144. О кривизне линий, начерченных на поверхности. Вернемся к рассмотрению формулы (48). Ее правая часть зависит от значений коэффициентов двух форм Гаусса и от отношения $\frac{dv}{du}$. Последнее обстоятельство станет непосредственно ясным, если разделить числитель и знаменатель на du^2. Упомянутые коэффициенты суть функции параметров (u, v) и в заданной точке поверхности имеют определенное численное значение. Что же касается отношения $\frac{dv}{du}$, то оно, как мы видели [141], характеризует направление касательной к кривой. Мы можем поэтому утверждать, что обе части формулы (48) имеют определенное значение, если фиксировать точку на поверхности и направление касательной к той кривой на поверхности, которую мы рассматриваем. Если же взять на поверхности в фиксированной точке две кривые, имеющие не только одинаковое направление касательных, но и одинаковое направление главной нормали, то у таких кривых и угол φ будет одинаковым, а потому, в силу упомянутой формулы, и величина ρ окажется одной и той же, т. е. мы имеем следующую теорему:

Теорема 1. *Две кривые на поверхности с одинаковой касательной и главной нормалью в некоторой точке имеют в этой точке и одинаковый радиус кривизны.*

Если на поверхности имеется какая угодно кривая (L) и на ней некоторая точка M, то, проводя плоскость через касательную и главную нормаль к этой кривой в точке M, мы получим в сечении этой плоскости с поверхностью плоскую кривую (L_0), имеющую ту же касательную и главную нормаль, что и заданная кривая, а потому и тот же радиус кривизны. Таким образом доказанная теорема дает возможность сводить изучение кривизны любой кривой на поверхности к изучению кривизны плоских сечений поверхности.

Назовем *нормальным сечением* поверхности в заданной точке M сечение поверхности какой-нибудь плоскостью, проходящей через нормаль поверхности в точке M. Мы имеем, очевидно, бесчисленное множество нормальных сечений, причем мы можем фиксировать определенное нормальное сечение, задавая определенное направление касательной в касательной плоскости к поверхности, т. е. фиксируя величину отношения $\frac{dv}{du}$. Заметим, что главная нормаль у нормального сечения или совпадает, или противоположна вектору $\mathbf{m}$, так что угол φ равен 0 или π, и, следовательно, $\cos\varphi = \pm 1$.

Рассмотрим какую-нибудь кривую (L) на поверхности и на ней определенную точку M. Назовем нормальным сечением, соответствующим кривой (L) в точке M, то нормальное сечение в точке M, которое имеет в этой точке общую касательную с кривой (L). Пусть ρ — радиус кривизны кривой (L) и R — радиус кривизны соответствующего нормального сечения. Так как обе кривые имеют одну и ту же касательную, то правые части в формуле (48) для них одинаковы, и мы можем написать

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} = \frac{\pm 1}{R}, \quad \text{т. е.} \quad \rho = R \cdot |\cos\varphi|, \tag{55}$$

где φ — угол между главной нормалью кривой и нормалью к поверхности. Поскольку R и ρ положительны, знак в правой части надо брать совпадающим со знаком $\cos\varphi$. Последняя формула приводит к следующей теореме:

Теорема 2 (теорема Менье). *Радиус кривизны любой кривой на поверхности в заданной точке равен произведению радиуса кривизны соответствующего нормального сечения на абсолютное значение косинуса угла между нормалью к поверхности в этой точке и главной нормалью к кривой.*

Иначе говоря, радиус кривизны любой кривой на поверхности равен величине проекции радиуса кривизны соответствующего нормального сечения, отложенного на нормали к поверхности, на главную нормаль к этой кривой.

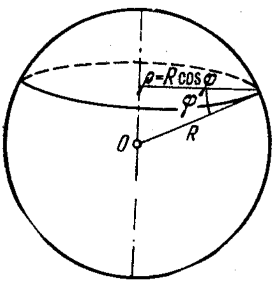

Рис. 107.

В случае сферы нормальное сечение есть окружность большого круга, и если мы за кривую (L) возьмем какую-либо окружность, начерченную на сфере, то формула (55) приводит к очевидному соотношению между радиусами двух упомянутых окружностей (рис. 107).

