136. Основные элементы кривой в пространстве. Кривая (L) в пространстве может быть определена заданием переменного радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ из начала в переменную точку кривой M (рис. 104).

Принимая за параметр t длину дуги кривой s и дифференцируя $\mathbf{r}$ по s, получим единичный вектор касательной к кривой [**119**]

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{t}. \tag{14}$$

Производная от $\mathbf{t}$ по s называется *вектором кривизны*:

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\mathbf{N}, \tag{15}$$

и длина этого вектора кривизны дает *кривизну кривой* $\frac{1}{\rho}$, а обратная величина ρ называется *радиусом кривизны*. Как и в случае плоской кривой, вектор $\mathbf{N}$ перпендикулярен к $\mathbf{t}$, и направление вектора $\mathbf{N}$ называется направлением *главной нормали кривой*. Вводя единичный вектор главной нормали $\mathbf{n}$, можно написать

$$\mathbf{N}=\frac{1}{\rho}\mathbf{n}. \tag{16}$$

Введем еще один единичный вектор, перпендикулярный к $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}. \tag{17}$$

Этот вектор называется *единичным вектором бинормали*.

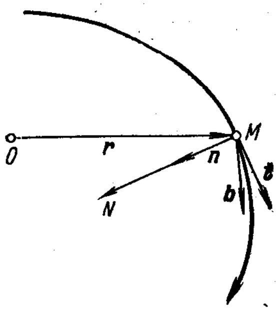

Рис. 104.

Три единичных вектора $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$, имеющих ту же ориентировку, что и координатные оси, составляют, как говорят, *переменный триэдр, связанный с кривой* (L). Если кривая плоская, то векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ находятся в плоскости кривой и, следовательно, единичный вектор бинормали $\mathbf{b}$ есть постоянный вектор длины единица, перпендикулярный к плоскости кривой. Для кривой неплоской производная $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ характеризует отклонение кривой от плоской формы и называется *вектором кручения*. Докажем, что *вектор кручения параллелен главной нормали*. Согласно формуле (17)

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\mathbf{N}\times\mathbf{n}+\mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}.$$

Но векторы $\mathbf{N}$ и $\mathbf{n}$ совпадают по направлению, и, следовательно, их векторное произведение равно нулю, т. е.

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}, \tag{18}$$

откуда вытекает перпендикулярность векторов $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ и $\mathbf{t}$. С другой стороны, как всегда, производная единичного вектора $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ перпендикулярна к самому вектору $\mathbf{b}$. Таким образом вектор $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{t}$ и $\mathbf{b}$, будет действительно параллелен вектору $\mathbf{n}$, и мы можем записать

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds}=\frac{1}{\tau}\mathbf{n}, \tag{19}$$

где численный коэффициент $\frac{1}{\tau}$ называется *кручением кривой*, а обратная величина τ — *радиусом кручения*, или *радиусом второй кривизны*. Заметим, что величина $\frac{1}{\tau}$ может быть как положительной, так и отрицательной, в противоположность кривизне $\frac{1}{\rho}$, которая всегда не отрицательна. Существование вектора касательной, вектора кривизны и вектора кручения связано, конечно, с существованием производных, через которые они выражаются.

Выведем теперь формулы для вычисления кривизны и кручения. Вводя координатные оси OX, OY, OZ и соответствующие им единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, можно написать

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},\quad \mathbf{t}=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k},$$
$$\mathbf{N}=\frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k},$$

откуда для длины вектора $\mathbf{N}$ получим

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2. \tag{20}$$

Из формулы (19) вытекает, что кручение $\frac{1}{\tau}$ можно выразить как скалярное произведение

$$\frac{1}{\tau}=\frac{d\mathbf{b}}{ds}\cdot\mathbf{n}$$

или, в силу (18),

$$\frac{1}{\tau}=\left(\mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}\right)\cdot\mathbf{n}.$$

