=\int_0^s \cos [F(s)]\,ds, \qquad y=\pm\int_0^s \sin [F(s)]\,ds. \tag{12_1}$$

Двойной знак дает только симметрию относительно оси OX.

Мы показали таким образом, что уравнению (12) может соответствовать определенная в указанном выше смысле кривая и что при выбранной системе координат уравнения (12_1) должны давать параметрическое задание этой кривой. Нетрудно проверить, что, действительно, для кривой, определяемой уравнениями (12_1), кривизна имеет значение, определяемое формулой (12).

Уравнение (12) называется *естественным уравнением кривой* в том смысле, что уравнение это не связано ни с каким случайным выбором осей координат и ему соответствует одна вполне определенная кривая (с точностью до симметрии).

Примеры. 1. Если уравнение (12) имеет вид $\frac{1}{\rho}=C$, т. е. радиус кривизны ρ есть величина постоянная, то, как мы знаем, такому уравнению удовлетворяет окружность [I, 71]. Из предыдущего следует, что *окружность есть единственная кривая с постоянным радиусом кривизны.*

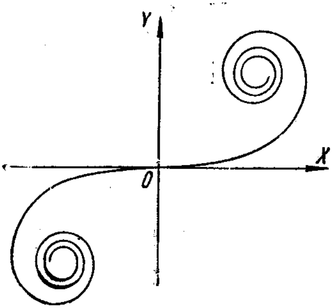

Рис. 103.

2. Положим, что кривизна $\frac{1}{\rho}$ пропорциональна длине дуги

$$\frac{1}{\rho}=2as,$$

где $2a$ — положительный коэффициент пропорциональности. Предыдущие вычисления дадут в данном случае

$$x=\int_0^s \cos (as^2)\,ds, \quad y=\int_0^s \sin (as^2)\,ds. \tag{13}$$

В силу сходимости интегралов [86]

$$\int_0^\infty \cos (as^2)\,ds, \qquad \int_0^\infty \sin (as^2)\,ds$$

можно утверждать, что при беспредельном возрастании s кривая будет стремиться к точке плоскости с координатами, равными значениям вышенаписанных интегралов, причем она будет спиралеобразно закручиваться вокруг этой точки (рис. 103). Если в формулах (13) будем придавать s и отрицательные значения, то получим часть кривой, содержащуюся в третьем координатном угле. Полученная здесь кривая называется спиралью Корню. Она встречается в оптике.