§ 13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

141. Параметрические уравнения поверхности. До сих пор мы рассматривали уравнение поверхности в пространстве с координатными осями X, Y, Z в явной форме $z=f(x, y)$ или в неявной форме

$$F(x, y, z)=0. \tag{37}$$

Можно написать уравнения поверхности в параметрической форме, выражая координаты ее точек в виде функций двух независимых переменных параметров u и v:

$$x=\varphi(u, v), \qquad y=\psi(u, v), \qquad z=\omega(u, v). \tag{38}$$

Мы будем предполагать, что эти функции однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные до второго порядка в некоторой области изменения параметров (u, v).

Если подставить эти выражения координат через u и v в левую часть уравнения (37), то мы должны получить тождество относительно u и v. Дифференцируя это тождество по независимым переменным u и v, будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial v}=0.$$

Рассматривая эти уравнения как два однородных уравнения относительно $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ и применяя алгебраическую лемму, упомянутую в [116], получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}=k\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial v}-\frac{\partial \omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v}\right), \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=k\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=k\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v}-\frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right),$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности.

Мы считаем, что множитель k и по крайней мере одна из разностей, стоящих в правых частях последних формул, отличны от нуля.

Обозначим для краткости написанные три разности следующим образом:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}-\frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{d(y, z)}{d(u, v)}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{d(z, x)}{d(u, v)},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{d(x, y)}{d(u, v)}.$$

Как известно, уравнение касательной плоскости к нашей поверхности в некоторой ее точке (x, y, z) можно написать в виде [I, 160]

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(Z-z)=0,$$

или, заменяя $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ пропорциональными величинами, можем переписать уравнение касательной плоскости так:

$$\frac{d(y, z)}{d(u, v)}(X-x)+\frac{d(z, x)}{d(u, v)}(Y-y)+\frac{d(x, y)}{d(u, v)}(Z-z)=0. \qquad (39)$$

Коэффициенты в этом уравнении, как известно, пропорциональны направляющим косинусам нормали к поверхности.

Положение переменной точки M на поверхности характеризуется значениями параметров u и v, и эти параметры называются обычно координатами точек поверхности или координатными параметрами.

Придавая параметрам u и v постоянные значения, получим два семейства линий на поверхности, которые мы назовем координатными линиями поверхности: координатные линии $u=C_1$, вдоль которых меняется только v, и координатные линии $v=C_2$, вдоль которых меняется только u. Эти два семейства координатных линий дают координатную сетку на поверхности.

В качестве примера рассмотрим сферу с центром в начале координат и радиусом R. Параметрические уравнения такой сферы могут быть написаны в виде

$$x=R\sin u\cos v, \qquad y=R\sin u\sin v, \qquad z=R\cos u.$$

Координатные линии $u=C_1$ и $v=C_2$ представляют собой в данном случае, очевидно, параллели и меридианы нашей сферы.

Отвлекаясь от координатных осей, мы можем охарактеризовать поверхность переменным радиусом-вектором $\mathbf{r}(u, v)$, идущим из постоянной точки O в переменную точку M нашей поверхности. Частные производные от этого радиуса-вектора по параметрам $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$ дадут, очевидно, векторы, направленные по касательным к координатным линиям. Составляющие этих векторов по осям OX, OY, OZ

будут, согласно (38), φ'_u, ψ'_u, ω'_u и φ'_v, ψ'_v, ω'_v, и отсюда видно, что коэффициенты в уравнении касательной плоскости (39) суть составляющие векторного произведения $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$. Это векторное произведение есть вектор, перпендикулярный к касательным $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v$, т. е. вектор, направленный по нормали поверхности. Квадрат длины этого вектора выражается, очевидно, скалярным произведением вектора $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ на самого себя, т. е. проще говоря, квадратом этого вектора[1]). В дальнейшем будет играть существенную роль единичный вектор нормали к поверхности, который мы можем, очевидно, написать в виде

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\sqrt{(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)^2}}. \tag{40}$$

Изменяя порядок сомножителей в написанном векторном произведении, мы получим для вектора (40) противоположное направление. Мы будем в дальнейшем определенным образом фиксировать порядок множителей, т. е. будем определенным образом фиксировать направление нормали к поверхности.

Возьмем на поверхности некоторую точку M и проведем через эту точку какую-либо кривую (L), лежащую на поверхности. Эта кривая, вообще говоря, не координатная линия, и вдоль нее будут меняться как u, так и v. Направление касательной к этой кривой будет определяться вектором $\mathbf{r}'_u + \mathbf{r}'_v \frac{dv}{du}$, если считать, что вдоль (L) в окрестности точки M параметр v есть функция от u, имеющая производную. Отсюда видно, что *направление касательной к кривой, проведенной на поверхности, в какой-либо точке M этой кривой, вполне характеризуется величиной $\frac{dv}{du}$ в этой точке*. При определении касательной плоскости и выводе ее уравнения (39) мы считали, что функции (38) в рассматриваемой точке и ее окрестности имеют непрерывные частные производные и что, по крайней мере, один из коэффициентов уравнения (39) отличен от нуля в рассматриваемой точке.

Если $\frac{d(x, y)}{d(u, v)} \neq 0$ при $u = u_0$, $v = v_0$, то то же будет иметь место и в некоторой окрестности указанных значений. Согласно первым двум из формул (38) эта окрестность перейдет в окрестность значений $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, и для значений (x, y), достаточно близких к (x_0, y_0), первые два из уравнений (38) могут быть решены относительно u и v [**I, 157**], т. е. (u, v) могут быть выражены через x и y. Подстановка этих выражений в третье из уравнений (38) дает в окрестности рассматриваемой точки уравнение поверхности в явной форме $z = f(x, y)$.

[1]) Вообще, если $\mathbf{A}$ есть некоторый вектор, то мы будем обозначать через $\mathbf{A}^2$ квадрат длины этого вектора, т. е. скалярное произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$.