139. Винтовые линии. Пусть имеется цилиндр с образующими, параллельными оси OZ, и пусть (l) есть его направляющая, лежащая в плоскости XOY (рис. 105). Введем в рассмотрение длину дуги σ кривой (l), отсчитываемую от точки A пересечения этой кривой с осью OX в определенном направлении, и положим, что уравнение направляющей будет

$$x = \varphi(\sigma), \qquad y = \psi(\sigma). \tag{32}$$

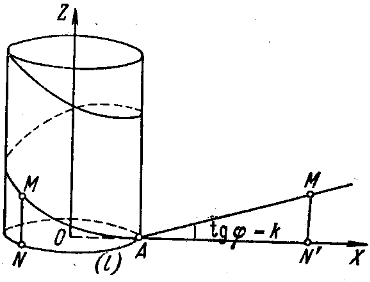

Рис. 105.

Откладываем на (l) некоторую дугу AN и строим отрезок $NM = k\sigma$, параллельный оси OZ, причем k есть определенный численный коэффициент (ход винта). Геометрическое место точек M дает винтовую линию (L), начерченную на нашем цилиндре. Параметрические уравнения этой линии будут очевидно

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad z = k\sigma. \tag{33}$$

Пусть s — длина дуги кривой (L), отсчитываемая от точки A. Имеем

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = [\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) + k^2]\, d\sigma^2.$$

Но $\varphi'(\sigma)$ и $\psi'(\sigma)$ равны косинусу и синусу угла, образованного касательной к кривой (l) с осью OX [I, 70], а потому $\varphi'^2(\sigma) + \psi'^2(\sigma) = 1$, и предыдущую формулу можно переписать в виде

$$ds = \sqrt{1 + k^2}\, d\sigma,$$

откуда

$$s = \sqrt{1 + k^2}\, \sigma.$$

Определим теперь косинус угла, образованного касательной к (L) с осью OZ:

$$\gamma=\frac{dz}{ds}=\frac{dz}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{ds}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}};$$

это дает *первое свойство винтовой линии: касательные к винтовой линии образуют постоянный угол с некоторым неизменным направлением.*

Обратимся к третьей из формул (28). В данном случае она дает

$$0=\frac{\gamma_1}{\rho} \text{ или } \gamma_1=0,$$

и, следовательно, главная нормаль винтовой линии перпендикулярна к оси OZ, т. е. к образующей цилиндра. Но она, с другой стороны, перпендикулярна к касательной к винтовой линии. Образующая цилиндра и касательная к винтовой линии определяют, как нетрудно видеть, касательную плоскость к цилиндру во взятой точке на винтовой линии, и из предыдущего вытекает, что главная нормаль винтовой линии перпендикулярна к этой касательной плоскости. Мы получаем таким образом *второе свойство винтовой линии: главная нормаль к винтовой линии во всех ее точках совпадает с нормалью к цилиндру, на котором эта винтовая линия начерчена.*

Теперь обратимся к косинусам γ, γ_1, γ_2 — углов, образованных осью OZ с направлениями подвижного триэдра винтовой линии. Принимая во внимание, что $\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=1$ и что γ и γ_1 — постоянные, как мы видели уже, мы можем заключить, что и γ_2 есть величина постоянная. Третья из формул (28_2) дает, в нашем случае, $-\frac{\gamma}{\rho}-\frac{\gamma_2}{\tau}=0$, откуда мы видим, что отношение $\frac{\rho}{\tau}$ есть величина постоянная; итак, имеем *третье свойство винтовой линии: вдоль винтовой линии отношение радиуса кривизны к радиусу кручения есть величина постоянная.* Обозначим буквой r радиус кривизны плоской кривой (l). Принимая во внимание, что квадрат кривизны равен сумме квадратов вторых производных от координат по длине дуги, мы можем написать

$$\frac{1}{r^2}=\varphi''^2(\sigma)+\psi''^2(\sigma)$$

и

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2=\left[\left(\frac{d^2x}{d\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{d\sigma^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{d\sigma^2}\right)^2\right]\frac{1}{(1+k^2)^2},$$

откуда

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{\varphi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2}+\frac{\psi''^2(\sigma)}{(1+k^2)^2}=\frac{1}{(1+k^2)^2r^2},$$

или $\rho=(1+k^2)r$, т. е. радиус кривизны винтовой линии отличается от радиуса кривизны направляющей в соответствующей точке лишь постоянным множителем. Если цилиндр круговой, т. е. направляющая (l) есть окружность, то r — постоянно, следовательно, и ρ — постоянно, но тогда, согласно третьему свойству, и τ тоже есть постоянная величина, т. е. *винтовая линия на круговом цилиндре имеет постоянную кривизну и постоянное кручение.*

В заключение выясним еще одно важное свойство винтовых линий. Оно заключается в том, что если взять на цилиндре две точки, то кратчайшее расстояние между этими двумя точками на цилиндре будет даваться винтовой линией, проходящей через эти две точки. В этом отношении винтовые линии на цилиндре совершенно аналогичны прямым линиям на плоскости. Указанное свойство обычно выражают, говоря, что *винтовые линии суть геодезические линии цилиндра. Вообще геодезическими линиями на заданной поверхности называют линии, дающие кратчайшее расстояние между двумя точками поверхности.*

Если мы развернем цилиндр на плоскость XOZ, поворачивая его вокруг образующей, проходящей через точку A, то, в силу того, что отношение дуги AN к отрезку NM сохраняет постоянное значение $\frac{1}{k}$, винтовая линия на плоскости окажется прямой линией. При указанной развертке цилиндра на плоскость длины сохраняются, и упомянутое выше свойство винтовой линии — давать кратчайшее расстояние на цилиндре — становится очевидным. Заметим, что это свойство стоит в непосредственной связи со вторым свойством винтовой линии, т. е. с тем фактом, что главные нормали винтовой линии совпадают с нормалями к цилиндру. В геометрии вообще доказывают, что *главные нормали к геодезической линии на любой поверхности совпадают с нормалями к этой поверхности.*