142. Первая дифференциальная форма Гаусса. Рассмотрим теперь квадрат дифференциала дуги какой-нибудь кривой на нашей поверхности

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv\right)^2.$$

Открывая скобки, будем иметь так называемую *первую дифференциальную форму Гаусса:*

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2, \tag{41}$$

где

$$\left.\begin{aligned} E(u, v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G(u, v) &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

или

$$E = \mathbf{r}_u'^2, \quad F = \mathbf{r}_u' \cdot \mathbf{r}_v', \quad G = \mathbf{r}_v'^2. \tag{42_1}$$

Совершенно так же, как и в [**131**], можно показать, что равенство нулю коэффициента F является необходимым и достаточным условием того, чтобы координатные линии $u = C_1$ и $v = C_2$ были взаимно перпендикулярны. В этом частном случае криволинейные координаты u, v на поверхности называются *ортогональными координатами.*

Выведем теперь выражение для элемента площади поверхности через коэффициенты выражения (41). Рассмотрим на поверхности малую площадку, ограниченную двумя парами близких координатных линий (рис. 106). Пусть (u, v) — координаты основной вершины A. Стороны AD и AB будут соответственно $\mathbf{r}_u' du$ и $\mathbf{r}_v' dv$. Принимая рассматриваемую малую площадку за параллелограмм [ср. **60**], мы можем написать выражение площади этого параллелограмма как длины вектора, получаемого при векторном перемножении упомянутых векторов, т. е.

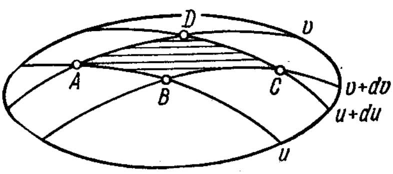

Рис. 106.

$$dS = |\mathbf{r}_u' du \times \mathbf{r}_v' dv| = |\mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v'|\, du\, dv.$$

Имеем для квадрата длины вектора

$$(\mathbf{r}_u' \times \mathbf{r}_v')^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

откуда, в силу тождества (26) из [136],

$$(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)^2 = EG - F^2, \tag{43}$$

и для элемента площади поверхности будем окончательно иметь

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{44}$$

Точно так же, подставляя (43) в формулу (40), можем написать выражение единичного вектора нормали к поверхности в виде

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{45}$$

Заметим, что, в силу (43), разность $EG - F^2$ положительна.