Согласно теореме второй, изучение кривизны кривых на поверхности сводится к изучению кривизны нормальных сечений в заданной точке поверхности. Как мы видели, для нормального сечения в формуле (48) надо считать $\cos\varphi = \pm 1$. Согласимся относить знак (—), когда он встретится, к величине ρ, т. е. согласимся считать радиус кривизны нормального сечения отрицательным, если главная нормаль нормального сечения противоположна направлению вектора $\mathbf{m}$, т. е. противоположна выбранному направлению нормали к поверхности. При таком соглашении мы будем иметь для нормальных сечений формулу

$$\frac{1}{R}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{56}$$

Напомним еще раз, что в правой части этой формулы коэффициенты дифференциальных форм имеют определенное значение, так как мы фиксировали некоторую точку на поверхности, и величина $\frac{1}{R}$ зависит лишь от значения отношения $\frac{dv}{du}$, т. е. от выбора направления касательной. Знаменатель в правой части формулы (56) имеет всегда положительные значения, так как выражает величину ds^2, а потому знак кривизны $\frac{1}{R}$ нормального сечения определяется знаком числителя, и могут представиться следующие три случая:

1. Если во взятой точке $M^2-LN<0$, то для всех нормальных сечений $\frac{1}{R}$ имеет один и тот же знак, т. е. главные нормали ко всем нормальным сечениям направлены в одну и ту же сторону. Такая точка поверхности называется *эллиптической.*

2. Если $M^2-LN>0$, то $\frac{1}{R}$ будет иметь различные знаки, т. е. во взятой точке поверхности имеются нормальные сечения с противоположным направлением главной нормали. Такая точка поверхности называется *гиперболической.*

3. Если $M^2-LN=0$, то при этом числитель в правой части формулы (56) представляет собой полный квадрат, и здесь $\frac{1}{R}$ не меняет знака, но при одном положении нормального сечения обращается в нуль. Такая точка поверхности называется *параболической.*

Заметим, что в гиперболическом случае трехчлен, стоящий в числителе правой части формулы (56), меняя знак, обращается в нуль, и будут два нормальных сечения с кривизной, равной нулю. В эллиптическом же случае таких сечений не будет.

Введем координатные оси, приняв взятую точку поверхности за начало и поместив оси OX и OY в касательной плоскости, как мы это делали в [**142**].

В силу формул (54) равенство (56) примет вид

$$\frac{1}{R}=\frac{r_0\,dx^2+2s_0\,dx\,dy+t_0\,dy^2}{ds^2}.$$

Касательная к нормальному сечению лежит в плоскости XOY, и отношения $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ равны соответственно $\cos\theta$ и $\sin\theta$, где θ — угол, образованный касательной с осью OX. Таким образом предыдущая формула принимает вид

$$\frac{1}{R}=r_0\cos^2\theta+2s_0\cos\theta\sin\theta+t_0\sin^2\theta. \tag{57}$$

В этой формуле мы имеем в явном виде зависимость кривизны $\frac{1}{R}$ от направления касательной, характеризуемого углом θ. При этом, если $s_0^2-r_0t_0<0$, то точка будет эллиптической, в случае $s^2-r_0t_0>0$ — гиперболической, а в случае $s_0^2-r_0t_0=0$ — параболической.

В случае $s_0^2-r_0t_0<0$ функция $z=f(x, y)$ будет иметь в рассматриваемой точке максимум или минимум [**I, 163**], равный нулю, т. е. поверхность вблизи этой точки будет расположена по одну сторону от касательной плоскости. При $s_0^2-r_0t_0>0$ не будет ни максимума, ни минимума, т. е. в любом соседстве с рассматриваемой точкой поверхность будет расположена по обе стороны от касательной плоскости. Наконец, в параболической точке, где $s_0^2-r_0t_0=0$, ничего определенного о расположении поверхности относительно касательной плоскости сказать нельзя.

Из формул (53) непосредственно вытекает, что знак (M^2-LN) при любом выборе осей XYZ совпадает со знаком (s^2-rt) и, следовательно, при $s^2-rt<0$ точка будет эллиптической, при $s^2-rt>0$ — гиперболической и при $s^2-rt=0$ — параболической.

На одной и той же поверхности могут быть точки разных родов. Например, на торе, который получается вращением окружности вокруг оси, лежащей в одной плоскости с окружностью и вне ее [**I, 107**], точки, лежащие с внешней стороны, будут эллиптическими, а с внутренней стороны — гиперболическими. Эти две области отделяются одна от другой крайними параллелями тора, все точки которых суть параболические точки.