Заменяя $\mathbf{n}$ его выражением из формулы (16)

$$\mathbf{n}=\rho\mathbf{N},$$

получим

$$\frac{1}{\tau}=\left(\mathbf{t}\times\frac{d(\rho\mathbf{N})}{ds}\right)\cdot\rho\mathbf{N}=\left[\mathbf{t}\times\left(\frac{d\rho}{ds}\mathbf{N}+\rho\frac{d\mathbf{N}}{ds}\right)\right]\cdot\rho\mathbf{N}=$$
$$=\rho\frac{d\rho}{ds}(\mathbf{t}\times\mathbf{N})\cdot\mathbf{N}+\rho^2\cdot\left(\mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}\right)\cdot\mathbf{N}.$$

Но векторное произведение $\mathbf{t}\times\mathbf{N}$ перпендикулярно вектору $\mathbf{N}$, а потому первое из слагаемых в последнем выражении равно нулю, и мы получаем

$$\frac{1}{\tau}=\rho^2\left(\mathbf{t}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}\right)\cdot\mathbf{N},$$

или, переставляя множители в векторном произведении,

$$\frac{1}{\tau}=-\rho^2\left(\frac{d\mathbf{N}}{ds}\times\mathbf{t}\right)\cdot\mathbf{N}.$$

Совершая круговую перестановку векторов и пользуясь формулами (14) и (15), получим окончательно

$$\frac{1}{\tau}=-\rho^2\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)\cdot\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}. \tag{21}$$

Заметим, что коэффициент при $(-\rho^2)$ есть объем параллелепипеда, построенного на векторах $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$, $\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}$ [117].

Возвратимся к формуле (20) для кривизны. В ней предполагается, что координаты x, y, z выражены как функции длины дуги. Преобразуем теперь формулу (20) к новому виду, годному для любого параметрического задания кривой. Для этого нам надо будет выразить производную от координат по длине дуги через дифференциалы координат. Дифференцируя формулу

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2, \tag{22}$$

получим

$$ds\,d^2s=dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z. \tag{23}$$

Кроме того, имеем [I, 74]

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d^2x\,ds-d^2s\,dx}{ds^3},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{d^2y\,ds-d^2s\,dy}{ds^3},\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{d^2z\,ds-d^2s\,dz}{ds^3}. \tag{24}$$

Подставляя это в формулу (20), будем иметь в силу (22)

$$\frac{1}{\rho^2}=$$
$$=\frac{ds^2[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-2ds\,d^2s\,(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)+(d^2s)^2ds^2}{ds^6}$$

или, в силу (22) и (23),

$$\frac{1}{\rho^2}=$$
$$=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)\,[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2]-(dx\,d^2x+dy\,d^2y+dz\,d^2z)^2}{ds^6}. \tag{25}$$

Вспомним теперь элементарное алгебраическое тождество, необходимое нам в дальнейшем [**116**]:

$$(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2=$$
$$=(bc_1-cb_1)^2+(ca_1-ac_1)^2+(ab_1-ba_1)^2. \qquad (26)$$

Применяя это тождество к числителю в выражении (25), можем написать окончательную формулу для квадрата кривизны

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{A^2+B^2+C^2}{(dx^2+dy^2+dz^2)^3}, \qquad (27)$$

где

$$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y, \qquad B=dz\,d^2x-dx\,d^2z, \qquad C=dx\,d^2y-dy\,d^2x.$$

Если кривая (L) есть траектория движущейся точки, то вектор скорости определится из формулы

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\mathbf{t}.$$

Дифференцируя еще раз по времени, получим вектор ускорения

$$\mathbf{w}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t}+\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{t}}{dt},$$

или, в силу (15) и (16),

$$\mathbf{w}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t}+\frac{ds}{dt}\,\frac{ds}{dt}\,\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{t}+\frac{v^2}{\rho}\mathbf{n} \quad \left(v=\frac{ds}{dt}\right),$$

откуда видно, что вектор ускорения имеет составляющую по касательной, равную $\frac{d^2s}{dt^2}$, и по главной нормали — равную $\frac{v^2}{\rho}$, а составляющая по бинормали равна нулю.