140. Поле единичных векторов. Пусть $\mathbf{t}$ — поле единичных векторов, т. е. в каждой точке пространства задан единичный вектор $\mathbf{t}$. Выведем простую и важную формулу для вектора кривизны $\mathbf{N}$ векторных линий этого поля. Вводя координаты (x, y, z) и длину дуги s векторной линии, мы можем написать

$$\frac{dx}{ds} = t_x, \quad \frac{dy}{ds} = t_y, \quad \frac{dz}{ds} = t_z.$$

Определим составляющую N_x вектора кривизны

$$N_x = \frac{dt_x}{ds} = \frac{\partial t_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial t_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial t_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}$$

или

$$N_x = \frac{\partial t_x}{\partial x} t_x + \frac{\partial t_x}{\partial y} t_y + \frac{\partial t_x}{\partial z} t_z.$$

Дифференцируя тождество

$$t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 = 1$$

по x, получим

$$t_x \frac{\partial t_x}{\partial x} + t_y \frac{\partial t_y}{\partial x} + t_z \frac{\partial t_z}{\partial x} = 0.$$

Вычитая эту сумму из полученного выше выражения N_x, можем переписать его в виде

$$N_x = \left(\frac{\partial t_x}{\partial z} - \frac{\partial t_z}{\partial x}\right) t_z - \left(\frac{\partial t_y}{\partial x} - \frac{\partial t_x}{\partial y}\right) t_y,$$

т. е. $N_x = (\operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t})_x$, и то же самое, очевидно, получится и для двух других составляющих, что и дает искомую формулу для вектора кривизны векторных линий:

$$\mathbf{N} = \operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t}. \tag{34}$$

Для того чтобы линии были прямыми, необходимо и достаточно, чтобы длина $\mathbf{N}$, т. е. кривизна $\frac{1}{\rho}$, была равна нулю [137]. Отсюда видно, что *для того чтобы векторные линии единичного поля* $\mathbf{t}$ *были прямые, необходимо и достаточно,* чтобы

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t} = 0. \tag{35}$$

Кроме того мы видели, что для существования семейства поверхностей, ортогональных к векторным линиям, необходимо и достаточно [122]

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 0. \tag{36}$$

Совместное выполнение условий (35) и (36) возможно лишь в случае $\operatorname{rot} \mathbf{t} = 0$, ибо если этот вектор отличен от нуля, то условие (35) равносильно параллельности векторов $\operatorname{rot} \mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$, а условие (36) равносильно их перпендикулярности. Отсюда следует, что *векторные линии поля единичных векторов* $\mathbf{t}$ *будут нормалями к некоторому семейству поверхностей лишь в том случае, когда* $\operatorname{rot} \mathbf{t} = 0$. Это предложение играет важную роль при изложении начал геометрической оптики.