143. Вторая дифференциальная форма Гаусса. Рассмотрим какую-нибудь линию (L) на поверхности и пусть $\mathbf{t}$ — ее единичный вектор касательной. Он, очевидно, перпендикулярен к единичному вектору нормали к поверхности, т. е. $\mathbf{t}\cdot\mathbf{m}=0$. Дифференцируя это соотношение по длине дуги s кривой (L), будем иметь

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{m}}{ds}=0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})+\mathbf{t}\cdot\frac{d\mathbf{m}}{ds}=0,$$

где ρ — радиус кривизны и $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали кривой (L). Предыдущее равенство можно переписать в виде

$$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}}{\rho}=-\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\frac{d\mathbf{m}}{ds} \quad \text{или} \quad \frac{\cos\varphi}{\rho}=-\frac{d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{m}}{ds^2},$$

где φ — угол между нормалью к поверхности и главной нормалью к кривой (L). Выражая дифференциалы $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{m}$ через координатные параметры u и v, можно написать

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{-(\mathbf{r}'_u\,du+\mathbf{r}'_v\,dv)\cdot(\mathbf{m}'_u\,du+\mathbf{m}'_v\,dv)}{ds^2}. \tag{46}$$

Раскрывая в числителе скобки, получим *вторую дифференциальную форму Гаусса:*

$$-(\mathbf{r}'_u\,du+\mathbf{r}'_v\,dv)\cdot(\mathbf{m}'_u\,du+\mathbf{m}'_v\,dv)=$$
$$=L(u,v)\,du^2+2M(u,v)\,du\,dv+N(u,v)\,dv^2,$$

где

$$L=-\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_u,\quad M=-\frac{1}{2}(\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_v)-\frac{1}{2}(\mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}'_u),$$
$$N=-\mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}'_v, \tag{47}$$

и формула (46) окончательно примет вид

$$\frac{\cos\varphi}{\rho}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{48}$$

Укажем теперь другие выражения для коэффициентов L, M и N. Дифференцируя очевидные соотношения

$$\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}=0,\qquad \mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}=0$$

по независимым переменным u и v, получим четыре соотношения

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}''_{u^2}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_u=0, &\qquad &\mathbf{r}''_{uv}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_v=0,\\ &\mathbf{r}''_{vu}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}'_u=0, &\qquad &\mathbf{r}''_{v^2}\cdot\mathbf{m}+\mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}'_v=0,\end{aligned}$$

и отсюда можем, вместо формул (47), написать следующие выражения для коэффициентов второй дифференциальной формы Гаусса:

$$\begin{gathered}L=\mathbf{r}''_{u^2}\cdot\mathbf{m},\qquad N=\mathbf{r}''_{v^2}\cdot\mathbf{m},\\ M=\mathbf{r}''_{uv}\cdot\mathbf{m}=-\mathbf{r}'_u\cdot\mathbf{m}'_v=-\mathbf{r}'_v\cdot\mathbf{m}'_u.\end{gathered}\tag{49}$$

Вспоминая выражение (45) для вектора $\mathbf{m}$, можем переписать равенства (49) в виде

$$\begin{gathered}L=\frac{\mathbf{r}''_{u^2}\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\qquad M=\frac{\mathbf{r}''_{uv}\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\\ N=\frac{\mathbf{r}''_{v^2}\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)}{\sqrt{EG-F^2}}.\end{gathered}\tag{50}$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда уравнение поверхности дано в явном виде

$$z=f(x,\ y).\tag{51}$$

В данном случае роль параметров играют x и y, и мы будем иметь следующие выражения для составляющих радиуса-вектора и его производных по параметрам:

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}(x,\ y,\ z), &\quad &\mathbf{r}'_x(1,\ 0,\ p), &\quad &\mathbf{r}'_y(0,\ 1,\ q),\\ &\mathbf{r}''_{x^2}(0,\ 0,\ r), &\quad &\mathbf{r}''_{xy}(0,\ 0,\ s), &\quad &\mathbf{r}''_{y^2}(0,\ 0,\ t),\end{aligned}$$

где

$$p=\frac{\partial f}{\partial x},\quad q=\frac{\partial f}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\tag{52}$$

Применяя формулы (42_1) и (50), получим выражения коэффициентов в обеих формах Гаусса:

$$\begin{gathered}F=1+p^2,\qquad F=pq,\qquad G=1+q^2,\\ L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.\end{gathered}\tag{53}$$

Выберем теперь координатные оси определенным образом, а именно поместим начало координат в некоторую точку A_0 на поверхности, оси OX и OY возьмем в касательной плоскости к поверхности в точке A_0 и ось OZ направим по нормали поверхности. Значком нуль будем обозначать тот факт, что соответствующая величина взята в точке A_0. При сделанном выборе координатных осей косинусы углов, образованных нормалью к поверхности с осями OX и OY, будут в точке A_0 равны нулю, мы получим [65] $p_0 = q_0 = 0$, и формулы (53) дадут в точке A_0:

$$L_0 = r_0, \quad M_0 = s_0, \quad N_0 = t_0. \tag{54}$$