137. Формулы Френе. Введем обозначение для направляющих косинусов осей подвижного триэдра относительно неподвижных координатных осей, указанное в прилагаемой таблице.

	X	Y	Z
t	α	β	γ
n	α_1	β_1	γ_1
b	α_2	β_2	γ_2

Формулы Френе дают выражения производной от написанных девяти направляющих косинусов по s.

Составляющие единичного вектора $\mathbf{t}$ суть α, β и γ, и формула

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}=\mathbf{N}=\frac{1}{\rho}\mathbf{n}$$

дает первые три формулы Френе:

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{\alpha_1}{\rho},\quad \frac{d\beta}{ds}=\frac{\beta_1}{\rho},\quad \frac{d\gamma}{ds}=\frac{\gamma_1}{\rho}. \tag{28}$$

Точно так же формула (19) приводит к следующим трем формулам Френе:

$$\frac{d\alpha_2}{ds}=\frac{\alpha_1}{\tau},\quad \frac{d\beta_2}{ds}=\frac{\beta_1}{\tau},\quad \frac{d\gamma_2}{ds}=\frac{\gamma_1}{\tau}. \tag{28_1}$$

Рассмотрение подвижного триэдра дает непосредственно $\mathbf{n}=-\mathbf{t}\times\mathbf{b}$, и, дифференцируя по s, получим

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\mathbf{n}\times\mathbf{b}-\frac{1}{\tau}\mathbf{t}\times\mathbf{n}=-\frac{1}{\rho}\mathbf{t}-\frac{1}{\tau}\mathbf{b}.$$

Это дает три последние формулы Френе:

$$\frac{d\alpha_1}{ds}=-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\alpha_2}{\tau},\quad \frac{d\beta_1}{ds}=-\frac{\beta}{\rho}-\frac{\beta_2}{\tau},\quad \frac{d\gamma_1}{ds}=-\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\gamma_2}{\tau}. \tag{28_2}$$

Пользуясь формулами (28), нетрудно показать, что *если вдоль линии* (L) *кривизна* $\frac{1}{\rho}$ *равна нулю, то это есть прямая линия.* Действительно, тождество $\frac{1}{\rho}=0$ дает

$$\frac{d\alpha}{ds}=\frac{d\beta}{ds}=\frac{d\gamma}{ds}=0,$$

откуда видно, что α, β и γ суть постоянные. Но, как известно [**I, 160**], направляющие косинусы касательной α, β и γ равны соответственно $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ и $\frac{dz}{ds}$, и раз эти производные — постоянные, то сами координаты x, y, z суть полиномы первой степени от s, т. е. линия есть действительно прямая.

Точно так же нетрудно показать, что *если вдоль кривой кручение равно нулю, то эта кривая есть плоская кривая.*